SUR LA COMPACTIFICATION DE THURSTON DE L'ESPACE DE TEICHMÜLLER

par

Frédéric PAULIN

Résumé. — Le but de ces notes d'exposé est, après avoir décrit rapidement diverses compactifications de l'espace de Teichmüller d'une surface compacte connexe orientée privée d'un nombre fini de points, de donner une construction, par la topologie de Gromov équivariante introduite par l'auteur, de la compactification de Thurston de cet espace de Teichmüller.

Abstract **(On Thurston's compactification of Teichmüller space)**

The aim of these lecture notes is, after having quickly described various compactifications of the Teichmüller space of a compact connected oriented surface minus finitely many points, to give a construction, by the equivariant Gromov topology introduced by the author, of Thurston's compactification of this Teichmüller space.

Le but de ces notes d'exposés est de donner une construction, par la topologie de Gromov équivariante introduite dans [**Pau2**], de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller Teich(S) d'une surface S orientée connexe compacte privée d'un nombre fini de points.

Il existe de nombreuses compactifications (géométriquement intéressantes) de l'espace de Teichmüller de S. Avant de donner en détail notre approche de la compactification de Thurston, nous décrivons, pour la culture et de manière non exhaustive, les principales compactifications

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 57M50, 30F60, 32M50.
Mots clefs. — surface de Riemann; compactification de Thurston; espace de Teichmüller; surface hyperbolique; topologie de Gromov équivariante.

de Teich(S), de manière briève (et donc sans pouvoir donner toutes les explications nécessaires, pour lesquelles nous renvoyons à la bibliographie), ainsi que leurs relations, en supposant pour simplifier que S est compacte.

- **Les compactifications de Teichmüller** (voir [**Abi, Gar, Nag**]). Il y en a une pour toute structure de surface de Riemann X fixée sur S, par l'espace des points à l'infini des rayons de Teichmüller issus de (l'image encore notée X dans Teich(S) de) X. La distance de Teichmüller est finslérienne complète sur la variété différentielle Teich(S), et ces rayons de Teichmüller sont les rayons géodésiques issus de X pour cette métrique, ce qui fournit la compactification de Teichmüller de Teich(S) associée à X. Le bord s'identifie avec l'espace $\mathcal{Q}_1(X)$ des formes différentielles quadratiques holomorphes de norme 1 sur X, qui s'identifie à la sphère unité de l'espace cotangent de Teich(S) en X.
- **Les compactifications de Bers** (voir par exemple [**Ber, Nag, Bro, McM**]). Il y en a une pour toute structure de surface de Riemann X fixée sur S, construite comme suit. La surface de Riemann X est isomorphe à la surface de Riemann quotient $\Gamma_X\backslash\mathbb{H}$ où $\mathbb{H}\subset\mathbb{C}$ est le demi-plan (ouvert) supérieur, et Γ_X un sous-groupe discret sans torsion du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})\simeq \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})\subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ des automorphismes complexes de $\mathbb{H}$. Pour toute autre structure de surface de Riemann Y sur S, soit $h : X\rightarrow Y$ un homéomorphisme quasi-conforme homotope à l'identité envoyant la structure de X sur celle de Y. Sa différentielle de Beltrami $\overline{\partial}h/\partial h$, qui est presque partout définie, se relève en une différentielle de Beltrami Γ_X-invariante sur $\mathbb{H}$, qui étendue par 0 sur la sphère de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$, donne une différentielle de Beltrami μ sur $\widehat{\mathbb{C}}$, qui est Γ_X-invariante. Le théorème d'Ahlfors-Bers dit qu'il existe un homéomorphisme quasi-conforme $f_\mu:\widehat{\mathbb{C}}\rightarrow\widehat{\mathbb{C}}$, de différentielle de Beltrami μ, uniquement défini modulo conjugaison au but par un élément de $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$, qui conjugue Γ_X à un sous-groupe (encore discret et sans torsion) de $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})\simeq PSL_2(\mathbb{C})$. Ainsi l'application
$$Y\mapsto\{\gamma\mapsto f_\mu\circ\gamma\circ f_\mu^{-1}\}$$

induit un homéomorphisme sur son image, de l'espace de Teichmüller de S, vu comme l'espace quotient de l'espace des structures de surfaces de Riemann sur S modulo l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$, à valeurs dans l'espace topologique quotient (non séparé)

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_X, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C}))/\mathrm{PSL}(\mathbb{C}) ,$$

dont l'image est d'adhérence (séparée et) compacte, ce qui fournit une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$.

Une manière peut-être plus explicite de visualiser le bord de Bers de $\mathrm{Teich}(S)$ relativement au choix de X est le suivant. Rappelons que la dérivée schwartzienne Sf d'une application holomorphe injective d'un ouvert de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ est définie par

$$Sf = \left(\frac{f''}{f'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2 .$$

Si $\mathbb{H}^-$ est le demi-plan (ouvert) inférieur, alors $S(f_\mu|_{\mathbb{H}^-})$ est une forme différentielle quadratique holomorphe sur $\mathbb{H}^-$, invariante par Γ_X et ne dépendant que de la classe $[Y]$ de Y dans $\mathrm{Teich}(S)$. Donc elle définit une forme différentielle quadratique holomorphe $\Phi_{[Y]}$ sur $X^- = \Gamma_X\backslash\mathbb{H}^-$. On montre que l'application $[Y] \mapsto \Phi_{[Y]}$ est un plongement de $\mathrm{Teich}(S)$ sur un ouvert relativement compact de l'espace vectoriel complexe de dimension finie $\mathcal{Q}(X)$ des formes différentielles quadratiques holomorphes sur X^-. En prenant l'adhérence de l'image, ceci fournit une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$, homéomorphe à celle décrite ci-dessus.

- **La compactification naturelle de Thurston** (voir **[Thu1, FLP]** pour la construction originale, ainsi que les rappels ci-dessous). Le bord est l'espace $\mathcal{PMF}(S)$ des classes d'équivalence de feuilletages transversalement mesurés à singularités de type selle à $k \geq 3$ branches, modulo isotopies, opérations de Whitehead et multiplication par une constante strictement positive de la mesure transverse. Une propriété cruciale de la compactification de Thurston est qu'elle est naturelle (au sens rappelé ci-dessous) pour l'action du groupe modulaire de Teichmüller $\mathrm{Mod}(S)$. Voir aussi **[Wol1, EL]** pour une description de cette compactification par les applications harmoniques, et **[Wol2]** pour la relation entre les applications harmoniques et les actions de groupes de $\pi_1 S$ sur les arbres (réels). Kaimanovich et Mazur **[KM]** ont montré que le bord de Poisson de nombreuses chaînes de Markov sur l'espace de Teichmüller est le bord de Thurston muni d'une mesure de probabilité adéquate.

- **La compactification naturelle de Morgan-Shalen** (voir [**MS1**]). Soit X une composante irrréductible de l'ensemble algébrique affine complexe
$$\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))//SL_2(\mathbb{C})\ ,$$
qui est le quotient algébro-géométrique (voir **[MF]**, et **[CS]** pour une description simple) de l'ensemble algébrique affine complexe $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))$ des morphismes de groupes de $\pi_1 S$ dans $SL_2(\mathbb{C})$, par l'action par conjugaison au but de $SL_2(\mathbb{C})$. Pour tout γ dans $\pi_1 S - \{1\}$, l'application polynomiale de $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))$ dans $\mathbb{C}$, définie par $\rho \mapsto \mathrm{trace}\ \rho(\gamma)$, induit une application $f_\gamma : X \to \mathbb{C}$, indépendante de la classe de γ dans l'ensemble $\mathcal{C}$ des classes de conjugaison d'éléments non triviaux de $\pi_1 S$. Si $\widehat{X}$ est le compactifié d'Alexandrov de X, alors Morgan et Shalen **[MS1]** montrent que l'application de X dans $\widehat{X} \times \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, définie par $x \mapsto (x, \mathbb{R}_+^*(\log(|f_\gamma(x)| + 2))_{\gamma\in\mathcal{C}})$, est un homéomorphisme sur son image, qui est ouverte dans son adhérence, et d'adhérence compacte. L'espace de Teichmüller de S est homéomorphe, de manière équivariante par $\mathrm{Mod}(S)$, à une composante connexe de l'ensemble des points réels d'une composante irréductible X de $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, SL_2(\mathbb{C}))//SL_2(\mathbb{C})$. Morgan et Shalen obtiennent ainsi une compactification naturelle de $\mathrm{Teich}(S)$. Il n'est pas difficile de montrer avec cette définition qu'elle est isomorphe à la compactification de Thurston. Morgan et Shalen **[MS1]** montrent aussi (en version plus élaborée) que tout point du bord est de la forme $(\infty, \mathbb{R}_+^*(\max\{0, -v(f_\gamma)\})_{[\gamma]\in\mathcal{C}})$ où ∞ est le point à l'infini de $\widehat{X}$ et $v : F^\times \to \mathbb{R}$ est une valuation réelle (pas forcément discrète) sur le corps des fonctions F de X, ainsi que de la forme
$$(\infty, \mathbb{R}_+^*(\min_{x\in T} d(x, \gamma x))_{[\gamma]\in\mathcal{C}})$$

où T est un arbre (réel) muni d'une action isométrique de $\pi_1 S$, construit à partir de l'arbre de Bruhat-Tits de SL_2 sur le corps valué (F, v). Le passage des feuilletages transversalement mesurés sur S aux actions de $\pi_1 S$ sur des arbres (réels) se fait par la notion d'arbre dual, développée dans [**MO, MS2**], voir aussi [**Sko, Ota, LP**] par exemple.

- **La compactification naturelle de Bestvina** [**Bes1**] **et de l'auteur** [**Pau1, Pau2**], qui est isomorphe à celle de Thurston. La présentation ci-dessous, utilisant la topologie de Gromov équivariante, correspond à une partie non publiée de la thèse de l'auteur [**Pau1**], mais il est possible de la retrouver aussi en partie dans la littérature actuelle (voir par exemple [**Ota, Kap**]).

- **La compactification naturelle de Brumfiel** [**Bru**], voir aussi [**Bouz**]. Elle utilise comme celle de Morgan-Shalen la description algébrique de l'espace de Teichmüller, avec de plus la théorie du spectre réel des anneaux commutatifs. La compactification de Thurston est l'image par une surjection continue, équivariante par $\mathrm{Mod}(S)$, de cette compactification.

- **La compactification naturelle de Bonahon** par les courants géodésiques [**Bon1**], qui est isomorphe à celle de Thurston. Le plongement fonctionnel de Thurston de l'espace de Teichmüller, décrit ci-dessous, n'est sans doute pas le plus intéressant du point du vue analytique. Le plongement de Bonahon [**Bon1**] semble plus approprié au calcul infinitésimal (voir [**Bon2, Bon3**]). Ce plongement est défini de la manière suivante. Soit $\partial\widetilde{S}$ le bord à l'infini de $\widetilde{S}$ pour la métrique $\widetilde{\sigma}_0$, relevée par un revêtement universel $\widetilde{S} \to S$ d'une métrique hyperbolique fixée σ_0 sur S, muni de son action du groupe de revêtement $\pi_1 S$. Remarquons qu'à homéomorphisme équivariant près, cet espace ne dépend pas de la métrique choisie σ_0. Notons $\partial_2\widetilde{S}$ l'espace topologique (métrisable séparable) localement compact des paires de points distincts de $\partial\widetilde{S}$, muni de l'action diagonale de $\pi_1 S$, et

$$\mathcal{M}(\partial_2\widetilde{S})_{\pi_1 S}$$

l'espace vectoriel topologique (pour la topologie vague) des mesures de Radon $\pi_1 S$-invariantes sur $\partial_2 \widetilde{S}$. Pour tout élément σ de Teich(S), le fibré unitaire tangent de la métrique relevée (d'un représentant) de σ sur $\widetilde{S}$, quotienté par le changement de signe $v \mapsto -v$, s'envoie dans $\partial_2 \widetilde{S}$ par la fibration principale, de fibre $\mathbb{R}$ pour l'action du flot géodésique, qui à un vecteur unitaire tangent associe la paire d'extrémités de la géodésique qu'il dirige. Le relevé à $T^1\widetilde{S}$ de la mesure de Liouville de (S, σ), qui est invariant par le flot géodésique, donne donc un élément λ_σ de $\mathcal{M}(\partial_2 \widetilde{S})_{\pi_1 S}$. Le plongement de Bonahon est l'application $\sigma \mapsto \lambda_\sigma$ de Teich(S) dans $\mathcal{M}(\partial_2 \widetilde{S})_{\pi_1 S}$. La compactification de Bonahon est alors obtenue en projectifiant et en prenant l'adhérence.

- Pour des surfaces particulières, il existe d'autres compactifications bien étudiées, telle la **compactification de Maskit** de Teich(S) si S est un tore privé d'un point (voir par exemple [**KS**], ses dessins et ses références).

Il n'est pas connu de l'auteur si deux compactifications de Teichmüller de Teich(S) ni si deux compactifications de Bers de Teich(S) (pour deux choix de structures de surface de Riemann non isomorphes sur S) sont isomorphes ou non. Il est montré dans [**Ker**] (voir aussi [**Mas**]) que la compactification de Thurston n'est isomorphe à aucune compactification de Teichmüller. Certes, le bord de Teichmüller s'envoie continûment dans le bord de Thurston par l'application qui à une forme différentielle quadratique holomorphe associe son feuilletage transversalement mesuré horizontal (voir par exemple [**Gar**]). Mais cette application ne s'étend pas continûment en un isomorphisme de la compactification de Teichmüller considérée sur celle de Thurston. Il est montré dans [**KT**] (voir aussi [**Bro**]) que la compactification de Thurston n'est pas isomorphe à au moins l'une des compactifications de Bers (parce que pour au moins un des plongements de Bers de l'espace de Teichmüller, l'action du groupe modulaire ne s'étend pas au bord).

+ ——————————— +

Après cette disgression, entrons dans le vif du sujet. Soit X un espace topologique localement compact (respectivement un espace topologique localement compact muni d'une action par homéomorphismes d'un groupe G). Une *compactification* (respectivement *compactification naturelle*) de X est un couple (i, Y) (ou par abus Y) où Y est un espace topologique compact, et $i : X \to Y$ un homéomorphisme sur son image, (par lequel on identifie X et son image dans Y) d'image ouverte et dense, (respectivement un tel couple (i, Y) tel que l'action de G sur X s'étende continuement en une action par homéomorphismes de G sur Y). Deux compactifications (respectivement compactifications naturelles) Y, Y' de X sont *isomorphes* si l'identité de X dans X s'étend continuement en un homéomorphisme (respectivement un homéomorphisme équivariant pour les actions de G) de Y dans Y'.

Par exemple, les compactifications d'Alexandrov et de Stone-Čech (voir par exemple [**Dug**]) d'un espace localement compact X sont naturelles pour l'action du groupe G de tous les homéomorphismes de X. Outre sa naturalité, l'intérêt de la compactification de Thurston des espaces de Teichmüller est qu'elle apporte des informations intéressantes sur les dégénérescences géométriques des structures hyperboliques sur les surfaces.

Rappelons qu'une métrique riemannienne sur S est une section C^∞ du fibré, noté $\otimes^2 T^*S$, des formes bilinéaires sur les espaces tangents aux points de S, qui est symétrique et définie positive sur chaque fibre. Une *métrique hyperbolique* est une métrique riemannienne à courbure sectionnelle constante -1 (voir [**GHL**]). Soit $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ le modèle du demi-espace supérieur du plan hyperbolique réel, et $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$ le groupe des isométries préservant l'orientation de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. L'action par homographies de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ induit un isomorphisme (de groupes de Lie) de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm\mathrm{Id}\}$ avec $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$, par lequel nous identifions $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$.

Soit S une surface compacte (sans bord) connexe orientée de classe C^∞ privée d'un nombre fini de points, et de caractéristique d'Euler strictement négative. En particulier, S admet au moins une métrique hyperbolique complète de volume fini (voir par exemple [**FLP, Bus**]). Tout point enlevé de S admet un voisinage isométrique au quotient du sous-espace des points du demi-plan supérieur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ d'ordonnée au moins 1 par le sous-groupe engendré par une translation (euclidienne) horizontale de vecteur de longueur 2 (voir [**Bus**, page 111]). Notons $\widetilde{S} \to S$ un revêtement universel de S, et $\pi_1 S$ son groupe des automorphismes de revêtement, qui, pour un choix fixé de point base dans $\widetilde{S}$, s'identifie au groupe fondamental de S en l'image x_0 de ce point base dans S. Un élément de $\pi_1 S - \{1\}$ sera dit *parabolique* s'il est représentable par un lacet librement homotopable dans tout voisinage de l'un des points enlevés de S.

Notons $\mathrm{Diff}(S)$ le groupe des difféomorphismes f de classe C^∞ de S, muni de la topologie C^∞ (voir par exemple [**Hir**]), et $\mathrm{Diff}_0(S)$ le sous-groupe distingué ouvert des difféomorphismes de S isotopes à l'identité. Tout difféomorphisme f de S induit un isomorphisme de groupes de $\pi_1(S, x_0)$ dans $\pi_1(S, f(x_0))$, donc (par changement de point base, possible par connexité) un isomorphisme $f_* : \pi_1 S \to \pi_1 S$ bien défini modulo conjugaison. De plus, si f est isotope à l'identité, alors $f_* : \pi_1 S \to \pi_1 S$ est une conjugaison.

Notons $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ l'ensemble des métriques hyperboliques σ sur S, complètes et de volume fini, muni de la topologie induite par la topologie C^∞ sur $\mathrm{C}^\infty(S, \otimes^2 T^* S)$. Le groupe $\mathrm{Diff}(S)$ agit sur $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ par l'action naturelle sur les champs de tenseurs sur S

$$(f, \sigma) \mapsto \big(\, f_*\sigma : x \in S \mapsto \{(u, v) \in (T_x S)^2 \mapsto \\ \sigma_{f^{-1}(x)}((T_x f)^{-1}(u), (T_x f)^{-1}(v))\}\,\big)$$

L'*espace de Teichmüller* $\mathrm{Teich}(S)$ de S est l'espace topologique quotient de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ par l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$. Le *groupe modulaire de Teichmüller* (ou " mapping class group ") de S est le groupe discret quotient

$$\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}(S)/\mathrm{Diff}_0(S)\ .$$

L'action de $\mathrm{Diff}(S)$ sur $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ induit une action du groupe modulaire de Teichmüller de S sur l'espace de Teichmüller de S. Par abus, nous noterons de la même manière un élément σ de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ et son image dans $\mathrm{Teich}(S)$, ainsi qu'un élément σ de $\mathrm{Teich}(S)$ et l'un de ses relevés dans $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$. Notons $\mathrm{Diff}_+(S)$ le sous-groupe de $\mathrm{Diff}(S)$ préservant l'orientation et $\mathrm{Mod}_+(S) = \mathrm{Diff}_+(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$.

Par le théorème de caractérisation des variétés riemanniennes complètes simplement connexes à courbure sectionnelle constante -1 (voir par exemple [**GHL**, page 135]), pour tout élément σ de $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$, il existe une isométrie i préservant l'orientation entre le relevé $\widetilde{\sigma}$ au revêtement universel orienté de S de la métrique σ et le plan hyperbolique réel $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. La conjugaison par une telle isométrie i fournit une *représentation fidèle et discrète* (i.e. un morphisme de groupes injectif d'image discrète) $\rho = \rho_\sigma : \pi_1 S \to \mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, appelée une *représentation d'holonomie* de σ, et cette isométrie i induit par passage au quotient une isométrie préservant l'orientation de (S, σ) sur la variété hyperbolique quotient $\rho(\pi_1 S)\backslash\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. La représentation d'holonomie ρ de σ est indépendante du choix de i modulo conjugaison au but par un élément de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. De plus, ρ *préserve les paraboliques*, i.e. envoie un élément parabolique de $\pi_1 S$ sur un élément parabolique de $\mathrm{Isom}_+(\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}})$, ceci par la structure des bouts des surfaces hyperboliques de volume fini (voir par exemple [**Bus, Rat**]). Pour tout f dans $\mathrm{Diff}(S)$, les représentations $\rho_{f_*\sigma}$ et $\rho_\sigma \circ f_*$ sont conjuguées. En particulier, si σ et σ' sont dans la même orbite sous $\mathrm{Diff}_0(S)$, alors leurs représentations d'holonomie sont conjuguées dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ (car un difféomorphisme isotope à l'identité induit une conjugaison sur $\pi_1 S$).

Considérons l'espace

$$\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$$

des orbites, pour l'action par conjugaison au but de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, des représentations fidèles et discrètes, préservant les paraboliques, de $\pi_1 S$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Munissons-le de la topologie quotient de la topologie de la convergence simple. L'application $(f, \rho) \mapsto \rho \circ f_*$, pour f dans $\mathrm{Diff}(S)$ et $\rho : \pi_1 S \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, induit donc une action par homéomorphismes du groupe $\mathrm{Mod}(S)$ sur l'espace $\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.

On a une application de $\mathrm{Teich}(S)$ à valeurs dans cet espace, qui à σ associe la classe de conjugaison d'une représentation d'holonomie de σ.

Proposition 1. — *(Voir par exemple* [**Gol2**]*) Cette application est un homéomorphisme sur l'une des deux composantes connexes de* $\mathcal{R}_{fdp}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. *Elle est équivariante pour l'action de* $\mathrm{Mod}_+(S)$. □

L'un des points de la preuve de cette proposition est le suivant.

Lemme 2. — *Une limite de représentations fidèles et discrètes, préservant les paraboliques, de $\pi_1 S$ dans* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *est encore fidèle et discrète, préservant les paraboliques.*

Preuve. Soit $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de telles représentations, qui converge vers ρ. Nous renvoyons par exemple à [**GM**] pour le caractère fidèle et la discrétude de ρ. Comme un élément $\pm A$ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est parabolique ou l'identité si et seulement si $|\mathrm{tr}\ A| = 2$, le fait que ρ préserve les paraboliques en découle par continuité de la trace. □

Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des classes de conjugaison des éléments non paraboliques de $\pi_1 S - \{1\}$, qui s'identifie avec l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets de S, homotopiquement non triviaux, et non librement homotopables dans tout voisinage d'un des points enlevés de S. Pour tout α dans $\mathcal{C}$ et tout σ dans $\mathrm{Teich}(S)$, on note $\ell_\sigma(\alpha)$ la longueur de l'unique géodésique fermée pour σ dans la classe d'homotopie libre α (voir par exemple [**Bus**] pour l'existence et l'unicité de cette géodésique). Donc $\ell_\sigma(\alpha)$ est égale à la *distance de translation*

$$\ell_\sigma(\alpha) = \inf_{x\in\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}} d(x, \rho(\gamma)x)$$

de $\rho(\gamma)$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, pour ρ une représentation d'holonomie de σ et pour n'importe quel $\gamma \in \pi_1 S$ dans la classe α. Il n'est pas difficile de montrer que, pour tout γ dans $\mathcal{C}$, l'application $\sigma \mapsto \ell_\sigma(\alpha)$ de $\mathrm{Teich}(S)$ dans $\mathbb{R}$ est continue (un moyen rapide est d'utiliser la proposition 1 ci-dessus et le lemme 6 ci-dessous, mais une preuve plus conceptuelle et au total plus courte est d'utiliser, outre la définition de la topologie de $\mathrm{Teich}(S)$, le lemme de fermeture d'Anosov [**Ano**], enfin une version très simplifiée disant qu'une courbe fermée presque géodésique est à distance de Hausdorff petite d'une géodésique fermée, voir par exemple [**BH**]).

En notant $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, on a donc une application

$$\begin{array}{rccc} \ell: & \mathrm{Teich}(S) & \to & {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\} \\ & \sigma & \mapsto & (\ell_\sigma(\alpha))_{\alpha\in\mathcal{C}} \end{array} .$$

Notons

$$\pi : ({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}) = \big({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}\big) / \sim$$

la projection canonique pour la relation d'équivalence définie par $(x_\alpha)_\alpha \sim (y_\alpha)_\alpha$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $x_\alpha = \lambda y_\alpha$ pour tout α. On munit l'espace produit ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ de la topologie produit, et l'espace quotient $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ de la topologie quotient. Le groupe des difféomorphismes de S agit sur $\mathcal{C}$, par l'application qui à $(f, \alpha) \in \mathrm{Diff}(S) \times \mathcal{C}$ associe la classe d'homotopie libre de $f(\gamma)$ pour n'importe quel lacet γ dans la classe d'homotopie libre α, et l'action de $\mathrm{Diff}_0(S)$ est triviale. Par conséquent $\mathrm{Mod}(S)$ agit sur $\mathcal{C}$, donc agit par homéomorphismes sur ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ par permutation des coordonnées, et donc agit par homéomorphismes sur $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ par passage au quotient.

Théorème 3. — *(W. Thurston* [**Thu1**]*) L'application* $\pi\circ\ell : \mathrm{Teich}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ *est un homéomorphisme sur son image, qui est relativement compacte, et ouverte dans son adhérence. Elle est équivariante pour les actions de* $\mathrm{Mod}(S)$.

Ainsi, le couple $(\pi \circ \ell, \overline{\pi \circ \ell(\mathrm{Teich}(S))}\ )$ est une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$, appelée la *compactification de Thurston* de l'espace de Teichmüller, qui est naturelle pour l'action de $\mathrm{Mod}(S)$.

Dans cet énoncé, nous pourrions remplacer l'ensemble $\mathcal{C}$ par l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets simples, non homotopes à 0, ni librement homotopables dans tout voisinage d'un point enlevé de S, comme dans [**FLP**], ou par l'ensemble de toutes les classes de conjugaison non triviales de $\pi_1 S$, i.e. de toutes les classes d'homotopie libre de lacets non homotopes à 0. Les résultats de [**FLP**] impliquent les deux autres versions dans ce qui suit.

Preuve du théorème 3. Nous n'utiliserons pas l'approche originale de Thurston [**Thu1**] exposée complètement dans [**FLP**], mais celle de [**Bes1, Pau1, Pau2**], aussi présentée sous une forme un peu différente dans [**Ota**]. Voir [**Par**] pour de profondes généralisations.

Nous admettrons (voir par exemple [**FLP, Bus**]) ce qui concerne la description interne de l'espace de Teichmüller, résumé dans le fait suivant.

Théorème 4. — *Il existe un nombre fini* $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ *d'éléments de* $\mathcal{C}$ *(que l'on peut même choisir représentables par des lacets simples) tels que* *l'application* $\mathrm{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^N$ *définie par*

$$\sigma \mapsto (\ell_\sigma(\gamma_1), \dots, \ell_\sigma(\gamma_N))$$

soit continue, injective, propre, donc un homéomorphisme sur son image. En particulier, $\mathrm{Teich}(S)$ *est métrisable, séparable, et localement compact. De plus* $\mathrm{Teich}(S)$ *est homéomorphe à* $\mathbb{R}^{6g-6+2b}$ *si* g *est le genre de* S *et* b *le nombre de points enlevés de* S. □

En particulier, l'application continue $\ell : \mathrm{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ est un homéomorphisme propre sur son image.

Proposition 5. — *L'application* $\pi \circ \ell : \mathrm{Teich}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ *est un homéomorphisme sur son image, équivariant pour les actions de* $\mathrm{Mod}(S)$.

Preuve. (Voir [**FLP**, exposé 7].) Pour montrer l'injectivité de $\pi \circ \ell$, supposons par l'absurde qu'il existe des éléments σ et σ' dans $\mathrm{Teich}(S)$ et $t > 1$ tels que $\ell_{\sigma'} = t\ell_\sigma$. Soient a, b dans $\pi_1 S$ tels que $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b), \rho_\sigma(ab), \rho_\sigma(a^{-1}b)$ soient des éléments hyperboliques, avec $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b)$ d'axes de translation (transversalement) sécants, et tels que $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b)$ se relèvent en des matrices A, B de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telles que les traces $\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(B), \mathrm{tr}(AB), \mathrm{tr}(A^{-1}B)$ soient strictement positives, et de même en remplaçant σ par σ'.

Ceci est possible pour σ, par exemple en fixant a d'image par ρ_σ hyperbolique, et en prenant pour b une puissance N suffisamment grande d'un élément de $\pi_1 S$ d'image par ρ_σ hyperbolique, dont le point attractif de l'image par ρ_σ appartienne à un voisinage épointé U_+ suffisamment petit de celui de a, et le point fixe répulsif appartienne à un voisinage épointé U_- suffisamment petit, et du bon côté, de celui de a. Ceci est possible par densité des couples de points fixes d'éléments hyperboliques de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$ dans l'ensemble des couples de points du bord à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ (voir par exemple [**Gro**] dans un cadre bien plus général). Rappelons que les actions (projectives) de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$ et $\rho_{\sigma'}(\pi_1 S)$ sur le cercle à l'infini $\mathbb{S}^1_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ sont conjuguées, par l'extension continue à l'infini du relevé à $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ de l'application identité de S dans S par les revêtements universels riemanniens $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \to (S, \sigma)$ et $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}} \to (S, \sigma')$ (voir par exemple [**ET**] pour une preuve de cette extension y compris en dimension supérieure, souvent faussement attribuée à Mostow qui s'en sert dans [**Mos**], et qui dans le cas de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ devait être déjà connue). Donc en choisissant N suffisamment grand et U_+, U_- suffisamment petits, on obtient bien les mêmes propriétés pour σ'.

Lemme 6. — *La distance de translation $\ell(A)$ dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ d'un élément hyperbolique A de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ vérifie*

$$\cosh \frac{\ell(A)}{2} = \left|\frac{\mathrm{tr}(A)}{2}\right| .$$

Si A et B sont deux éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{tr}(AB) + \mathrm{tr}(A^{-1}B) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) .$$

Preuve. Le premier résultat découle du fait que A est conjuguée à une matrice de la forme $\pm \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ où $\lambda > 1$, et que la distance de translation de cette matrice vaut $2\log\lambda$ (par unicité d'une géodésique translatée, son axe de translation est l'axe vertical).

Pour montrer le second résultat, le théorème de Cayley-Hamilton implique que

$$A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \mathrm{Id} = 0 ,$$

donc $A + A^{-1} = \mathrm{tr}(A)\mathrm{Id}$, d'où le résultat en multipliant par B à droite et en prenant la trace. $\square$

Maintenant, comme $\ell_{\sigma'} = t\ell_\sigma$, en notant $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$ la distance de translation de $\rho_\sigma(a), \rho_\sigma(b), \rho_\sigma(ab),\ \rho_\sigma(a^{-1}b)$ respectivement, on déduit du lemme précédent que

$$\cosh(\frac{\ell_3}{2})+\cosh(\frac{\ell_4}{2}) = 2\cosh(\frac{\ell_1}{2})\cosh(\frac{\ell_2}{2}) = \cosh(\frac{\ell_1+\ell_2}{2})+\cosh(\frac{\ell_1-\ell_2}{2}) .$$

Le fait suivant est laissé en exercice au lecteur.

Lemme 7. — *Soient u, v, w, x, t des nombres réels strictement positifs, avec $t > 1$, tels que*

$$\cosh u + \cosh v = \cosh w + \cosh x, \quad \cosh tu + \cosh tv = \cosh tw + \cosh tx .$$

Alors $\{u, v\} = \{w, x\}$. $\square$

Maintenant, on aurait, quitte à échanger ab et $a^{-1}b$, l'égalité $\ell_3 = \ell_1 + \ell_2$. Comme les axes de translation (des images par ρ_σ) de a et de b se coupent (transversalement), ceci contredit la minimalité de la distance de translation ℓ_3. L'injectivité de $\pi \circ \ell$ en découle.

Pour terminer la démonstration de la proposition 5, supposons qu'il existe une suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans Teich(S), un élément σ dans Teich(S) et une suite de réels strictement positifs $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$, tels que $t_i\ell_{\sigma_i}$ converge vers ℓ_σ dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$. Si $(t_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeait vers $+\infty$, alors par la propreté dans le théorème 4, quitte à extraire, la suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergerait vers un élément σ' de Teich(S) tel que $\ell_{\sigma'} = 0$, ce qui est impossible. Donc quitte à extraire, t_i converge vers $t \geq 0$. Soit s la borne inférieure des $\ell_\sigma(\alpha)$ pour α dans $\mathcal{C}$, qui est strictement positive, par le lemme de Zassenhauss, voir par exemple [**Rag**], (le lemme de Zassenhauss n'est qu'un cas très particulier (et antérieur) pour les espaces localement symétriques du lemme de Margulis, voir par exemple [**BK**]). Comme le volume de σ_i est constant (égal à $2\pi|\chi(S)|$), la borne inférieure des $\ell_{\sigma_i}(\alpha)$ pour α dans $\mathcal{C}$ est majorée uniformément en i, donc $t > 0$. Par conséquent, la suite $(\ell_{\sigma_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{t}\ell_\sigma$. Par la propreté dans le théorème 4, quitte à extraire, $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément σ' dans Teich(S). Par continuité, nous avons $\ell_{\sigma'} = \frac{1}{t}\ell_\sigma$. Par l'injectivité de $\pi \circ \ell$, nous avons $\sigma' = \sigma$, et $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers σ.

Ceci implique que l'application continue injective $\pi \circ \ell$ est un homéomorphisme sur son image. La naturalité est évidente. □

Soit Γ un groupe, et $\mathcal{E}$ un ensemble d'espaces métriques munis d'une action isométrique de Γ. Pour tout X dans $\mathcal{E}$, pour toute partie finie K de X, pour tout $\epsilon > 0$ et toute partie finie P de Γ, notons $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}(X)$ l'ensemble des éléments X' de $\mathcal{E}$ tels qu'il existe une partie finie K' de X', et une relation $\mathcal{R} \subset K \times K'$, dont les deux projections sur K et K' sont surjectives, telles que

$$\forall\, x, y \in K,\ \forall\, x', y' \in K',\ \forall\, \gamma \in P,\ \text{ si }\ x\,\mathcal{R}\,x' \text{ et } y\,\mathcal{R}\,y' \text{ alors}$$
$$|d(x,\gamma y) - d(x',\gamma y')| < \epsilon\ .$$

La *topologie de Gromov équivariante* sur $\mathcal{E}$ est la topologie sur $\mathcal{E}$ (qui existe, voir [**Pau2**]) dont l'ensemble des $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}(X)$ est un système fondamental de voisinages de X, pour tout X dans $\mathcal{E}$.

Par exemple, l'ensemble $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ s'identifie, par l'application de relèvement $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$, à l'ensemble des métriques hyperboliques complètes sur le revêtement universel $\widetilde{S}$ de S, invariantes par l'action du groupe de revêtement $\pi_1 S$, telles que tout élément parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isométrie parabolique sur $\widetilde{S}$.

Proposition 8. — *(F. Paulin* [**Pau2**, Prop. 6.2]*) La topologie quotient sur* $\mathrm{Teich}(S)$ *de la topologie de Gromov sur* $\widetilde{\mathrm{Teich}}(S)$ *coïncide avec la topologie usuelle de* $\mathrm{Teich}(S)$.

Preuve. Il est immédiat que la topologie de Gromov équivariante quotient est moins fine que la topologie usuelle. En effet, supposons que deux métriques hyperboliques complètes de volume fini sur S soient proches. Alors sur tout compact du revêtement universel de S, les distances riemanniennes relevées sont proches. Ainsi, pour toute partie finie K de $\widetilde{S}$, pour toute partie finie P de $\pi_1 S$ et tout $\epsilon > 0$, si σ' est suffisamment proche de σ dans $\mathrm{Teich}(S)$, alors $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ appartient à $\mathcal{V}_{\epsilon,P,K}((\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}))$.

Réciproquement, montrons que pour tout $\epsilon > 0$ et tout α dans $\mathcal{C}$, si $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ est suffisamment proche de $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma})$ pour la topologie de Gromov équivariante, alors $|\ell_{\sigma'}(\alpha) - \ell_\sigma(\alpha)| < \epsilon$. Comme $\ell : \mathrm{Teich}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ est un homéomorphisme sur son image, ceci montrera le résultat. En effet, soit $\gamma \in \pi_1 S$ un représentant de α, et x un point de l'axe de translation de $\rho_\sigma(\gamma)$. Posons $K = \{x\}$ et $P = \{\gamma, \gamma^2\}$. Si $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$ appartient à $\mathcal{V}_{\eta,P,K}((\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}))$, alors il existe un point x' de $\widetilde{S}$ tel que, en notant $d_{\widetilde{\sigma}'}$ la distance de la variété riemanienne $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma}')$, on ait

$$|d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma x') - \ell_\sigma(\alpha)| < \eta$$

et

$$|d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma x') + d_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma x', \gamma^2 x') - d_{\widetilde{\sigma}'}(x', \gamma^2 x')| < 3\eta\ .$$

Par de petites estimées de géométrie hyperbolique (en fait valable dans n'importe quel espace métrique CAT(-1), comme les arbres (réels) définis ci-dessous, voir par exemple [**BH**]), un chemin géodésique par morceaux, dont la longueur totale est proche (par rapport à la longueur des morceaux) de la distance entre ses extrémités, est proche de la géodésique entre ses extrémités. Ceci implique en itérant par γ que le chemin géodésique par morceaux $c = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [\gamma^n x', \gamma^{n+1}x']$ a ses deux points à l'infini distincts, et est proche de la géodésique $\overline{c}$ entre ces deux points. Comme c est invariante par γ, il en est de même de $\overline{c}$. Ceci implique (ainsi que dans n'importe quel espace métrique CAT(-1), comme les arbres (réels)), lorsque η est assez petit, que $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$ est hyperbolique, que le point x' est proche de l'axe de translation de $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$, et donc que la distance de translation de $\rho_{\widetilde{\sigma}'}(\gamma)$ est proche de celle de $\rho_{\widetilde{\sigma}}(\gamma)$. $\square$

Le résultat clef dans l'étude des dégénérescences de structures hyperboliques sur les surfaces est le théorème 9 suivant, voir **[Bes1, Pau2]**. La preuve de ce théorème est essentiellement tirée de **[Pau4]** (qui donne un résultat bien plus général pour des actions proprement discontinues de groupes de type fini sur des espaces symétriques de type non compact). Donnons d'abord quelques définitions.

Un *arbre (réel)* est un espace métrique T *géodésique* (i.e. pour tous x, y dans T, il existe une isométrie (appelée, ainsi que son image, un *segment géodésique* entre x et y) $[a, b] \to T$ envoyant a sur x et b sur y), et 0-*hyperbolique* (i.e. pour tous x, y, z dans T, pour tous les segment géodésiques $[x, y]$, $[y, z]$, $[x, z]$ entre respectivement x et y, y et z, x et z, le segment $[x, y]$ est contenu dans la réunion $[y, z] \cup [x, z]$).

Rappelons (voir par exemple **[Tit]**) que dans un arbre (réel) T, toute isométrie g ou bien admet un point fixe (et on dit que g est *elliptique* dans T) ou bien T possède une unique droite géodésique (appelée l'*axe de translation* de g) sur laquelle g agit par translation de distance $\ell_T(g) = \min\{d(x, gx) \ : x \in T\} > 0$ (appelée la *distance de translation* de g dans T). Cet axe de translation est construit ainsi : pour tout x dans T, les segments $[x, gx]$ et $[gx, g^2x]$ se rencontrent en un segment $[gx, gu]$ pour $u \in [x, gx]$ par 0-hyperbolicité, et l'axe de translation est alors la réunion des segments d'intérieurs disjoints $[g^k u, g^{k+1}u]$. Toute isométrie de T conjuguée à g possède la même distance de translation que g.

Une action de $\pi_1 S$ sur un arbre (réel) T est dite *à petits stabilisateurs d'arête* si c'est une action isométrique, sans point fixe global, dont les fixateurs des segments géodésiques non réduits à un point sont triviaux ou infinis cycliques, et telle que tout élément parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isométrie elliptique sur T. Ceci est une définition adaptée à la classe des groupes (munis d'une classe de sous-groupes) que nous considérons.

Voir par exemple [**BT, Tit, MS1, MS2, Sha1, Sha2, Mor, Bes2, Pau5, Chi, FJ**] pour plus d'informations sur les arbres (réels).

Pour X un espace métrique de distance d, et $\epsilon > 0$, notons ϵX l'espace métrique $(X, \epsilon d)$.

Théorème 9. — *Soit $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans* $\mathrm{Teich}(S)$*. Alors, quitte à extraire, ou bien $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément σ de* $\mathrm{Teich}(S)$*, ou bien il existe une suite $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs tendant vers* 0*, et un arbre (réel) T muni d'une action à petits stabilisateurs d'arête de $\pi_1 S$, tels que la suite $(\epsilon_i \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_{\sigma_i})$ converge vers T pour la topologie de Gromov équivariante.*

Preuve. Soit $\{s_1, \dots, s_p\}$ une partie génératrice finie de $\pi_1 S$.

Lemme 10. — *(Voir* [**Bes1**]*) $\rho : \pi_1 S \to$* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ *une représentation fidèle et discrète. Alors il existe (au moins) un point x_ρ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ qui minimize la fonction $f_\rho : x \mapsto \max_{1\leq j\leq p} d(x, \rho(s_j)x)$.*

Preuve. Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ telle que $f_\rho(x_i)$ converge vers la borne inférieure de f_ρ sur $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Si x_i reste dans un compact de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$, alors, quitte à extraire, x_i converge vers un point x_ρ qui convient. Sinon, quitte à extraire, x_i converge vers un point à l'infini x, qui est fixe par $\rho(\pi_1 S)$, ce qui est impossible, car le stabilisateur dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'un point à l'infini de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est résoluble, et $\pi_1 S$ contient au moins un groupe libre de rang 2. □

Notons $\rho_i = \rho_{\sigma_i}$, et
$$\lambda_i = \min_{x\in\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}} f_{\rho_i}(x)\ .$$
Fixons $*_i$ un point de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ tel que $f_{\rho_i}(*_i) = \lambda_i$. Alors, quitte à extraire, ou bien la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est bornée, disons par M, ou bien elle converge vers $+\infty$.

Dans le premier cas, quitte à conjuguer ρ_i, nous pouvons supposer que $*_i$ est un point fixé $*_0$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Par compacité de l'ensemble des isométries de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ bougeant $*_0$ d'une distance au plus M, quitte à extraire, les $\rho_i(s_j)$ pour $1 \leq j \leq p$ convergent. Donc la suite $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge, et la proposition 1 montre que la suite $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge (il suffit aussi de remarquer que la suite $(\ell_{\sigma_i})_{i\in\mathbb{N}}$, qui ne dépend que de $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$, converge, et d'utiliser le commentaire suivant le théorème 4).

Supposons maintenant que la suite $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $+\infty$.

Posons $(X_i, d_i) = \frac{1}{\lambda_i}\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$. Soit ω un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$, plus fin que le filtre de Fréchet des complémentaires des parties finies (voir par exemple [**Bou**]). Pour toute suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dans un espace topologique, notons $\lim_\omega x_i$ une limite de cette suite pour le filtre image de ω (voir par exemple [**Bou**]), si elle existe (ce qui est le cas si la suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte; cette limite est alors unique dans une partie compacte (donc séparée) contenant la suite, et c'est une valeur d'adhérence de la suite). Posons

$$X_\infty = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \prod_{i\in\mathbb{N}} X_i \ :\ \lim_\omega d_i(x_i, *_i) < +\infty\}\ ,$$

muni de la pseudo-distance

$$d_\infty(x, y) = \lim_\omega\ d_i(x_i, y_i)\ .$$

Notons $(X_\omega, d_\omega, *_\omega)$ l'espace métrique pointé quotient de $(X_\infty, d_\infty, (*_i)_{i\in\mathbb{N}})$ par la relation d'équivalence définie par $x \sim y$ si x et y sont à pseudo-distance nulle. Pour tout γ dans $\pi_1 S$, l'isométrie $\rho_i(\gamma)$ de $\frac{1}{\lambda_i}\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ bouge le point $*_i$ d'une distance bornée pour la distance d_i (au plus 1 si $\gamma \in \{s_1, \dots, s_p\}$, donc au plus n si γ s'écrit comme un mot de longueur n en $s_1, \dots, s_p$ et leurs inverses). Donc l'action diagonale $(\gamma, (x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \mapsto (\rho_i(\gamma)x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\pi_1 S$ sur X_∞ préserve X_∞, et est isométrique pour la pseudo-distance d_∞, donc induit une action isométrique ρ_ω de $\pi_1 S$ sur X_ω. Il n'est pas difficile de montrer que, pour la topologie de Gromov équivariante,

$$\lim_\omega\ (X_i, d_i, \rho_i) = (X_\omega, d_\omega, \rho_\omega)\ .$$

Un petit calcul de géométrie hyperbolique montre que tout côté d'un triangle géodésique de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}$ est à distance au plus $\log(1+\sqrt{2})$ de la réunion des deux autres côtés. Donc tout côté d'un triangle géodésique de (X_i, d_i) est à distance au plus $\log(1+\sqrt{2})/\lambda_i$ de la réunion des deux autres côtés. C'est alors un exercice (voir par exemple [**KL**]) de montrer que l'espace métrique (X_ω, d_ω) est géodésique, et 0-hyperbolique, donc est un arbre (réel). Le même argument montre que toute limite, pour la topologie de Gromov équivariante, d'une suite d'actions isométriques d'un groupe fixé sur des arbres (réels), est encore une action isométrique de ce groupe sur un arbre (réel).

Lemme 11. — *L'action ρ_ω de $\pi_1 S$ sur l'arbre (réel) X_ω est à petits stabilisateurs d'arête.*

Preuve. Par continuité, le point $*_\omega$ est un point bougé le moins par les générateurs, et il est bougé au moins d'une distance de 1 par l'un des générateurs, donc l'action n'a pas de point fixe global.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux points distincts x et y de X_ω, qui soient fixés par un sous-groupe non trivial, non infini cyclique de $\pi_1 S$. Alors ils sont fixés par des éléments α, β qui engendrent un sous-groupe libre sur α, β dans $\pi_1 S$.

Soit $\eta > 0$, P l'ensemble des mots en α, β de longueur au plus 6, et $K = \{x, y\}$. Pour tout i suffisamment grand (pour l'ultrafiltre ω), le triplet (X_i, d_i, ρ_i) appartient à $\mathcal{V}_{\eta,P,K}((X_\omega, d_\omega, \rho_\omega))$, donc si x est en relation (voir la définition de la topologie de Gromov équivariante) avec $x_i \in X_i$ et y avec $y_i \in X_i$, alors pour tout γ dans P,

$$d_{\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}}(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) \leq \lambda_i \eta \quad \text{et} \quad d_{\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}}(x_i, y_i) \geq \lambda_i (d_\omega(x, y) - \eta) \ .$$

En particulier, si η a été choisi assez petit devant $d_\omega(x, y)$, alors les images par ρ_i de α et β agissent presque comme des translations le long d'un segment de longueur $6\lambda_i\eta$ centré au milieu m du segment géodésique $[x_i, y_i]$. Ceci implique que les images par ρ_i des éléments $[\alpha, \beta], [\alpha, \beta^2]$, qui engendrent un groupe libre discret, bougent le point m d'une distance au plus η. Si η est assez petit, ceci contredit le lemme de Zassenhauss.

Supposons par l'absurde qu'il existe un élément parabolique γ de $\pi_1 S$ qui ne soit pas elliptique dans X_ω. Soit x un point de l'axe de translation de γ dans X_ω. Soient $\eta > 0$, $K = \{x\}$ et $P = \{\gamma, \gamma^2\}$. Alors, pour i suffisamment grand (pour ω), l'élément (X_i, d_i, ρ_i) appartient à $\mathcal{V}_{\eta,P,K}((X_\omega, d_\omega, \rho_\omega))$. Il existe donc x_i dans X_i tel que

$$|d_i(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) - \ell_{X_\omega}(\gamma)| < \eta$$

et

$$|d_i(x_i, \rho_i(\gamma)x_i) + d_i(\rho_i(\gamma)x_i, \rho_i(\gamma^2)x_i) - d_i(x_i, \rho_i(\gamma^2)x_i)| < 3\eta\ .$$

Si η est choisi petit devant $\ell_{X_\omega}(\gamma)$, ceci implique, comme dans la fin de la preuve de la proposition 8, que $\rho_i(\gamma)$ est hyperbolique, ce qui est une contradiction. □

Ceci termine la preuve du théorème 9. □

Si T est un arbre (réel), muni d'une action isométrique du groupe $\pi_1 S$, telle que tout élément parabolique de $\pi_1 S$ soit elliptique dans T, alors notons $\ell_T \in {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$ l'application $\alpha \mapsto \ell_T(g)$ où $g \in \pi_1 S$ appartient à la classe α.

Si $\lim_\omega(X_i, d_i, \rho_i)$ est un arbre (réel) T muni d'une action de isométrique de $\pi_1 S$, alors le même argument que pour montrer la réciproque de la proposition 8 montre que la suite $(\frac{1}{\lambda_i}\ell_{\sigma_i}(\alpha))_{\alpha\in\mathcal{C}}$ converge vers l'élément ℓ_T dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$.

Par métrisabilité de $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, ceci montre que l'image de $\pi \circ \ell$ est d'adhérence compacte. Montrons qu'elle est ouverte dans son adhérence.

Il découle par exemple de **[CM]** que si $(T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'arbres (réels) munis d'une action isométrique de $\pi_1 S$ à petits stabilisateurs d'arête, si la suite $(\ell_{T_i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans ${\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}}$, alors il existe un arbre (réel) T, muni d'une action isométrique de $\pi_1 S$ à petits stabilisateurs d'arête, tel que $\ell = \ell_T$.

Lemme 12. — *Si T est un arbre (réel), muni d'une action isométrique de $\pi_1 S$ à petits stabilisateurs d'arête, et si σ appartient à* Teich(S), *alors $\ell_T \neq \ell_\sigma$.*

Preuve. Il existe (voir par exemple **[CM, Pau3]**) deux éléments g et h de $\pi_1 S$ qui sont hyperboliques dans T et d'axes de translation disjoints. Donc g et h sont des éléments non triviaux, non paraboliques dans $\pi_1 S$, et n'appartiennent pas à un même groupe cyclique. De plus (voir par exemple **[CM, Pau3]**), pour tous n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$, la quantité $\ell_T(g^n h^m) - \ell_T(g^n) - \ell_T(h^m)$ est égale à la distance entre les axes de translation de g et de h dans T, donc est strictement positive et indépendante de n et m.

Notons A_g et A_h les axes de translations de g et h respectivement dans $(\widetilde{S}, \widetilde{\sigma})$. S'ils sont disjoints dans $\widetilde{S}$, alors ils n'ont pas de point commun à l'infini par discrétude de $\rho_\sigma(\pi_1 S)$, et d'après [**Bea**, Theo. 7.38.3], pour tous n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$ avec $|n|$ et $|m|$ assez grands,

$$\cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n h^m) = \left| \cosh d(A_g, A_h) \; \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \; \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) + \epsilon \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \; \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) \right| ,$$

où ϵ vaut $+1$ ou -1 suivant que g^n et h^m translatent dans la même direction ou pas. Si A_g et A_h se rencontrent dans $\widetilde{S}$, comme g et h ne sont pas dans un même groupe cyclique, leurs axes de translation se coupent avec un angle θ tel que $0 < \theta < \pi$, et d'après [**Bea**, Theo. 7.38.6],

$$\cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n h^m) = \epsilon \cos\theta \; \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \; \sinh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) + \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(g^n) \; \cosh \frac{1}{2}\ell_\sigma(h^m) ,$$

où ϵ vaut $+1$ ou -1 suivant que θ mesure l'angle entre les points attractifs de g^n et de h^m ou l'angle entre le point attractif de g^n et le point répulsif de h^m. Si $\ell_T = \ell_\sigma$, alors ces deux formules contredisent le fait que

$$\ell_\sigma(g^n h^m) - \ell_\sigma(g^n) - \ell_\sigma(h^m)$$

soit indépendants de n, m dans $\mathbb{Z} - \{0\}$. $\square$

Puisque $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ est métrisable, ce lemme et l'alinéa le précédant montrent que l'image de $\pi \circ \ell$ est ouverte dans son adhérence, car ils impliquent que pour toute suite convergente dans la frontière de l'image, sa limite n'est pas dans l'image.

Le théorème 3 en découle. $\square$

+ ——————— +

Montrons maintenant comment construire la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller directement par la topologie de Gromov équivariante.

Soit $\mathrm{Hyp}(S)$ l'ensemble des classes d'isométrie équivariante de couples (X, α), où X est une variété riemannienne complète simplement connexe de dimension 2 à courbure sectionnelle strictement négative constante, et $\alpha : \pi_1 S \times X \to X$ une action propre et libre de $\pi_1 S$ sur X telle que tout élément parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isométrie parabolique sur X. Munissons $\mathrm{Hyp}(S)$ de la topologie de Gromov équivariante.

Soit $\mathrm{Arb}(S)$ l'ensemble des classes d'isométrie équivariante de couples (X, α), où X est un arbre (réel) et α une action isométrique de $\pi_1 S$ sur X, à petits stabilisateurs d'arête (donc en particulier sans point fixe global, et telle que tout élément parabolique de $\pi_1 S$ agisse par une isométrie elliptique sur X), et *minimale* (i.e. sans sous-arbre invariant propre non trivial). (Cet ensemble porte d'autres noms dans la littérature, voir par exemple **[CM, Sha1, Sha2, Bes2, Mor, Pau4]**). Munissons $\mathrm{Arb}(S)$ de la topologie de Gromov équivariante.

Munissons l'ensemble somme disjointe $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ de la topologie de Gromov équivariante, qui induit sur chacun des sous-ensembles $\mathrm{Hyp}(S)$ et $\mathrm{Arb}(S)$ leur topologie de Gromov équivariante. L'action de $\mathrm{Mod}(S)$ sur cet ensemble, définie par l'application

$$(f, (X, \alpha)) \mapsto (X, \alpha \circ (f_* \times \mathrm{id}))\ ,$$

est une action par homéomorphismes. Le groupe topologique $\mathbb{R}_+^*$ agit continûment sur $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ par l'application $(t, (X, \alpha)) \mapsto (tX, \alpha)$, et les actions de $\mathbb{R}_+^*$ et de $\mathrm{Mod}(S)$ commutent. Notons

$$\mathrm{K}(S) = (\,\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)\,)\,/\,\mathbb{R}_+^*$$

l'espace topologique quotient, muni de l'action quotient de $\mathrm{Mod}(S)$. La projection canonique $p : \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S) \to \mathrm{K}(S)$ est ouverte. Notons $\Theta : \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S) \to {\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}} - \{0\}$ l'application définie par

$$(X, \alpha) \mapsto ([\gamma] \mapsto \min\{d(x, \alpha(\gamma, x))\ : x \in X\})\ ,$$

qui est équivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$, et $\overline{\Theta} : \mathrm{K}(S) \to \mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$ l'application obtenue par passage au quotient, qui est aussi équivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$.

Notons $\iota : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$ l'application définie par $\sigma \mapsto (\mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_\sigma)$, et $\overline{\iota} : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{K}(S)$ l'application quotient, qui est équivariante pour les actions de $\mathrm{Mod}(S)$.

Théorème 13. — *(F. Paulin* **[Pau1]***) L'espace* $\mathrm{K}(S)$ *est métrisable compact. L'application* $\overline{\iota} : \mathrm{Teich}(S) \to \mathrm{K}(S)$ *est un homéomorphisme sur son image, celle-ci étant ouverte et dense dans* $\mathrm{K}(S)$. *Donc* $(\,\overline{\iota}, \mathrm{K}(S)\,)$

est une compactification de Teich(S) *naturelle pour le groupe modulaire* Mod(S).

L'application $\overline{\Theta} : \mathrm{K}(S) \to \mathbb{P}(\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{C}})$ *est un homéomorphisme sur son image, telle que* $\overline{\Theta} \circ \overline{\iota} = \pi \circ \ell$*, donc la compactification naturelle ci-dessus est isomorphe à la compactification de Thurston.*

En utilisant les travaux d'A. Parreau [**Par**], un résultat semblable pour des espaces symétriques de type non compact est possible (sauf peut-être la densité de l'image). Voir aussi [**Wol**] pour une compactification analogue pour les autres composantes connexes du quotient algébro-géométrique $\mathrm{Hom}(\pi_1 S, \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))//\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ que celles correspondant à l'espace de Teichmüller.

Preuve. D'après un théorème d'Urysohn (voir par exemple [**Dug**] page 233), pour montrer qu'un espace topologique Y est métrisable compact, il suffit de montrer qu'il est séparé, à base dénombrable d'ouverts, et *séquentiellement compact* (i.e. que de toute suite (dénombrable) dans Y, on peut extraire une sous-suite convergente).

Munissons $\mathbb{R}_+^* \times$ Teich(S) de la topologie produit des topologies usuelles, et de l'action par homéomorphismes évidente de $\mathbb{R}_+^*$, définie par $t \cdot (t', \sigma) = (tt', \sigma)$, ainsi que celle de Mod$(S)$, définie par $f \cdot (t', \sigma) = (t', f \cdot \sigma)$. En utilisant la proposition 8, il n'est pas difficile de montrer que l'application de $\mathbb{R}_+^* \times$ Teich(S) dans Hyp(S), qui à (λ, σ) associe $(\lambda \mathbb{H}^2_{\mathbb{R}}, \rho_\sigma)$ est un homéomorphisme. Elle induit par passage au quotient un homéomorphisme de Teich(S) sur $p(\mathrm{Hyp}(S))$ équivariant pour les actions de Mod(S). En particulier, $p(\mathrm{Hyp}(S))$ est séparable.

Il est montré dans [**Pau4**] que l'application de Arb(S) dans $\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{C}} - \{0\}$, qui à T associe ℓ_T, est un homéomorphisme sur son image (pour la continuité, c'est encore l'argument de la fin de la proposition 8. Elle commute avec les actions de $\mathbb{R}_+^*$ et de Mod(S). (En fait, dans cette référence [**Pau4**], on ne demandait pas que les distances de translation des éléments paraboliques de $\pi_1 S$ soient nulles, et on avait $\pi_1 S$ à la place de $\mathcal{C}$, on travaillait avec des groupes plus généraux que $\pi_1 S$, mais le résultat énoncé ci-dessus découle de ce cas général.) Donc l'application $T \mapsto \ell_T$ induit un homéomorphisme sur son image de $p(\mathrm{Arb}(S))$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}_+{}^{\mathcal{C}})$, et son image est métrisable. Par une preuve de même schéma que celle du théorème 9, il est facile de montrer que $p(\mathrm{Arb}(S))$ est séquentiellement compact : l'analogue du lemme 10 est obtenu par le fait qu'une action à petits stabilisateurs d'arête de $\pi_1 S$ sur un arbre (réel) ne fixe pas de point à l'infini de l'arbre (voir par exemple [**CM, Pau3**]); si (T_i, d'_i, ρ_i) est une suite dans $\mathrm{Arb}(S)$ et $\lambda_i = \min_{x\in T_i} \max_{1\leq j\leq p} d(x, s_j x)$, alors on pose $(X_i, d_i) = (T_i, \frac{1}{\lambda_i} d'_i)$, de sorte que (X_i, d_i, ρ_i) appartienne à $\mathrm{Arb}(S)$, et le triplet $(X_\omega, d_\omega, \rho_\omega)$ construit de manière analogue est un arbre réel muni d'une action isométrique de $\pi_1 S$, limite suivant le filtre ω pour la topologie de Gromov équivariante de la suite des (X_i, d_i, ρ_i); et l'analogue de la première contradiction dans la preuve du lemme 11 (la seconde est analogue) est obtenue par le fait que si η est assez petit, alors $[\alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta^2]$ fixent un segment non trivial dans un arbre approchant. Donc $p(\mathrm{Arb}(S))$ est métrisable compact (et en particulier séparable). (Voir [**Pau2**] pour une autre preuve; on retrouvait ainsi dans [**Pau2**] la compacité de l'image de $p(\mathrm{Arb}(S))$ dans $\mathbb{P}({\mathbb{R}_+}^{\mathcal{C}})$, ce qui est un résultat de [**CM**, Theo. 5.3].)

Tout arbre (réel) muni d'une action d'un groupe qui est isométrique, sans point fixe global et minimale, est réunion de ses axes de translation (voir par exemple [**CM**]), donc est séparable si le groupe est dénombrable. Dans tout ensemble $\mathcal{E}$ d'espaces métriques séparables munis d'une action isométrique d'un groupe dénombrable Γ, tout élément X possède un système fondamental dénombrable de voisinages pour la topologie de Gromov équivariante, puisqu'il suffit de prendre les $V_{\epsilon,K,P}(X)$ pour ϵ dans $\mathbb{Q}$ et K une partie (finie) d'une partie dénombrable dense fixée de X. Comme p est ouverte, tout élément de l'espace $\mathrm{K}(S)$ admet donc un système fondamental dénombrable de voisinages. L'espace $\mathrm{K}(S)$ est de plus séparable, car $p(\mathrm{Hyp}(S))$ et $p(\mathrm{Arb}(S))$ le sont. Donc il est à base dénombrable d'ouverts.

Par un argument similaire à celui de la réciproque dans la preuve de la proposition 8, l'application Θ est continue. Donc $\overline{\Theta}$ est continue. Elle est injective, car injective en restriction à $p(\mathrm{Hyp}(S))$ et $p(\mathrm{Arb}(S))$, et par le lemme 12. Comme $\overline{\Theta}$ est continue, injective à valeurs dans un espace séparé, l'espace $\mathrm{K}(S)$ est séparé. (Voir aussi [**Pau1**, Chap. IV.2] pour une preuve directe de la séparation de la topologie de Gromov équivariante sur l'ensemble $\mathrm{Hyp}(S) \sqcup \mathrm{Arb}(S)$.)

Remarquons que si une suite d'actions isométriques de $\pi_1 S$ sur des espaces métriques converge, pour la topologie de Gromov équivariante, vers un arbre (réel) muni d'une action sans point fixe global, elle converge aussi pour la topologie de Gromov équivariante vers tout sous-arbre invariant, et en particulier vers son unique sous-arbre minimal (qui est la réunion de ses axes de translation, voir par exemple [**CM, Pau3**]).

L'espace $\mathrm{K}(S)$ est séquentiellement compact, car $p(\mathrm{Arb}(S))$ l'est, et par le théorème 9 et la remarque ci-dessus.

Par le théorème d'Urysohn suscité, $\mathrm{K}(S)$ est donc compact. L'application $\overline{\Theta}$, qui est continue injective d'un espace compact dans un espace séparé, est donc un homéomorphisme sur son image. Comme $p(\mathrm{Arb}(S))$ est compact dans $\mathrm{K}(S)$ séparé (ou parce qu'une limite d'une suite d'actions isométriques d'un groupe fixé sur des arbres (réels) est encore une action isométrique de ce groupe sur un arbre (réel)), le sous-espace $p(\mathrm{Arb}(S))$ est fermé, et donc $p(\mathrm{Hyp}(S))$ est ouvert. Donc $\overline{\iota}$ est un homéomorphisme sur son image. Par un théorème de Skora [**Sko**] (voir aussi [**Ota**], ce résultat n'était pas disponible au moment de l'écriture de [**Pau1**]), l'image de $\overline{\iota}$ est dense dans $\mathrm{K}(S)$. Par conséquent, le couple $(\,\overline{\iota},\, \mathrm{K}(S)\,)$ est bien une compactification de $\mathrm{Teich}(S)$. La naturalité et la relation $\overline{\Theta}\circ\overline{\iota} = \pi\circ\ell$ étant claires par construction, le résultat en découle. □

Nous n'avons décrit dans ces notes que l'aspect topologique de la compactification de Thurston de l'espace de Teichmüller. Une interprétation des points du bord comme des feuilletages transversalement mesurés (ou des laminations géodésiques transversalement mesurées), duale à l'interprétation par les arbres réels, est cruciale pour de plus amples informations (voir par exemple [**FLP, Bon3**]).

Références

[Abi] W. Abikoff, *Real analytic theory of Teichmüller space*, Lect. Notes in Math. **820**, Springer Verlag, 1980.

[Ano] D.V. Anosov, *Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature*, Proc. Steklov Inst. Math., Amer. Math. Soc., 1969.

[Bea] A. Beardon, *The geometry of discrete groups*, Springer-Verlag, 1983.

[Ber] L. Bers, *On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups, I*, Ann. of Math. **91** (1970) 570–600.

[Bes1] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56** (1988) 143-161.

[Bes2] M. Bestvina, $\mathbb{R}$*-trees in topology, geometry, and group theory*, Handbook of geometric topology, 55–91, North-Holland, 2002.

[Bon1] F. Bonahon, *The geometry of Teichmüller space via geodesic currents*, Inv. Math. **92** (1988) 139-162.

[Bon2] F. Bonahon, *Geodesic laminations with transverse Hölder distributions*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **30** (1997) 205-240.

[Bon3] F. Bonahon, *Closed curves on surfaces*, Univ. South. Calif., livre en préparation.

[Bou] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.

[Bouz] T. Bouzoubaa, *Compactification via le spectre réel d'espaces des classes de représentations dans* $SO(n,1)$, Ann. Inst. Four. (Grenoble) **44** (1994) 347-385,

[BH] M.R. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces with non-positive curvature*, Grund. math. Wiss. **319**, Springer Verlag (1998).

[Bro] J. Brock, *Iteration of mapping classes on a Bers slice: examples of algebraic and geometric limits of hyperbolic* 3*-manifolds*, Lipa's legacy (New York, 1995), 81–106, Contemp. Math. **211**, Amer. Math. Soc. 1997.

[BT] F. Bruhat, J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local (données radicielles valuées)*, Pub. Math. I.H.E.S. **41** (1972), 5-252.

[Bru] G. Brumfiel, *The real spectrum compactification of Teichmüller space*, in "Geometry of group representations (Boulder 1987)", Contemp. Math. **74**, Amer. Math. Soc. (1988) 51-75.

[Bus] P. Buser, *Geometry and spectra of compact Riemann Surfaces*, Prog. Math. **106**, Birkhaüser, 1992.

[BK] P. Buser, H. Karcher, *Gromov's almost flat manifolds*, Astérisque **81**, Soc. Math. France, 1981.

[CEG] R. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, in "Analytical and geometric aspects of hyperbolic space", D.B.A. Epstein ed., p. 3-92 Lond. Math. Soc. Lect. Notes Series **111**, Cambridge Univ. Press, 1987.

[Chi] I. Chiswell, *Introduction to* Λ*-trees*, World Scientific, 2001.

[CM] M. Culler, J. Morgan, *Groups actions on* $\mathbb{R}$*-trees*, Proc. Lond. Math. Soc. **55** (1987) 571-604.

[CS] M. Culler, P.B. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, Ann. of Math. **117** (1983) 109-146.

[Dug] J. Dugundji, *Topology*, Brown Pub., 1989.

[EL] J. Eells, L. Lemaire, *Another report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988) 385–524.

[ET] V. Efremovitch, E. Tichonirova, *Equimorphisms of hyperbolic spaces*, Izv. Akad. Nauk. CCCP. **28** (1964) 1139-1144.

[FLP] A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque **66-67**, Soc. Math. France 1979.

[FJ] C. Favre et M. Jonsson, *The valuative tree*, Lect. Notes in Math. **1853**, Springer Verlag, 2004.

[GHL] S. Gallot, D. Hulin. J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer Verlag, 1990.

[Gar] F.P. Gardiner, *Teichmüller theory and quadratic differentials*, Wiley, 1987.

[Gol1] W. Goldman, *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, dans "Geometry of group representations" (Boulder, 1987), 169–198, Contemp. Math., **74**, Amer. Math. Soc., 1988.

[Gol2] W. Goldman, *Topological components of spaces of representations*, Invent. Math. **93** (1988) 557–607.

[Gol3] W. Goldman, *Convex real projective structures on compact surfaces*, J. Diff. Geom. **31** (1990) 791-845.

[GM] W. Goldman, J. Millson, *Local rigidity of discrete groups acting on complex hyperbolic space*, Inv. Math. **88** (1987) 495-520.

[Gro] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in "Essays in group theory", S. Gersten ed., pp. 75-263, MSRI Pub. **8**, Springer Verlag 1987.

[Hir] M. Hirsch, *Differential topology*, GTM **33**, Springer Verlag, 1976.

[KM] V. Kaimanovich, H. Masur, *The Poisson boundary of Teichmüller space*, J. Funct. Anal. **156** (1998) 301–332.

[Kap] M. Kapovich, *Hyperbolic manifolds and discrete groups*, Prog. Math. **183**, Birkhäuser, 2001.

[KL] M. Kapovich, B. Leeb, *On asymptotic cones and quasi-isometry classes of fundamental groups of* 3*-manifolds*, GAFA **5** (1995) 582-603.

[KS] L. Keen, C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, Topology **32** (1993) 719–749.

[Ker] S. Kerckhoff, *The asymptotic geometry of Teichmüller space*, Topology **19** (1980) 23–41.

[KT] S. Kerckhoff, W. Thurston, *Non continuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space*, Inv. Math. **100** (1990) 25-47.

[LP] G. Levitt, F. Paulin, *Geometric group actions on trees*, Amer. J. Math. **119** (1997) 83-102.

[McM] C. McMullen, *Cusps are dense*, Ann. of Math. **133** (1991) 217–247.

[Mas] H. Masur, *Two boundaries of Teichmüller space*, Duke Math. J. **49** (1982) 183–190.

[MT] K. Matsuzaki, M. Taniguchi, *Hyperbolic manifolds and Kleinian groups*, Oxford Univ. Press, 1998.

[Mor] J. Morgan, *Λ-trees and their applications*, Bull. A.M.S. **26** (1992) 87-112.

[MO] J. Morgan, J.-P. Otal, *Relative growth rate of closed geodesics on a surface under varying hyperbolic structures*, Comm. Math. Helv. **68** (1993) 171-208.

[MS1] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures I*, Ann. of Math. **122** (1985) 398-476.

[MS2] J. Morgan, P. Shalen, *Valuations, trees and degeneration of hyperbolic structures II, III*, Ann. of Math. **127** (1988) 403-519.

[Mos] G.D. Mostow, *Strong rigidity of locally symetric spaces*, Ann. Math. Studies **78**, Princeton Univ. Press, 1973.

[MF] D. Mumford, J. Fogarty, *Geometric invariant theory*, Springer Verlag 1982.

[Nag] S. Nag, *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*, Wiley, 1988.

[Ota] J.-P. Otal, *Le théorème d'hyperbolisation pour les variétés fibrées de dimension 3*, Astérisque **235**, Soc. Math. France (1996).

[Par] A. Parreau, *Dégénérescence de sous-groupes discrets de groupes de Lie semisimples et actions de groupes sur les immeubles affines.* Thèse, Université d'Orsay Jan 2000. (voir aussi *Compactification d'espaces de représentations de groupes de type fini*, prépublication Grenoble 2003).

[Pau1] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Thèse, Université Paris XI (Orsay), Décembre 1987.

[Pau2] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94** (1988) 53-80.

[Pau3] F. Paulin, *The Gromov topology on $\mathbb{R}$-trees*, Topology and its App. **32** (1989) 197-221.

[Pau4] F. Paulin, *Dégénérescence de sous-groupes discrets des groupes de Lie semisimples*, Comp. Rend. Acad. Scien. Paris **324** Sér. I (1997) 1217-1220.

[Pau5] F. Paulin, *Actions de groupes sur les arbres*, Sém. Bourbaki 48ème année (1995-96) n° 808, Astérisque **241** (1997) 97-137.

[Rag] M. Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Verlag, 1972.

[Rat] J. Ratcliffe, *Foundations of hyperbolic manifolds*, GTM **149**, Springer Verlag, 1994.

[Sha1] P. Shalen, *Dendrology of groups : an introduction*, Essays in group theory (S.M. Gersten ed.), pp 265-319 M.S.R.I Pub. **8**, Springer Verlag, 1987.

[Sha2] P. Shalen, *Dendrology and its applications*, in "Group theory from a geometrical viewpoint" (E. Ghys, A. Haefliger, A. Verjovsky eds.), pp 543-616, World Scientific, 1991.

[Sko] R. Skora, *Splittings of surfaces*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996) 605-616.

[Thu1] W. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **19** (1988) 417-432.

[Thu2] W. Thurston, *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton Univ. Press 1997.

[Tit] J. Tits, *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees*, in "Contributions to Algebra: a collection of papers dedicated to Ellis Kolchin", pp. 377-388, H. Bass et al eds, Academic Press 1977.

[Wol1] M. Wolf, *The Teichmüller theory of harmonic maps*, J. Diff. Geom. **29** (1989) 449–479.

[Wol2] M. Wolf, *Harmonic maps from surfaces to* $\mathbb{R}$*-trees*, Math. Z. **218** (1995) 577–593.

[Wol] M. Wolff, *Sur les composantes exotiques des espaces d'actions de groupes de surfaces sur le plan hyperbolique*, thèse, Univ. Grenoble, 2007.

Frédéric Paulin, Département de Mathématiques et Applications, UMR 8553 CNRS, École Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75230 PARIS Cedex 05, FRANCE • Courriel : `Frederic.Paulin@ens.fr`