

# ANALYSE FONCTIONNELLE

INTRODUCTION.....	iii
CHAPITRE I. — GÉOMÉTRIE DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS.....	1
§ 1. <i>Propriétés générales des ensembles convexes</i> .....	1
§ 2. <i>Enveloppes convexes</i> .....	5
§ 3. <i>Théorème de Helly</i> .....	8
§ 4. <i>Théorème de Hahn-Banach</i> .....	10
§ 5. <i>Applications à la dualité des espaces normés</i> .....	16
§ 6. <i>Séparation des ensembles convexes</i> .....	18
§ 7. <i>Points extrémaux</i> .....	21
CHAPITRE II. — L'ESPACE DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT . . . .	25
§ 1. <i>Équicontinuité et convergence dans les espaces d'applications</i> .....	25
§ 2. <i>Théorème d'Ascoli</i> .....	28
§ 3. <i>Analyse dans l'espace des fonctions holomorphes</i> .....	32
§ 4. <i>Approximation uniforme des fonctions continues sur un compact</i> .....	37
§ 5. <i>Théorème d'Urysohn</i> .....	45
CHAPITRE III. — LE THÉORÈME DE BAIRE ET SES APPLICATIONS.....	47
§ 1. <i>Théorème de Baire</i> .....	48
§ 2. <i>Applications à la théorie des fonctions discontinues</i> .....	50
§ 3. <i>Théorème de Banach-Steinhaus</i> .....	52
§ 4. <i>Application à la non-convergence simple des séries de Fourier</i> .....	54
§ 5. <i>Application à la non-convergence uniforme de l'interpolation de Lagrange</i> ..	56
§ 6. <i>Théorème de Banach de l'application ouverte</i> .....	58
CHAPITRE IV. — ALGÈBRES DE BANACH.....	63
§ 1. <i>Notion d'algèbre de Banach</i> .....	64
§ 2. <i>Étude du groupe des inversibles</i> .....	65

§ 3. <i>Spectre d'un élément</i> .....	68
§ 4. <i>Formule du rayon spectral</i> .....	71
§ 5. <i>Calcul fonctionnel holomorphe</i> .....	73
§ 6. <i>Théorème de Shilov sur la décomposition des opérateurs</i> .....	79
§ 7. <i>Fonction exponentielle</i> .....	81
§ 8. <i>Transformation de Gelfand</i> .....	86
§ 9. <i>Théorème de Wiener</i> .....	90
CHAPITRE V. — THÉORIE SPECTRALE DES OPÉRATEURS COMPACTS.....	97
§ 1. <i>Valeurs spectrales et valeurs propres</i> .....	97
§ 2. <i>Notion d'opérateur compact</i> .....	99
§ 3. <i>Propriétés spectrales des opérateurs compacts</i> .....	101
§ 4. <i>Alternative de Fredholm</i> .....	103
§ 5. <i>Cas d'un opérateur compact auto-adjoint</i> .....	105
§ 6. <i>Noyaux de Fredholm itérés et noyau résolvant</i> .....	110
§ 7. <i>Équation intégrale d'Abel</i> .....	113
§ 8. <i>Équations de Sturm-Liouville</i> .....	117
I. <i>Appendices</i> .....	127
§ 1. <i>Appendice 1 : sur quelques espaces de suites</i> .....	127
§ 2. <i>Appendice 2 : sur le lemme de Zorn</i> .....	131
§ 3. <i>Appendice 3 : sur l'espace vectoriel réel sous-jacent à un espace complexe</i> ..	133
<i>Exercices</i> .....	135

## INTRODUCTION

L'instrument qui sert d'intermédiaire entre la théorie et la pratique, entre la pensée et l'observation, est la mathématique ; il construit le pont de liaison et le rend de plus en plus fort. C'est pourquoi toute notre culture actuelle, dans la mesure où elle est basée sur la pénétration intellectuelle et l'appropriation de la nature, trouve son fondement dans les mathématiques.

Déjà, Gallilée disait que la nature ne peut être comprise que par celui qui a appris à connaître son langage et les signes dans lesquels elle nous parle ; mais cette langue est la mathématique, et ses signes sont les figures mathématiques. Kant a déclaré : « J'affirme que dans chaque science de la nature, il n'y a de science que celle qui contient des mathématiques. »

En fait, nous ne maîtrisons pas une théorie scientifique avant d'avoir maîtrisé son noyau mathématique complètement mis à nu. Sans les mathématiques l'astronomie et la physique d'aujourd'hui sont impossibles ; dans leurs parties théoriques ces sciences se fondent avec les mathématiques. Ce sont elles, ainsi que de nombreuses autres applications, qui confèrent aux mathématiques ce qu'elles ont d'aura vis-à-vis du grand public.

Néanmoins, tous les mathématiciens ont refusé de prendre les applications comme point de repère en mathématiques. Gauss parle de l'attrait magique qui a fait de la théorie des nombres la science préférée des premiers mathématiciens, sans parler de la richesse inépuisable par laquelle elle dépasse toutes les autres parties des mathématiques. Kronecker compare les théoriciens des nombres avec les lotophages qui, une fois qu'ils ont goûté à leurs délices, ne peuvent plus jamais s'en passer.

Le grand mathématicien Poincaré s'en est pris avec une acuité frappante à Tolstoï, qui avait déclaré que pratiquer « la science pour la science » était une ineptie. Les réalisations de l'industrie, par exemple, n'auraient jamais vu le jour si seuls les esprits pratiques avaient existé et si elles n'avaient pas été développées par des esprits désintéressés.

L'honneur de l'esprit humain, ainsi que l'affirme Jacobi le célèbre mathématicien de Königsberg, est l'unique objectif de toute science.

Nous ne devons pas croire ceux qui prophétisent aujourd'hui, avec une expression philosophique et un ton supérieur, le crépuscule de la culture et qui acceptent l'*ignorabimus*. Pour nous, il n'y a pas d'*ignorabimus* et, à mon avis, il n'y en a pas non plus dans les sciences naturelles. Au lieu de cet *ignorabimus* insensé, que notre notre slogan soit :

*Nous devons savoir, nous saurons.*

David Hilbert

Allocution (enregistrée) faite le 8 septembre 1930 au congrès de la Gesellschaft der Deutschen Naturforscher und Ärzte, à Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad). Voir :

<https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/david-hilberts-radio-address-introduction>

[Version originale]

Das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten, ist die Mathematik; sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, dass unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet. Schon GALILEI sagt : Die Natur kann nur der verstehen der ihre Sprache und die Zeichen kennengelernt hat, in der sie zu uns redet; diese Sprache aber ist die Mathematik, und ihre Zeichen sind die mathematischen Figuren. KANT tat den Ausspruch : “Ich behaupte, dass in jeder besonderen Naturwissenschaft nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden kann, als darin Mathematik enthalten ist.” In der Tat : Wir beherrschen nicht eher eine naturwissenschaftliche Theorie, als bis wir ihren mathematischen Kern herausgeschält und völlig enthüllt haben. Ohne Mathematik ist die heutige Astronomie und Physik unmöglich; diese Wissenschaften lösen sich in ihren theoretischen Teilen geradezu in Mathematik auf. Diese wie die zahlreichen weiteren Anwendungen sind es, denen die Mathematik ihr Ansehen verdankt, soweit sie solches im weiteren Publikum genießt.

Trotzdem haben es alle Mathematiker abgelehnt, die Anwendungen als Wertmesser für die Mathematik gelten zu lassen. GAUSS spricht von dem zauberischen Reiz, der die Zahlentheorie zur Lieblingswissenschaft der ersten Mathematiker gemacht habe, ihres unerschöpflichen Reichtums nicht zu gedenken, woran sie alle anderen Teile der Mathematik so weit übertrifft. KRONECKER vergleicht die Zahlentheoretiker mit den Lotophagen, die, wenn sie einmal von dieser Kost etwas zu sich genommen haben, nie mehr davon lassen können.

Der grosse Mathematiker POINCARÉ wendet sich einmal in auffallender Schärfe gegen TOLSTOI, der erklärt hatte, dass die Forderung “die Wissenschaft der Wissenschaft wegen” töricht sei. Die Errungenschaften der Industrie zum Beispiel hätten nie das Licht der Welt erblickt, wenn die Praktiker allein existiert hätten und wenn diese Errungenschaften nicht von uninteressierten Toren gefördert worden wären.

Die Ehre des menschlichen Geistes, so sagte der berühmte Königsberger Mathematiker JACOBI, ist der einzige Zweck aller Wissenschaft.

Wir dürfen nicht denen glauben, die heute mit philosophischer Miene und überlegenem Tone den Kulturuntergang prophezeien und sich in dem Ignorabimus gefallen. Für uns gibt es kein Ignorabimus, und meiner Meinung nach auch für die Naturwissenschaft überhaupt nicht. Statt des törichten Ignorabimus heisse im Gegenteil unsere Lösung :

*Wir müssen wissen, Wir werden wissen.*



# Géométrie dans les espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, la notion centrale est celle d'ensemble *convexe*; elle donne prise à l'intuition géométrique. Après les propriétés générales de ces ensembles, nous étudierons les relations entre convexité et dimension (théorèmes de Carathéodory, de Helly). L'énoncé le plus important du chapitre est le théorème de Hahn-Banach; dans sa version analytique, il montre la possibilité de prolonger les formes linéaires continues sans augmenter leur norme, ce qui a des conséquences intéressantes pour la dualité des espaces normés et en théorie de l'approximation. Dans une version géométrique le théorème de Hahn-Banach conduit à l'étude de la séparation des ensembles convexes par des hyperplans. Enfin, un théorème de Krein et Milman permet de reconstituer les ensembles convexes à partir de leurs points extrémaux.

Il s'agit de résultats relativement récents, dont le début remonte aux années vingt; le point culminant de leur histoire reste l'admirable livre du mathématicien polonais Stefan Banach, publié à Varsovie en français en 1932 sous le titre « Théorie des opérateurs linéaires ».

## § 1. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES ENSEMBLES CONVEXES

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  et soit  $A$  une partie de  $E$ .

DÉFINITION 1. — *On dit que  $A$  est convexe si, chaque fois que  $A$  contient deux points  $x$  et  $y$ , elle contient le segment  $[x; y]$ ; autrement dit, si les hypothèses  $x, y \in A$  et  $\lambda$  réel avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ , impliquent la conclusion :  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ .*

Cette définition s'améliore aussitôt en une propriété plus forte :

PROPOSITION 1. — Soit  $A$  convexe. Alors les hypothèses  $x_1, \dots, x_p \in A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ ,  $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_p \geq 0$  et  $\lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1$  impliquent la conclusion

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p \in A.$$

Autrement dit, un ensemble convexe contient tous les barycentres à coefficients positifs de ses sous-ensembles de points. La démonstration est facile, par récurrence sur  $p$ ; essayez de l'écrire avant de lire ce qui suit !

*Preuve.* On fait une récurrence sur  $p$ . Si  $p = 2$ , la proposition n'est autre que la définition de la convexité de  $A$ . Soit  $p > 2$ , et supposons la proposition vraie pour moins de  $p$  points. Si l'un des  $\lambda_i$  était nul, on pourrait supprimer  $x_i$  et l'on n'aurait affaire qu'à moins de  $p$  points; on peut donc supposer tous les  $\lambda_i > 0$ . Puisque  $\frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 + \dots + \lambda_p} = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p &= \lambda_1 x_1 + \frac{1 - \lambda_1}{\lambda_2 + \dots + \lambda_p} (\lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p) \\ &= \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) \left[ \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \dots + \lambda_p} x_2 + \dots + \frac{\lambda_p}{\lambda_2 + \dots + \lambda_p} x_p \right]. \end{aligned}$$

Par l'hypothèse de récurrence, nous avons entre crochets un point, disons  $y$ , de  $A$ , donc

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = \lambda_1 x_1 + (1 - \lambda_1) y$$

est dans  $A$ , par définition de la convexité.  $\square$

Si  $E$  est normé, toute partie convexe  $A$  de  $E$  est connexe, et même connexe par arcs puisque deux points peuvent toujours être joints par un segment contenu dans  $A$ . En particulier, les parties convexes de  $\mathbf{R}$  sont les intervalles (de tout genre).

Dans  $E$  normé, toute boule ouverte

$$B = \{x \in E : \|x - a\| < r\}$$

où  $a \in E$ ,  $r$  réel  $> 0$ , est convexe, car si  $\|x - a\| < r$ ,  $\|y - a\| < r$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\lambda x + (1 - \lambda)y - a\| &= \|\lambda(x - a) + (1 - \lambda)(y - a)\| \\ &\leq \lambda\|(x - a)\| + (1 - \lambda)\|(y - a)\| < \lambda r + (1 - \lambda)r = r. \end{aligned}$$

De même, toute boule fermée est convexe.

Tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$  est convexe, ainsi que, plus généralement, tout *sous-espace affine*

$$V + a = \{x = y + a : y \in V\},$$

où  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $a$  est un vecteur donné de  $E$ .

Sont aussi convexes les *demi-espaces affines* ouverts (resp. fermés)

$$\{x \in E : f(x) > \alpha \text{ (resp. } \geq \alpha)\},$$

où  $\alpha \in \mathbf{R}$ , et  $f$  une forme linéaire sur  $E$  non nulle, sont donnés, car par exemple si  $f(x) > \alpha$ ,  $f(y) > \alpha$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) > \lambda\alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha.$$

À partir d'exemples connus comme convexes, on en fabrique d'autres grâce à l'une ou l'autre des propriétés de permanence énoncées dans la

PROPOSITION 2. — 1° *L'intersection, le produit cartésien l'image directe ou réciproque par application linéaire affine, et (si E est normé) la fermeture, l'intérieur de parties convexes sont encore convexes.*

2° *Si A et B sont des parties convexes dans E et si  $\mu$  et  $\nu$  sont des nombres réels, l'ensemble*

$$\mu A + \nu B = \{\mu a + \nu b : a \in A, b \in B\}$$

*est convexe dans E; en particulier  $A + B$  et  $A - B$  sont convexes.*

Les démonstrations sont faciles, sauf peut-être celle qui concerne l'intérieur. Essayez de les écrire avant de lire ce qui suit !

*Preuve.* Intersections. Il est évident sur la définition que, si  $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille finie ou infinie d'ensembles convexes dans E, alors l'ensemble  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  est convexe. Par exemple, dans E normé, toute intersection de demi-espaces fermés est un convexe fermé. Nous verrons plus tard que la réciproque est vraie : tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.

*Exercice 1.* — Convainquez-vous d'ores et déjà que cet énoncé est vrai dans le cas d'un disque fermé du plan euclidien.

Produits cartésiens. Si  $E_1$  et  $E_2$  sont deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{R}$ , et si  $A_1$  et  $A_2$  en sont des parties convexes respectives, alors l'ensemble

$$A = A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$$

est convexe dans  $E_1 \times E_2$ , car si  $(x_1, x_2)$  et  $(y_1, y_2)$  sont dans A et si on a  $0 \leq \lambda \leq 1$ , alors

$$\lambda(x_1, x_2) + (1 - \lambda)(y_1, y_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2)$$

est encore dans  $A_1 \times A_2 = A$ . Cet énoncé s'étend immédiatement aux produits cartésiens de  $n \geq 2$  ensembles convexes. Par exemple dans  $\mathbf{R}^n$  tout pavé (i.e. tout produit cartésien d'intervalles) est convexe.

Application linéaire affine. Rappelons qu'on appelle *application linéaire affine* de E dans F toute application

$$x \mapsto \psi(x) = \varphi(x) + b,$$

où  $\varphi$  est une application linéaire de E dans F et  $b$  est un vecteur fixé dans F. On vérifie aisément que l'image par  $\psi$  de tout segment  $[x; y]$  dans E est le segment  $[\psi(x); \psi(y)]$  dans F. En effet, pour  $0 \leq \lambda \leq 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \lambda\psi(x) + (1 - \lambda)\psi(y) &= \lambda[\varphi(x) + b] + (1 - \lambda)[\varphi(y) + b] = \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y) + b \\ &= \varphi(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b = \psi(\lambda x + (1 - \lambda)y). \end{aligned}$$

De ce fait, il résulte aussitôt que, si A est convexe dans E, alors  $\psi(A)$  est convexe dans F. Enfin, soit B convexe dans F ; si  $x \in \psi^{-1}(B)$  et  $y \in \psi^{-1}(B)$ , on a :  $\psi([x; y]) = [\psi(x); \psi(y)] \subset B$ , donc  $[x; y] \subset \psi^{-1}(B)$ , ce qui prouve que l'ensemble  $\psi^{-1}(B)$  est convexe.

En particulier, l'image d'un convexe par une homothétie ou une translation est un convexe.

Le second point de la proposition est une conséquence de ce que nous venons de dire, car  $\mu A + \nu B$  est l'image de  $A \times B$  par l'application linéaire  $(x, y) \mapsto \lambda x + \mu y$  de  $E \times E$  dans  $E$ .

Fermeture. Soit  $A$  un convexe dans  $E$  et notons  $\bar{A}$  sa fermeture dans  $E$ . Si  $x \in \bar{A}$ ,  $y \in \bar{A}$  et  $0 \leq \lambda \leq 1$ , il existe une suite  $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$  (resp.  $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ ) dans  $A$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$  (resp.  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = y$ ). Alors :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} x_k + (1 - \lambda) \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (\lambda x_k + (1 - \lambda)y_k)$$

est limite d'éléments de  $A$ , donc appartient à  $\bar{A}$ . Ainsi  $\bar{A}$  est convexe.

Intérieur. Notons  $A^\circ$  l'intérieur de la partie convexe  $A$  : c'est l'ensemble des centres des boules ouvertes contenues dans  $A$ . Soient  $x \in A^\circ$  et  $y \in A^\circ$ . On se donne un point  $m \in ]x; y[$ . Puisque  $x$  est dans  $A^\circ$ , il est le centre d'une boule ouverte  $B_x$  contenue dans  $A$ . L'homothétie de centre  $y$  qui transforme  $x$  en  $m$ , transforme la boule ouverte  $B_x$  en une boule ouverte  $B_m$  centrée en  $m$ , et contenue dans  $A$  car, par raison d'homothétie, tout point de  $B_m$  est sur un segment  $[y; z]$  où  $z \in B_x$  et donc  $z \in A$ . Ainsi  $m \in A^\circ$ .  $\square$

Remarquons que dans cette démonstration, seule l'hypothèse  $y \in A$  (et non  $y \in A^\circ$ ) a servi pour obtenir  $m \in A^\circ$ . On a en fait prouvé le résultat plus fort :

PROPOSITION 3. — Soit  $A$  une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Soient  $x \in A^\circ$  et  $y \in A$ . Alors tout point  $m \in [x; y[$  est dans  $A^\circ$ .  $\square$

Exercice 2. — 1° Améliorer la proposition précédente en supposant seulement  $y \in \bar{A}$ .  
2° Soit  $A$  convexe avec  $A^\circ \neq \emptyset$ . Montrer que  $\bar{A} = \overline{A^\circ}$  et  $A^\circ = (\bar{A})^\circ$ .

Exercice 3. — Soit  $A$  un sous-ensemble convexe compact de  $\mathbf{R}^n$  tel que le point 0 soit dans l'intérieur de  $A$ . Soit la sphère unité  $S = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$ .

1° Montrer que, pour tout  $y \in S$ , la demi-droite d'origine 0 passant par  $y$  coupe la frontière  $\text{Fr}(A) = \bar{A} - A^\circ$  de  $A$  en un point, disons  $\delta(y)$ , et un seul.

2° Montrer que l'application  $y \mapsto \delta(y)$  est une application continue de  $S$  sur  $\text{Fr}(A)$ .

Exercice 4. — Un convexe de  $\mathbf{R}^n$  est dit de dimension  $d$  si le plus petit sous-espace affine le contenant est de dimension  $d$ , i.e. est le translaté d'un sous-espace vectoriel de dimension  $d$ .

1° Prouver qu'une partie convexe  $A$  est de dimension  $n$  si et seulement si son intérieur  $A^\circ$  est non vide.

2° Dédurre de l'exercice 3 que tout convexe compact de dimension  $d$  de  $\mathbf{R}^n$  est homéomorphe à la boule-unité fermé de  $\mathbf{R}^d$ .

## § 2. ENVELOPPES CONVEXES

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ , et soit  $A$  une partie de  $E$ .

DÉFINITION 1. — *Il y a au moins une partie convexe de  $E$  qui contient  $A$ , à savoir  $E$  lui-même. Donc il y a une plus petite partie convexe de  $E$  qui contient  $A$ , à savoir l'intersection de toutes les parties convexes de  $E$  qui contiennent  $A$ . On la nomme l'enveloppe convexe de  $A$ , et on la note  $\text{conv}(A)$ .*

Ainsi définie « de l'extérieur », on peut aussi la définir « de l'intérieur » :

PROPOSITION 1. — *La partie  $\text{conv}(A)$  n'est autre que l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des points de  $A$  ; autrement dit :*

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbf{R}_+, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, p \text{ entier quelconque} \right\}.$$

*Preuve.* Notons provisoirement  $\widehat{A}$  l'ensemble décrit dans l'énoncé. Déjà  $\widehat{A}$  est contenu dans tout ensemble convexe contenant  $A$ , ce qui implique que  $\widehat{A} \subset \text{conv}(A)$ . Pour l'inclusion réciproque, il suffit de voir que  $\widehat{A}$  est convexe. On se donne donc  $x = \sum_i \lambda_i x_i$  et  $y = \sum_j \lambda'_j y_j$  dans  $\widehat{A}$ , ainsi que  $\mu$  tel que  $0 < \mu < 1$ . On a :

$$\mu x + (1 - \mu)y = \mu \sum_i \lambda_i x_i + (1 - \mu) \sum_j \lambda'_j y_j = \sum_i (\lambda_i \mu) x_i + \sum_j \lambda'_j (1 - \mu) y_j,$$

avec  $x_i \in A$ ,  $y_j \in A$ ,  $\lambda_i \mu > 0$ ,  $\lambda'_j (1 - \mu) > 0$  et :

$$\sum_i (\lambda_i \mu) + \sum_j \lambda'_j (1 - \mu) = \mu \sum_i \lambda_i + (1 - \mu) \sum_j \lambda_j = \mu + (1 - \mu) = 1,$$

donc  $\mu x + (1 - \mu)y$  est dans  $\widehat{A}$ , et finalement  $\widehat{A}$  est convexe.  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $P(z)$  un polynôme à coefficients complexes et soit  $P'(z)$  son polynôme dérivé. Montrer que dans  $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$  toute racine de  $P'$  est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de  $P$ .

Supposons maintenant  $E$  normé. Soit  $A$  une partie de  $E$ .

DÉFINITION 2. — *Il y a au moins une partie convexe fermée de  $E$  qui contient  $A$ , à savoir  $E$  lui-même. Donc il y a une plus petite partie convexe fermée de  $E$  qui contient  $A$ , à savoir l'intersection de toutes les parties convexes fermées de  $E$  qui contiennent  $A$ . On la nomme l'enveloppe convexe fermée de  $A$ .*

PROPOSITION 2. — *L'enveloppe convexe fermée de  $A$  est l'adhérence dans  $E$  de l'enveloppe convexe de  $A$ .*

*Preuve.* Cette adhérence est fermée (par définition), convexe (par la proposition 2), et elle contient  $A$ . Si  $B$  est un fermé convexe qui contient  $A$ , alors  $B$  contient  $\text{conv}(A)$ , et donc  $\overline{\text{conv}(A)}$  puisque  $B$  est fermé.  $\square$

Sans ambiguïté, nous pourrions donc noter  $\overline{\text{conv}(A)}$  l'enveloppe convexe fermée de  $A$ .

*Exercice 2.* — Soit  $A$  une partie de  $E$  espace vectoriel réel et normé.

- 1° Si  $A$  est fermée, est-il toujours vrai que  $\text{conv}(A)$  soit fermée ?  
 2° Si  $A$  est ouverte, est-il toujours vrai que  $\text{conv}(A)$  soit ouverte ?

Si  $E$  est de dimension finie, disons  $n$ , on peut considérablement améliorer la proposition 1, en y remplaçant «  $p$  quelconque » par «  $p \leq n+1$  ». C'est le théorème de Caratheodory :  
 THÉORÈME 1 (Caratheodory). — Soit  $A$  une partie de  $\mathbf{R}^n$ . Alors

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i : x_i \in A, \lambda_i \in \mathbf{R}_+, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1, p \leq n+1 \right\}.$$

*Preuve.* Soit  $x$  un point fixé dans  $\text{conv}(A)$ . Il s'écrit de plusieurs façons  $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$  avec  $x_i \in A, \lambda_i \in \mathbf{R}_+, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$  et  $p$  entier quelconque. On choisit une telle écriture avec  $p$  minimal, et on suppose que  $p \geq n+2$  afin d'aboutir à une contradiction.

Les vecteurs  $x_1 - x, x_2 - x, \dots, x_{p-1} - x$  sont en nombre  $p-1 \geq n+1$  donc sont linéairement dépendants : il existe des constantes réelles non toutes nulles  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$  telles que

$$\mu_1(x_1 - x) + \mu_2(x_2 - x) + \dots + \mu_{p-1}(x_{p-1} - x) = 0.$$

Posons  $\mu_p = 0$ . Pour tout nombre réel  $t$ , on a :

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\mu_i)(x_i - x) = 0,$$

car le premier membre n'est autre que

$$\left( \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i - x \right) + t \cdot \sum_{i=1}^{p-1} \mu_i (x_i - x) = 0 + t \cdot 0 = 0.$$

*Lemme 1.* — On peut choisir une valeur  $t_0$  de  $t$  de telle sorte que

$$\begin{aligned} \lambda_i + t_0 \mu_i &\geq 0 \text{ pour tout } i \in \{1; 2; \dots; p\}; \\ \lambda_k + t_0 \mu_k &= 0 \text{ pour un indice } k \text{ au moins dans } \{1; 2; \dots; p\}. \end{aligned}$$

Si on admet le lemme, la démonstration s'achève comme suit. Pour un tel choix de  $t_0$ , on aurait puisque  $\mu_p = 0$  :

$$\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t_0 \mu_i) \geq \lambda_p > 0$$

puis, d'après  $\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t\mu_i)(x_i - x) = 0$  :

$$x = \sum_{i=1, i \neq k}^p \frac{\lambda_i + t_0 \mu_i}{\sum_{i=1}^p (\lambda_i + t_0 \mu_i)} x_i,$$

ce qui fournirait pour  $x$  une écriture de longueur  $< p$ , contredisant la minimalité de  $p$ .

Il reste à prouver le lemme. Comme les  $\lambda_i$  sont tous  $> 0$  par minimalité de  $p$ , on peut supprimer les indices  $i$  tels que  $\mu_i = 0$ , et donc supposer tous les  $\mu_i \neq 0$ . On veut choisir

$t = -\frac{\lambda_k}{\mu_k}$  pour un indice  $k$  au moins, tel que de plus

$$t \geq -\frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ si } \mu_i > 0 \quad \text{et} \quad t \leq -\frac{\lambda_i}{\mu_i} \text{ si } \mu_i < 0.$$

Pour cela, il suffit de choisir pour  $k$  l'indice (ou l'un des indices)  $i$  tel que  $|\frac{\lambda_i}{\mu_i}|$  soit minimal.  $\square$

Ce qui est profond dans le théorème de Carathéodory, c'est que l'on passe d'un nombre de termes  $p$  indéterminé, arbitrairement grand, à une taille de combinaison convexe uniformément bornée. Ce principe de finitude permet d'obtenir le

**COROLLAIRE 1.** — *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, l'enveloppe convexe de toute partie compacte est compacte.*

*Preuve.* Soit  $A$  un compact de  $\mathbf{R}^n$ . Dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ , l'ensemble

$$\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1\}$$

est compact, car fermé et borné (Borel-Lebesgue). Or d'après le théorème de Carathéodory,  $\text{conv}(A)$  est l'image du compact  $\Lambda \times A^{n+1}$  par l'application continue

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}, x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$$

de  $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathbf{R}^{n+1}$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Donc  $\text{conv}(A)$  est compacte.  $\square$

On remarquera que le corollaire traite de l'enveloppe convexe de  $A$  et non pas de l'enveloppe convexe fermée. Le résultat n'est pas valable en dimension infinie, comme le montre l'exercice qui suit.

*Exercice 3.* — Dans l'espace de suites  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ , l'ensemble  $\{\frac{\epsilon_n}{n}\}_{n \geq 1} \cup \{0\}$  est compact mais son enveloppe convexe n'est pas fermée.

Cependant, en dimension infinie subsiste le résultat moins fort que voici.

**THÉORÈME 2.** — *Dans un espace de Banach, l'enveloppe convexe fermée de toute partie compacte est compacte.*

*Preuve.* Notons  $E$  l'espace de Banach ambiant. Dans cette démonstration, la notation  $B(a, \epsilon)$  désigne la boule de centre  $a$  et de rayon  $\epsilon$ . Par ailleurs, par l'inégalité triangulaire, on a la formule :

$$B(a, \epsilon) = B(a, \frac{\epsilon}{2}) + B(0, \frac{\epsilon}{2}).$$

Soit  $A$  un compact dans  $E$ . On sait déjà que  $\overline{\text{conv}(A)}$  est fermée, donc ici complète puisque  $E$  l'est par hypothèse. Il suffit donc de voir que  $\text{conv}(A)$  est précompact, i.e. qu'elle satisfait à la condition du  $\epsilon$ -recouvrement (pour  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit), qui est que : pour tout  $\epsilon > 0$ , la partie  $\overline{\text{conv}(A)}$  admet un recouvrement par une collection finie de boules de rayon  $\epsilon$ . Or, puisque  $A$  est compact, il existe une collection finie de boules

$$B_i = B(b_i, \frac{\epsilon}{2}) = \{b_i\} + B(0, \frac{\epsilon}{2})$$

avec  $1 \leq i \leq N$ , telle que  $A \subset B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_N$ . On note  $C$  l'ensemble  $\text{conv}(\{b_1; b_2; \dots b_N\})$  : il est compact d'après le corollaire précédent appliqué dans l'espace réel de dimension finie engendré par les  $b_i$ . Ainsi, il existe  $a_1, a_2, \dots a_m \in E$  tels que

$$C \subset \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \frac{\varepsilon}{2}).$$

Finalement, on obtient la chaîne d'inclusions suivante :

$$\begin{aligned} \text{conv}(A) &\subset \text{conv}\left(\bigcup_i B_i\right) = \text{conv}\left(\{b_1; b_2; \dots b_N\} + B(0, \frac{\varepsilon}{2})\right) \\ &= C + B(0, \frac{\varepsilon}{2}) \subset \left[\bigcup_{i=1}^m B(a_i, \frac{\varepsilon}{2})\right] + B(0, \frac{\varepsilon}{2}) = \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \varepsilon), \end{aligned}$$

qui permet de conclure en passant à l'adhérence.  $\square$

### § 3. THÉORÈME DE HELLY

Les rapports de la notion de convexité avec celle de dimension, quand elle est finie, apparaissent déjà dans le théorème de Carathéodory : la dimension de  $E$  est le plus petit entier  $n$  tel qu'on est assuré d'obtenir, par combinaisons linéaires convexes de  $n+1$  éléments de  $A$ , l'enveloppe convexe de toute partie  $A$  de  $E$ . Voici une autre manière de caractériser la dimension par la convexité.

**THÉORÈME 1 (Helly).** — *Dans  $\mathbf{R}^n$  soient  $r \geq n + 1$  ensembles convexes  $A_1, A_2, \dots A_r$ . On suppose que, chaque fois qu'on choisit  $n + 1$  de ces ensembles, leur intersection est non vide. Alors  $A_1 \cap A_2 \cap \dots A_r \neq \emptyset$ .*

Songer au cas où  $n = 2$  et où  $r$  vaut un milliard !

Remarquons qu'on ne peut abaisser  $n + 1$  en  $n$  dans l'énoncé : dans  $\mathbf{R}^2$  prenons les  $r = 3$  ensembles convexes que sont les côtés d'un triangle ; deux à deux ils ont des points en commun mais leur intersection globale est vide.

Remarquons aussi que l'hypothèse de convexité sur les  $A_i$  est nécessaire également (prendre  $n = 1$ ,  $A_1 = \{0; 1\}$ ,  $A_2 = \{1; 2\}$  et  $A_3 = \{0; 2\}$ ).

*Preuve.* La démonstration se fait par récurrence sur  $r$ . Si  $r = n + 1$ , la conclusion coïncide avec l'hypothèse. Supposons désormais que  $r \geq n + 2$ , et que le théorème vrai pour les familles de  $r - 1$  de parties convexes. Par hypothèse de récurrence, pour tout  $i = 1, 2, \dots r$  l'ensemble  $\bigcap_{j=1, j \neq i}^r A_j$  est non vide ; soit  $\underline{x}_i \in \bigcap_{j=1, j \neq i}^r A_j$ . Considérons le système linéaire homogène en les inconnues réelles  $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_r$  :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{x}_2 + \dots \lambda_r \underline{x}_r &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots \lambda_r &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, scalairement, et en posant  $\underline{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ , le système de  $n+1$  équations à  $r$  inconnues :

$$\begin{aligned} x_{11}\lambda_1 + x_{21}\lambda_2 + \dots + x_{r1}\lambda_r &= 0 \\ x_{12}\lambda_1 + x_{22}\lambda_2 + \dots + x_{r2}\lambda_r &= 0 \\ \dots & \\ x_{1r}\lambda_1 + x_{2r}\lambda_2 + \dots + x_{rr}\lambda_r &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_r &= 0 \end{aligned}$$

Il y a  $n+1$  équations pour  $r \geq n+2$  inconnues, donc le théorème de Cramer assure qu'il existe des  $\lambda_i$  non tous nuls qui sont solutions du système ci-dessus. Renumérotions ces solutions de sorte que pour un indice  $p$  les  $\lambda_i$  avec  $i \leq p$  soient  $\geq 0$  et que  $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_r < 0$ . Aucun des deux groupes de  $\lambda_i$  n'est vide car la somme de tous les  $\lambda_i$  vaut 0 (dernière équation du système). En outre les  $\lambda_i$  avec  $i \leq p$  sont non tous nuls.

Le système se réécrit alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \lambda_i \underline{x}_i &= \sum_{j=p+1}^r (-\lambda_j) \underline{x}_j \\ \sum_{i=1}^p \lambda_i &= \sum_{j=p+1}^r (-\lambda_j) \end{aligned}$$

On définit alors un vecteur par combinaison linéaire de deux façons :

$$\underline{x} = \frac{\sum_{i=1}^p \lambda_i \underline{x}_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} = \frac{\sum_{j=p+1}^r (-\lambda_j) \underline{x}_j}{\sum_{j=p+1}^r (-\lambda_j)}$$

Par sa première écriture, on voit que  $\underline{x}$  appartient à chaque  $A_j$  pour  $j > p$ ; et par la seconde écriture, on voit que  $\underline{x}$  appartient à chaque  $A_i$  pour  $i \leq p$ . Ceci achève la démonstration.  $\square$

Le théorème de Helly admet une formulation topologique. Rappelons que si  $\mathcal{F}$  est une famille (finie ou infinie) de parties compactes dans un espace métrique, telle que l'intersection de toute sous-famille finie soit non vide, alors l'intersection de la famille  $\mathcal{F}$  tout entière est non vide. On améliore beaucoup cet énoncé si l'on suppose de plus que les parties compactes sont convexes. Le théorème de Helly fournit alors aussitôt le

**COROLLAIRE 1.** — *Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie ou infinie de parties convexes et compactes de  $\mathbf{R}^n$ . Pour que l'intersection de toutes les parties de  $\mathcal{F}$  soit non vide, il suffit que l'intersection de toute sous-famille de  $n+1$  parties soit non vide.*

*Exercice 1.* — Dans le plan, soit une famille de segments parallèles deux à deux non alignés (supports deux à deux distincts) et admettant trois à trois une droite sécante commune. Alors la famille tout entière admet une droite sécante commune. Indication : on commencera par le cas d'une famille finie ; en prenant des axes tels que  $(Oy)$  soit parallèle aux segments donnés, pour tout segment  $S$  de la famille, soit  $A_S$  l'ensemble des  $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$  tels que la droite  $\{y = \alpha x + \beta\}$  coupe  $S$ . Dans le plan auxiliaire des  $(\alpha, \beta)$  représenter graphiquement  $A_S$  et appliquer à la famille des  $A_S$  le théorème de Helly.

*Exercice 2.* — Dans  $\mathbf{R}^n$ , soit  $A$  un ensemble convexe compact et d'intérieur  $A^\circ$  non vide.

1° Montrer qu'il existe au moins un point  $z \in A^\circ$  tel que toute « corde »  $[u; v]$  de  $A$  passant par  $z$  vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{n} \leq \frac{uz}{zv} \leq n.$$

Indication : remarquer que, si de tels  $z$  existent, ce sont les points d'intersection des homothétiques  $A_u$  de  $A$  par les homothéties de rapport  $\frac{n}{n+1}$  et de centre  $u$  quand le paramètre  $u$  parcourt la frontière de  $A$ ; prouver que  $A_u = \frac{1}{n+1}u + \frac{n}{n+1}A$ , et appliquer aux  $A_u$  le corollaire du théorème de Helly.

2° Soit  $A$  un simplexe de  $\mathbf{R}^n$ , i.e. l'enveloppe convexe de  $\{0; x_1; x_2; \dots; x_n\}$  où les  $x_i$  forment une base de  $\mathbf{R}^n$ . Montrer qu'alors  $z$  est unique et qu'il est l'isobarycentre des sommets de  $A$ , et que dans ce cas les bornes  $n$  et  $\frac{1}{n}$  de la double inégalité sont atteintes (on traitera d'abord à la main le cas  $n = 2$ ).

#### § 4. THÉORÈME DE HAHN-BANACH

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$ .

DÉFINITION 1. — Une jauge sur  $E$  est une fonction  $p$  définie dans  $E$ , à valeurs réelles, telle que pour tous  $x, y \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}_{\geq 0}$ , on ait :

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \text{et} \quad p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

On dit que  $p$  est une fonction positivement homogène et sous-additive, respectivement.

Les formes linéaires et les normes sur  $E$  sont des exemples de jauge, mais voici des cas plus intéressants.

PROPOSITION 1. — Soit  $E$  un espace normé sur  $\mathbf{R}$ , et soit  $A$  un ensemble ouvert convexe dans  $E$ , contenant l'origine  $0$ . Pour tout  $x \in E$ , on pose :

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}.$$

Alors :

- (i) le point  $x$  est dans  $A$  si et seulement si  $p_A(x) < 1$ ;
- (ii) l'application  $p_A$  est une jauge.

Ceci mérite bien un peu de terminologie.

DÉFINITION 2. — On appelle  $p_A$  la jauge de la partie convexe  $A$ .

*Preuve.* Prouvons (i). Soit  $x \in A$ . Si  $x$  est l'origine, on a  $p_A(x) = 0 < 1$ ; supposons désormais que  $x \neq 0$ . L'intersection de  $A$  avec la demi-droite ouverte issue de  $0$  passant par  $x$  est un intervalle ouvert contenant  $x$ , donc il existe  $t \in ]0; 1[$  tel que  $\frac{x}{t} \in A$  et par suite  $p_A(x) < 1$ . Réciproquement, soit  $x \in E$  tel que  $p_A(x) < 1$ . Par définition de la borne inférieure, il existe  $t_0 < 1$  tel que  $\frac{x}{t_0} \in A$ ; par convexité, le segment  $[0; \frac{x}{t_0}]$  est contenu dans  $A$ . Comme  $x$  appartient à ce segment (puisque  $t_0 < 1$ ), on a  $x \in A$ .

Prouvons (ii). Soient  $x \in E$  et  $\lambda > 0$ . On a, en posant  $\frac{t}{\lambda} = t'$  :

$$\begin{aligned} p_A(\lambda x) &= \inf\{t > 0 : \frac{\lambda x}{t} \in A\} = \inf\{t > 0 : \frac{x}{(t/\lambda)} \in A\} \\ &= \inf\{\lambda t' : t' > 0, \frac{x}{t'} \in A\} = \lambda \inf\{t' > 0 : \frac{x}{t'} \in A\} = \lambda p_A(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve l'homogénéité positive de  $p_A$ .

Soient  $x, y \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Par définition de la borne inférieure, il existe  $t > 0$  tel que  $\frac{x}{t} \in A$  et  $t \leq p_A(x) + \varepsilon$ , et il existe  $s > 0$  tel que  $\frac{y}{s} \in A$  et  $s \leq p_A(y) + \varepsilon$ . Par convexité de  $A$ , on a :

$$\frac{1}{s+t}(x+y) = \frac{t\frac{x}{t} + s\frac{y}{s}}{s+t}$$

est dans  $A$ , et  $s+t > 0$  donc :

$$p_A(x+y) \leq s+t \leq p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon,$$

d'où, vu que  $\varepsilon$  est arbitrairement petit, l'inégalité :

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y),$$

qui est la sous-additivité recherchée. □

*Exercice 1.* — Prouver que la jauge  $p_A$  est une fonction uniformément continue dans  $E$ .

La démonstration du théorème de Hahn-Banach repose sur une récurrence transfinie, dont nous commençons par extraire l'analogie du passage de  $n$  à  $n+1$  dans une récurrence ordinaire, en énonçant le

*Lemme 1.* — Soit  $V_1$  un espace vectoriel réel. Soit  $V_0$  un sous-espace vectoriel de codimension 1 dans  $V_1$ , ce qui signifie qu'il existe  $x_1 \in V_1$  tel que  $V_1 = V_0 \oplus \mathbf{R}x_1$ . Soit  $p$  une jauge sur  $V_1$ . Soit  $f_0$  une forme linéaire sur  $V_0$  telle que pour tout  $x \in V_0$  on a :  $f_0(x) \leq p(x)$ . Alors il existe une forme linéaire  $f_1$  sur  $V_1$  telle que :

- (i) la forme linéaire  $f_1$  prolonge  $f_0$ , i.e.  $f_1(x) = f_0(x)$  pour tout  $x \in V_0$  ;
- (ii) pour tout  $x \in V_1$ , on a :  $f_1(x) \leq p(x)$ .

Réflexion préliminaire : il est très facile de prolonger  $f_0$  en une forme linéaire  $f_1$  sur  $V_1$  ; il suffit de choisir une constante réelle  $\alpha$  et de poser, pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$  et tout  $y \in V_0$  :

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_0(y) + \lambda \alpha.$$

La subtilité est de choisir la constante  $\alpha$  pour conserver le contrôle de la forme par la jauge.

*Preuve.* Quels que soient  $y \in V_0$  et  $z \in V_0$ , on a :

$$f_0(z) + f_0(y) = f_0(z+y) \leq p(z+y) \leq p(z+x_1) + p(y-x_1),$$

donc

$$f_0(y) - p(y-x_1) \leq -f_0(z) + p(z+x_1)$$

pour  $y$  et  $z$  arbitraires dans  $V_0$  ; par conséquent

$$\sup_{y \in V_0} (f_0(y) - p(y-x_1)) \leq \inf_{z \in V_0} (p(z+x_1) + p(y-x_1)).$$

Il y a donc des nombres réels entre les bornes supérieure et inférieure ci-dessus ; autrement dit, il existe  $\alpha \in \mathbf{R}$  tel que

$$\begin{aligned} &\text{pour tout } y \in V_0, \text{ on a : } f_0(y) - \alpha \leq p(y - x_1); \\ &\text{pour tout } y \in V_0, \text{ on a : } f_0(y) + \alpha \leq p(y + x_1). \end{aligned}$$

Pour tout  $y + \lambda x_1 \in V_1$ , où  $y \in V_0$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , décidons de poser :

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_0(y) + \lambda \alpha,$$

définition non ambiguë puisqu'il y a une seule manière d'écrire un élément de  $V_1$  sous la forme  $y + \lambda x_1$ .

Il est clair que  $f_1$  est linéaire sur  $V_1$  et que la restriction de  $f_1$  à  $V_0$  est  $f_0$ . Il reste à voir que, pour  $\lambda \neq 0$ , on a  $f_1(y + \lambda x_1) \leq p(y + \lambda x_1)$ . Distinguons deux cas :

si  $\lambda > 0$ , on applique la seconde inégalité satisfaite par  $\alpha$  avec  $\frac{y}{\lambda}$  au lieu de  $y$ , pour obtenir :

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_0(y) + \lambda \alpha = \lambda \left( f\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \alpha \right) \leq \lambda p\left(\frac{y}{\lambda} + x_1\right) = p(y + \lambda x_1);$$

si  $\lambda < 0$ , on applique la première inégalité satisfaite par  $\alpha$  avec  $\frac{y}{-\lambda}$  au lieu de  $y$ , pour obtenir :

$$f_1(y + \lambda x_1) = f_0(y) + \lambda \alpha = -\lambda \left( f\left(\frac{y}{-\lambda}\right) - \alpha \right) \leq (-\lambda) p\left(\frac{y}{-\lambda} - x_1\right) = p(y + \lambda x_1).$$

Ceci prouve la majoration cherchée de la forme linéaire prolongée par la jauge imposée.  $\square$

**THÉORÈME 1** (Hahn-Banach, version 1). — Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  et soit  $p$  une jauge sur  $E$ . Soit  $V_0$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $f_0$  une forme linéaire sur  $V_0$  telle que pour tout  $x \in V_0$  on ait :  $f_0(x) \leq p(x)$ . Alors il existe une forme linéaire  $F$  sur  $E$  telle que

- (i) la forme linéaire  $F$  prolonge  $f_0$ , i.e.  $F(x) = f_0(x)$  pour tout  $x \in V_0$  ;
- (ii) pour tout  $x \in E$ , on a :  $F(x) \leq p(x)$ .

Commençons par indiquer une démonstration dans un cas particulier instructif : supposons en effet qu'il existe une suite, finie ou infinie, de vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_n, \dots$  dans  $E$  telle qu'en posant  $V_n = V_{n-1} + \mathbf{R}v_n$  pour tout  $n \geq 1$ , le vecteur  $v_n$  ne soit pas dans  $V_{n-1}$  (et donc que  $V_n = V_{n-1} \oplus \mathbf{R}v_n$ ) et qu'on ait  $E = \bigcup_n V_n$ . Par récurrence (ordinaire) sur  $n$ , en appliquant le lemme précédent, on obtient pour tout  $n$  une forme linéaire  $f_n$  sur  $V_n$  telle que la restriction de  $f_n$  à  $V_{n-1}$  soit  $f_{n-1}$  et telle que pour tout  $x \in V_n$  on ait  $f_n(x) \leq p(x)$ . En particulier,  $f_n|_{V_0} = f_0$ . Pour  $x$  fixé dans  $E$ , posons  $F(x) = f_n(x)$  dès lors que  $x \in V_n$  ; cette définition ne dépend pas du  $n$  en question car si  $m \leq n$  et si  $x \in V_m \subset V_n$ , on a  $f_m(x) = f_n(x)$ . En outre il est clair que  $F$  est une forme linéaire sur  $E$ , qu'elle prolonge  $f_0$  et qu'elle est dominée par la jauge  $p$ .

*Preuve.* Dans le cas général, la démonstration du théorème de Hahn-Banach se fait par récurrence transfinie, c'est-à-dire s'appuie sur l'axiome de Zorn (voir l'appendice 2). Soit  $\Lambda$  l'ensemble des couples  $(V, f)$  où  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $V_0$

et  $f$  est une forme linéaire sur  $V$  prolongeant  $f_0$  et telle que  $f(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in V$ . On définit sur  $\Lambda$  une relation d'ordre en posant  $(V, f) \preceq (V', f')$  si, et seulement si, on a :

$$V' \supset V \quad \text{et} \quad f'|_V = f.$$

L'ensemble  $\Lambda$  est non vide car il contient  $(V_0, f_0)$ . Dans  $\Lambda$  une famille non vide et totalement ordonnée pour  $\preceq$ , disons  $\mathcal{T}$ , est une famille  $(V_i, f_i)_{i \in I}$  non vide d'éléments de  $\Lambda$  telle que si  $i \neq j$  sont dans  $I$ , ou bien  $(V_i, f_i) \preceq (V_j, f_j)$  ou bien  $(V_j, f_j) \preceq (V_i, f_i)$ . Pour un telle famille  $\mathcal{T}$ , posons  $V_{\mathcal{T}} = \bigcup_i V_i$  : c'est un sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $V_0$ , et pour  $x \in V_{\mathcal{T}}$  posons  $f_{\mathcal{T}}(x) = f_i(x)$  pour un indice  $i \in I$  (disponible) choisi de telle sorte que  $x \in V_i$ ; cette définition est indépendante du choix de  $i$  en question. Alors  $f_{\mathcal{T}}$  est une forme linéaire sur  $V_{\mathcal{T}}$ , elle prolonge  $f_0$  et est majorée par  $p$  sur  $V_{\mathcal{T}}$ . Autrement dit, on vient de vérifier que  $(V_{\mathcal{T}}, f_{\mathcal{T}})$  appartient à  $\Lambda$ ; en fait, dans l'ensemble partiellement ordonné  $(\Lambda, \preceq)$  l'élément  $(V_{\mathcal{T}}, f_{\mathcal{T}})$  est une borne supérieure de l'ensemble totalement ordonné  $\mathcal{T}$ .

Le paragraphe précédent justifie que l'on peut appliquer le lemme de Zorn dans  $(\Lambda, \preceq)$  afin d'obtenir un élément maximal, disons  $(W, F)$ , et il reste à voir que  $W = E$ . Sinon, par l'absurde il existerait dans  $E$  un vecteur  $v \notin W$  et le lemme précédent assurerait l'existence, dans  $W' = W \oplus \mathbf{R}v$ , d'une forme linéaire  $F'$  prolongeant  $F$ , donc  $f_0$  et telle que  $F'(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in W'$ . Ainsi on aurait  $(W, F) \preceq (W', F')$  avec  $(W, F) \neq (W', F')$ , ce qui contredirait la maximalité de  $(W, F)$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  et soit  $p$  une jauge non nulle sur  $E$ . Alors il existe sur  $E$  une forme linéaire non nulle  $F$  sur  $E$  telle que  $F(x) \leq p(x)$  pour tout  $x \in E$ .

*Preuve.* Choisissons  $x_0 \in E$  tel que  $p(x_0) \neq 0$ , posons  $V_0 = \mathbf{R}x_0$  et définissons  $f_0$  sur  $V_0$  par  $f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ . Alors  $f_0$  est une forme linéaire non nulle sur  $V_0$ , et il suffit de voir que  $f_0 \leq p|_{V_0}$  pour conclure grâce au théorème de Hahn-Banach qui précède. Faisons donc cette vérification. Pour  $y = \lambda x_0$ , avec  $\lambda \geq 0$ , on a :

$$f_0(y) = f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = p(\lambda x_0) = p(y) \leq p(y),$$

et si  $y = \lambda x_0$ , cette fois avec  $\lambda < 0$ , on a :  $0 = p(0) \leq p(x_0) + p(-x_0)$  donc  $-p(x_0) \leq p(-x_0)$  et, par conséquent :

$$f(y) = f_0(\lambda x_0) = \lambda p(x_0) = (-\lambda)(-p(x_0)) \leq (-\lambda)p(-x_0) = p((-\lambda)(-x_0)) = p(y),$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Exercice 2* (moyenne de Banach sur  $\mathbf{R}$ ). — Soit  $E = \mathcal{B}(\mathbf{R})$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  des fonctions  $x = x(t)$  définies et bornées sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs réelles. Si  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  est un ensemble fini de nombres réels, on pose :

$$M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sup_{t \in \mathbf{R}} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x(t + \alpha_k),$$

et

$$p(x) = \inf_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} M(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

où l'infimum est pris sur tous les systèmes finis  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  de nombres réels.

1° L'application  $p$  est une jauge.

2° Il existe sur  $E$  une forme linéaire  $F$  telle que :  $F(1) = 1$ ,  $F(x) \geq 0$  si  $x(t) \geq 0$  pour tout  $t \in \mathbf{R}$  et  $F$  est invariante par translations, i.e.  $F(x_\tau) = F(x)$  pour toute fonction  $x$ , où  $x_\tau$  est la fonction « translatée par  $\tau$  » définie par  $t \mapsto x(t - \tau)$ .

3° En déduire qu'à toute partie  $A$  de  $\mathbf{R}$  on peut attribuer un nombre réel  $\mu(A)$  de sorte que :  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  si  $A \cap B = \emptyset$ ,  $\mu(A) \geq 0$ ,  $\mu(\mathbf{R}) = 1$  et  $\mu(A) = \mu(B)$  si  $A$  et  $B$  se déduisent l'un de l'autre par translation.

On remarquera l'analogie avec la théorie de la mesure des ensembles.

Soit maintenant  $E$  un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

DÉFINITION 3. — *Le dual (topologique) de  $E$  est l'espace vectoriel  $E'$  des formes linéaires  $f$  continues sur  $E$ , normé par*

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

L'espace  $E'$ , au titre d'espace d'applications linéaires dans un espace de Banach (i.e. normé complet), est lui-même un espace de Banach.

THÉORÈME 2 (Hahn-Banach, version 2). — *Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $f$  une forme linéaire continue sur  $V$ . Alors il existe une forme linéaire  $F$  continue sur  $E$  telle que*

- (i) *la forme linéaire  $F$  prolonge  $f$ , i.e.  $F(x) = f(x)$  pour tout  $x \in V$  ;*
- (ii) *on a :  $\|f\|_{E'} = \|f\|_{V'}$ , c'est-à-dire*

$$\sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |F(x)| = \sup_{x \in V, \|x\| \leq 1} |f(x)|.$$

Le point essentiel est le (ii) : on peut prolonger la forme linéaire  $f$  sans augmenter sa norme.

*Preuve.* Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ , c'est un corollaire immédiat de la première version : il suffit d'y prendre  $p(x) = \|f\|_{V'} \|x\|_E$ ,  $V_0 = V$  et  $f_0 = f$  ; on obtient alors une forme linéaire  $F$  sur  $E$  qui prolonge  $f$  et vérifie :

$$F(x) \leq \|f\|_{V'} \cdot \|x\|_E$$

pour tout  $x \in E$ . Changeant  $x$  en  $-x$ , on voit qu'elle vérifie même

$$|F(x)| \leq \|f\|_{V'} \cdot \|x\|_E$$

pour tout  $x \in E$ . Donc la forme linéaire  $F$  est continue dans  $E$ , et

$$\|f\|_{E'} \leq \|f\|_{V'},$$

d'où  $\|f\|_{E'} = \|f\|_{V'}$ .

Pour  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ , on se ramène au cas  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  en considérant l'espace vectoriel réel  $E_{\mathbf{R}}$  sous-jacent à  $E$  (voir appendice 3). Soit  $V_{\mathbf{R}}$  l'espace vectoriel réel sous-jacent à  $V$ . Soit  $u = \operatorname{Re}(f)$  ; c'est une forme linéaire continue sur  $V_{\mathbf{R}}$ , de norme  $\|f\|_{V'}$ . On vient de

voir qu'elle se prolonge en une forme linéaire réelle  $U$  continue dans  $E_{\mathbf{R}}$ , de norme  $\|f\|_{V'}$ . Posons, pour tout  $x \in E$  :

$$F(x) = U(x) - iU(ix).$$

Alors  $F$  est une forme linéaire complexe sur  $E$ , de norme  $\|U\|_{E_{\mathbf{R}}}$ , c'est-à-dire égale à  $\|f\|_{V'}$ , et puisque  $f(x) = u(x) - iu(ix)$ , il est clair que  $F$  prolonge  $f$ .  $\square$

*Exercice 3.* — On suppose que  $E$  est un espace de Hilbert dont on note  $(\cdot|\cdot)$  le produit scalaire.

1° Rappeler la description des formes linéaires continues sur  $E$ .

2° En utilisant les théorèmes de projections, retrouver une démonstration du théorème de Hahn-Banach dans les espaces de Hilbert.

3° Constater que, dans ce cas, le prolongement de  $f$  par  $F$  avec conservation de la norme est unique et s'annule sur l'orthogonal de  $V$ .

Nous passons désormais à une troisième version, dite géométrique, du théorème de Hahn-Banach.

**THÉORÈME 3 (Hahn-Banach, version 3).** — *Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbf{R}$ . Soit  $A$  un ensemble ouvert convexe non vide de  $E$ . Soit  $L$  un sous-espace affine de  $E$  tel que  $A \cap L$  soit vide. Alors il existe un hyperplan (affine) fermé  $H$  de  $E$  tel que  $A \cap H$  soit encore vide et contenant  $L$ .*

Rappelons qu'un hyperplan fermé est le translaté d'un sous-espace vectoriel fermé de codimension 1 ; c'est-à-dire qu'il s'agit d'un ensemble de la forme  $\{x \in E : F(x) = \alpha\}$  où  $F$  est une forme linéaire continue non identiquement nulle sur  $E$  et  $\alpha$  est un nombre réel.

*Preuve.* Commençons par le cas particulier instructif où  $L$  est réduit à un point, disons  $m$  (par exemple si  $E$  est de dimension 2 et si  $m$  est dans la frontière  $\text{Fr}(A) = \overline{A} - A^\circ$  de  $A$ , il s'agit de voir qu'on peut mener une sorte de « tangente » à  $A$  en  $m$ ).

Par translation, on se ramène au cas où  $A$  contient l'origine 0. Soit  $m$  un point de  $E$  tel que  $m \notin A$  (ce qui n'empêche pas  $m$  d'être sur la frontière de  $A$ ). On va prouver qu'il existe un hyperplan fermé  $H$  de  $E$  contenant  $m$  mais ne coupant pas  $A$ . Introduisons la jauge  $p_A$  de  $A$  définie par :

$$p_A(x) = \inf\{t > 0 : \frac{x}{t} \in A\}$$

pour  $x \in E$ . Par la proposition 1, on a  $p_A(m) \geq 1$  car  $m \notin A$ . Soit  $V = \mathbf{R}m$  la droite vectorielle engendrée par  $m$  et soit sur  $V$  la forme linéaire  $f : \lambda \mapsto \lambda p_A(m)$ . On a  $f(\lambda m) \leq p_A(\lambda m)$  car :

- si  $\lambda \geq 0$ , alors  $f(\lambda m) = \lambda p_A(m) = p_A(\lambda m)$  ;
- si  $\lambda < 0$ , alors  $f(\lambda m) = \lambda p_A(m) \leq 0 \leq p_A(\lambda m)$ , car tout  $p_A(x)$  est  $\geq 0$ .

D'après le théorème de Hahn-Banach (première version), il existe une forme linéaire  $F$  sur  $E$  qui prolonge  $f$  (et donc en particulier  $F(m) = f(m) = p_A(m) \geq 1$ ) et telle que, pour tout  $x \in E$ , on a  $F(x) \leq p_A(x)$  (et en particulier  $F(x) < 1 < p_A(m)$  pour tout  $x \in A$

par la proposition 1). Posons  $\alpha = p_A(m)$ . L'hyperplan

$$H = \{x \in E : F(x) = \alpha\}$$

passe par  $m$  et, pour tout  $x \in A$ , on a  $F(x) < \alpha$ , donc  $H \cap A = \emptyset$ . Ceci implique que l'hyperplan  $H$  n'est pas dense, et donc qu'il est fermé dans  $E$ . Ceci achève la démonstration dans le cas particulier où  $L$  est réduit à un point.

Passons maintenant à la démonstration dans le cas général. Cette fois, on utilise une translation judicieuse pour se ramener au cas où  $L$  contient l'origine  $0$ , autrement dit au cas où  $L$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . On suppose aussi que  $L$  est fermé car,  $A$  étant ouvert, l'intersection  $L \cap \bar{A}$  est encore vide. Passons à l'espace vectoriel normé quotient  $\bar{E} = E/L$ , muni de la norme

$$\|\bar{x}\| = \inf_{x \in \bar{x}} \|x\|_E,$$

où  $\bar{x} = x + L$ . Dans  $\bar{E}$  l'ensemble  $\bar{A} = \{\bar{x} : x \in A\}$  est convexe et ouvert, car la projection  $x \mapsto \bar{x}$  est une application linéaire de  $E$  sur  $\bar{E}$  qui transforme tout ouvert en un ouvert (on parle d'application *ouverte*). De plus, on a  $\bar{0} = L \notin \bar{A}$ . D'après le cas particulier traité ci-dessus, il existe dans  $\bar{E}$  un hyperplan vectoriel fermé  $\mathcal{H}$  tel que  $\mathcal{H} \cap \bar{A}$  soit vide. Soit  $H$  l'image réciproque de  $\mathcal{H}$  dans  $E$ ; c'est un hyperplan fermé de  $E$  tel que  $H \supset L$  et  $H \cap A = \emptyset$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

PROPOSITION 2. — *Si  $A$  est ouvert convexe non vide et ne contient pas  $0$ , il existe une forme linéaire continue  $f \in E'$  telle que  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in A$ .*

*Preuve.* En effet, d'après le cas particulier traité dans la preuve précédente, il existe un hyperplan vectoriel fermé  $\{f = 0\} = \{x \in E : f(x) = 0\}$  qui ne coupe pas  $A$ . Puisque  $A$  est convexe, il est tout entier dans l'un des deux demi-espaces ouverts délimités par cet hyperplan; quitte à remplacer  $f$  par  $-f$ , il est dans le demi-espace  $\{f > 0\}$ .  $\square$

*Exercice 4.* — Dans le cas  $E = \mathbf{R}^2$ , donner de la troisième version du théorème de Hahn-Banach une démonstration élémentaire basée sur l'idée suivante. Soit  $A$  un ouvert convexe de  $\mathbf{R}^2$  ne contenant pas  $0$ ; il faut montrer qu'il existe une droite issue de  $0$  et ne coupant pas  $A$ . Soit  $\Gamma$  le cercle unité et, pour tout  $x \in A$ , soit  $\varphi(x)$  l'intersection avec  $\Gamma$  de la demi-droite issue de  $0$  passant par  $x$ . On montrera que  $\varphi(A)$  est un intervalle curviligne ouvert dans  $\Gamma$  et de longueur  $\leq \pi$ .

## § 5. APPLICATIONS À LA DUALITÉ DES ESPACES NORMÉS

Relisez attentivement l'énoncé de la deuxième version du théorème de Hahn-Banach. En voici quelques corollaires.

COROLLAIRE 1. — *Soit, dans un espace vectoriel normé sur le corps  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , un vecteur  $a$  non nul. Alors il existe  $f \in E'$  telle que*

$$\|f\|_{E'} = 1 \quad \text{et} \quad f(a) = \|a\|.$$

En particulier, si  $E \neq \{0\}$  alors  $E' \neq \{0\}$  : un espace vectoriel normé sur  $\mathbf{K}$  a toujours des formes linéaires continues non nulles.

*Preuve.* Soit la droite vectorielle  $V = \mathbf{K}a$ . Sur  $V$  la forme linéaire  $f_0 : \lambda a \mapsto \lambda \|a\|$  est continue de norme 1 ; il suffit de la prolonger à  $E$  sans changement de norme.  $\square$

COROLLAIRE 2. — *Le dual topologique  $E'$  sépare les points : si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs distincts de  $E$ , il existe  $f \in E'$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ .*

*Preuve.* En effet, si  $x \neq y$  il suffit de prendre  $a = x - y$  et d'appliquer le précédent corollaire.  $\square$

COROLLAIRE 3. — *On a, pour tout  $x \in E$ , la formule :*

$$\|x\|_E = \sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)|.$$

*Preuve.* Si  $x = 0$  c'est évident ; supposons désormais que  $x$  est non nul. Si  $\|f\|_{E'} \leq 1$ , on a  $|f(x)| \leq \|x\|_E$  ; ainsi on sait déjà que

$$\sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)| \leq \|x\|_E.$$

Réciproquement, puisque  $x \neq 0$  le premier corollaire de la section assure l'existence de  $f \in E'$  de norme 1 telle que  $|f(x)| = \|x\|_E$  ; et donc

$$\sup_{f \in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |f(x)| \geq \|x\|_E,$$

ce qui prouve l'énoncé.  $\square$

DÉFINITION 1. — *On appelle bidual de l'espace vectoriel  $E$  normé sur  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  le dual topologique  $E'' = (E')'$  de l'espace de Banach  $E'$ .*

D'après le corollaire qui précède, l'application

$$x \mapsto (e_x : f \mapsto f(x))$$

établit une isométrie de  $E$  dans son bidual  $E''$ , qui permet d'identifier  $E$  à un sous-espace vectoriel normé de  $E''$ .

*Exercice 1.* — 1° Quel est le bidual de l'espace  $c_0$  des suites réelles qui tendent vers 0, muni de la norme sup ?

2° Citer des espaces vectoriels normés égaux à leur bidual (ces espaces vectoriels normés sont dits réflexifs).

3° En considérant le sous-espace vectoriel  $V$  de  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  formé des suites réelles convergentes, et sur  $V$  la forme linéaire

$$x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

montrer qu'il existe sur  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  une forme linéaire continue non nulle mais identiquement nulle sur  $c_0$ . En déduire que l'espace  $\ell^1(\mathbf{N})$  n'est pas réflexif.

COROLLAIRE 4. — *Soit  $A$  une partie convexe non vide de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Pour que  $x$  soit dans  $E$  limite de combinaisons linéaires de vecteurs de  $A$ , il faut et il suffit que toute  $f \in E'$  identiquement nulle sur  $A$  soit nulle sur  $x$ .*

*Preuve.* Notons  $\langle A \rangle$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $A$  (i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires de vecteurs de  $A$ ) et notons  $\overline{\langle A \rangle}$  son adhérence dans  $E$  (i.e. l'ensemble des limites de suites convergentes de telles combinaisons linéaires). La condition proposée est nécessaire car si  $x \in \overline{\langle A \rangle}$  et si  $f$  est identiquement nulle sur  $A$ , alors  $f$  est identiquement nulle sur  $\langle A \rangle$  par linéarité, et finalement identiquement nulle sur  $\overline{\langle A \rangle}$  par continuité et passage à la limite.

Le point intéressant du corollaire, qui demande le plus de travail pour la preuve, est de démontrer que la condition est suffisante. Donnons-nous  $x \notin \overline{\langle A \rangle}$  afin de montrer qu'il existe  $f \in E'$  telle que  $f$  soit nulle sur  $A$  mais que  $f(x) \neq 0$ . Soit  $\delta = \inf_{y \in \overline{\langle A \rangle}} \|x - y\|$  : c'est un nombre réel  $> 0$ , sinon  $x$  serait limite d'une suite d'éléments de  $\overline{\langle A \rangle}$  donc serait lui-même dans  $\overline{\langle A \rangle}$ . Posons

$$V = \overline{\langle A \rangle} + \mathbf{K}x.$$

Soit  $g$  la forme linéaire sur  $V$  définie, pour  $y \in \overline{\langle A \rangle}$  et  $\lambda \in \mathbf{K}$  par

$$g(y + \lambda x) = \lambda.$$

Puisque, pour  $\lambda \neq 0$ , on a :

$$\|y + \lambda x\| = |\lambda| \left\| x + \frac{y}{\lambda} \right\| \geq |\lambda| \delta = \delta |g(y + \lambda x)|,$$

la forme linéaire  $g$  est continue sur  $V$  et de norme  $\|g\|_{V'} \leq \frac{1}{\delta}$ . D'après le théorème de Hahn-Banach, soit  $f \in E'$  une forme linéaire continue qui prolonge  $g$ . On a  $f(x) = g(x) = 1$ , et  $f(y) = g(y) = 0$  pour tout  $y \in A$ .  $\square$

**COROLLAIRE 5.** — *Soit  $A$  une partie de  $E$  telle que la seule  $f \in E'$  identiquement nulle sur  $A$  soit la forme nulle. Alors  $A$  est totale dans  $E$ , c'est-à-dire : tout vecteur de  $E$  est limite de combinaisons linéaires de vecteurs de  $A$ .*

*Preuve.* C'est un cas particulier du corollaire précédent.  $\square$

Ces deux derniers corollaires jouent un rôle important en théorie de l'approximation.

*Exercice 2.* — De la démonstration de l'avant-dernier corollaire, dégager le résultat suivant : soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et soit  $x \in E$  tel que  $\delta = \inf_{y \in V} \|x - y\| > 0$ ; alors il existe  $f \in E'$  telle que :

$$f(x) = 1, \quad f(y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in V \quad \text{et} \quad \|f\|_{E'} \leq \frac{1}{\delta}.$$

## § 6. SÉPARATION DES ENSEMBLES CONVEXES

Dans sa troisième version, le théorème de Hahn-Banach a des applications intéressantes à la géométrie des ensembles convexes. Soit  $E$  un espace vectoriel normé sur  $\mathbf{R}$ . Dans  $E$  un *hyperplan (affine) fermé*, de la forme  $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$  où  $f \in E' - \{0\}$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$ , délimite deux *demi-espaces ouverts* :

$$\{x \in E : f(x) < \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in E : f(x) > \alpha\},$$

ainsi que deux *demi-espaces fermés* :

$$\{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}.$$

Soient A et B deux parties de E. Soit H un hyperplan fermé de E.

DÉFINITION 1. — *On dit que H sépare (resp. sépare strictement) A et B, si A est contenu dans l'un et B est contenu dans l'autre des demi-espaces fermés (resp. ouverts) délimités par H.*

Dans sa troisième version, le théorème de Hahn-Banach énonce en somme que, si A est ouvert convexe non vide et L un sous-espace affine disjoint de A, alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A de L. Cet énoncé peut en fait être très notablement amélioré.

COROLLAIRE 1. — *Dans un espace vectoriel réel normé E, soient A et B deux ensembles convexes non vides disjoints.*

- (i) *Si A est ouvert, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*
- (ii) *Si A et B sont tous deux ouverts, ou si A est fermé et B compact, il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement A et B.*
- (iii) *Si A et B sont tous les deux fermés, et si E est de dimension finie, il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B.*

*Preuve.* Preuve de (i). L'ensemble  $C = A - B$  est ouvert (comme réunion de translatés de l'ouvert A), convexe (d'après la proposition 2), non vide car  $A \neq \emptyset$  et ne contient pas l'origine (car A et B sont disjoints). D'après la proposition 2 il existe  $f \in E'$  telle que  $f(x)$  soit  $> 0$  pour tout  $x \in C$ , donc telles que  $f(a) > f(b)$  quels que soient  $a \in A$  et  $b \in B$ . Ainsi  $\alpha = \inf_{a \in A} f(a) \geq \sup_{b \in B} f(b) = \beta$ . Pour  $\gamma$  un nombre réel dans l'intervalle  $[\alpha; \beta]$ , l'hyperplan  $\{x \in E : f(x) = \gamma\}$  sépare A et B.

Preuve de (ii). Si de plus B est ouvert, l'hyperplan H du (i) sépare strictement A et B, car si par exemple il existait un point  $b$  dans  $H \cap B$ , il existerait une boule ouverte  $B(b, r)$  avec  $r > 0$ , contenue dans B (car B est ouvert); donc B aurait des points strictement de part et d'autre de H, ce qui contredit le fait que H sépare A et B.

Maintenant, supposons A fermé et B compact. Alors  $\delta = \inf_{x \in B} d(x, A)$  est  $> 0$  car la fonction

$$x \mapsto d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

est continue (en fait 1-lipschitzienne) et  $> 0$  sur le compact B, donc atteint sa borne inférieure (laquelle de ce fait ne peut être nulle). Dès lors les ensembles  $A + B(0, \frac{\delta}{3})$  et  $B + B(0, \frac{\delta}{3})$  sont deux ouverts convexes disjoints, auxquels il suffit d'appliquer l'énoncé (ii) dans le cas précédent : il existe un hyperplan fermé qui sépare strictement ces deux ouverts épaississant A et B, donc qui sépare strictement A et B.

Preuve de (iii). Ici  $E = \mathbf{R}^d$ , qu'on munit du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et de la norme euclidienne (équivalente à toute autre norme). Par translation, on suppose que A contient l'origine; par rotation et homothétie on suppose que B contient le point  $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ . Soit S la sphère unité de centre 0. L'ensemble  $\Lambda = S \times [0; e_1]$  est compact; tout point

$\lambda = (u, \xi)$  de cet ensemble, où  $u \in S$  et  $\xi \in [0; e_1]$ , définit un hyperplan  $H_\lambda$  issu de  $\xi$  et orthogonal à  $u$  : c'est l'hyperplan d'équation  $(x|u) = (\xi|u)$ . C'est avec cet ensemble d'hyperplans  $H_\lambda$  que nous allons travailler.

Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $\overline{B}(0, n)$  la boule fermée de centre 0 et de rayon  $n$  ; elle est compacte puisque  $E$  est de dimension finie. D'après le point (ii) il existe un hyperplan  $H_\lambda$  séparant le convexe compact  $A \cap \overline{B}(0, n)$  du convexe fermé  $B$ . Nécessairement cet hyperplan coupe l'axe  $e_1$  entre les points 0 et  $e_1$ , donc en un point  $\xi_n$  du segment  $[0; e_1]$ . Il est donc du type  $H_n = H_{\lambda_n}$ , avec  $\lambda_n = (u_n, \xi_n) \in \Lambda$ . La séparation par  $H_n$  de  $A \cap \overline{B}(0, n)$  et  $B$  se traduit, en changeant au besoin  $u_n$  en  $-u_n$ , par les inégalités :

- (1)  $(x|u_n) \geq (\xi_n|u_n)$  pour tout  $x \in B$  ;
- (2)  $(x|u_n) \leq (\xi_n|u_n)$  pour tout  $x \in A \cap \overline{B}(0, n)$ .

Puisque  $\Lambda$  est compact, il existe une suite extraite de  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ , par abus encore notée  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ , qui converge vers un  $\lambda = (u, \xi) \in \Lambda$ . Alors l'hyperplan  $H_\lambda = \{x \in E : (x|u) = (\xi|u)\}$  sépare  $A$  et  $B$ . En effet, si  $x \in B$ , en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans les inégalités (1) on obtient :

$$(x|u) \geq (\xi|u) \quad \text{pour tout } x \in B.$$

Si  $x \in A$ , pour  $n$  assez grand,  $x$  finit par être dans tous les ensembles  $A \cap \overline{B}(0, \varphi(n))$  et, en faisant dès lors tendre  $n$  vers  $+\infty$  dans (2), on obtient :

$$(x|u) \leq (\xi|u) \quad \text{pour tout } x \in A,$$

qui est la séparation souhaitée. □

**COROLLAIRE 2.** — *Tout ensemble convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent.*

*Preuve.* Soit  $A$  un convexe fermé non vide, et soit  $\tilde{A}$  l'intersection des demi-espaces fermés qui contiennent  $A$ . Évidemment  $A \subset \tilde{A}$ . Soit  $x \in E$  tel que  $x \notin A$ , il s'agit de voir que  $x \notin \tilde{A}$ . D'après le corollaire qui précède, il existe un hyperplan fermé  $H$  séparant strictement  $x$  de  $A$ . Ainsi  $x$  n'appartient pas au demi-espace fermé délimité par  $H$  qui contient  $A$ , et on a donc  $x \notin \tilde{A}$ . □

*Exercice 1.* — Tout sous-espace affine fermé est l'intersection des hyperplans affines qui le contiennent.

*Exercice 2.* — Soit  $C$  un convexe fermé et  $A$  une partie de  $E$ . Pour que  $C$  contienne  $A$ , il faut et il suffit que pour toute  $f \in E'$ , on ait  $f(A) \subset f(C)$ .

On souhaite maintenant préciser le corollaire précédent en réduisant le nombre de demi-espaces fermés mis en jeu.

**DÉFINITION 2.** — *Soit  $A$  un ensemble convexe fermé non vide et soit  $x$  un point de la frontière de  $A$ . Un hyperplan d'appui de  $A$  au point  $x$  est un hyperplan fermé passant par  $x$  et tel que  $A$  soit tout entier contenu dans l'un des deux demi-espace fermés délimités par  $H$ .*

PROPOSITION 1. — Soit  $A$  un ensemble fermé convexe d'intérieur non vide. Alors tout point frontière de  $A$  appartient à au moins un hyperplan d'appui de  $A$ .

*Preuve.* Soit  $x \in \text{Fr}(A) = \overline{A} - A^\circ$ . Alors  $\{x\} \cap A^\circ = \emptyset$ . Pour obtenir un hyperplan d'appui en  $x$  il suffit d'appliquer la troisième version du théorème de Hahn-Banach au sous-espace affine réduit au point  $x$  et à l'ouvert convexe  $A^\circ$ .  $\square$

COROLLAIRE 1. — Tout ensemble fermé convexe  $A$  qui est, soit d'intérieur non vide, soit compact non vide, est l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent et qui sont bordés par un hyperplan d'appui de  $A$ .

*Preuve.* Soit  $\widehat{A}$  cette intersection. Évidemment  $A \subset \widehat{A}$ . Soit  $x \in E$  tel que  $x \notin A$ ; il s'agit de voir que  $x \notin \widehat{A}$ .

1°) Supposons  $A^\circ$  non vide. Choisissons  $y \in A^\circ$ . L'intersection de  $A$  et du segment  $[x; y]$  est un segment  $[z; y]$  où  $z \in \text{Fr}(A)$  est distinct de  $x$ . Par la proposition qui précède, on dispose d'un hyperplan d'appui de  $A$  en  $z$ . Le demi-espace fermé délimité par  $H$  qui contient  $A$  ne contient pas  $x$ , sinon la droite joignant  $x, y, z$  serait tout entière dans  $H$  et comme le point  $y$  est intérieur à  $A$ , s'il était dans  $H$  il y aurait des points de  $A$  strictement de part et d'autre de  $H$ . Ainsi  $x \notin \widehat{A}$ .

2°) Supposons  $A$  compact non vide. D'après le précédent corollaire, il existe un hyperplan fermé  $H$  séparant strictement  $A$  de  $\{x\}$ , donc il existe  $f \in E'$  et  $\alpha \in \mathbf{R}$  tels que :  $f(x) < \alpha$ , et  $f(y) > \alpha$  pour tout  $y \in A$ . Soit  $\beta = \inf_{y \in A} f(y)$ . Le demi-espace fermé  $\{y \in E : f(y) \geq \beta\}$  contient  $A$ . De plus l'hyperplan  $H_1 = \{z \in E : f(z) = \beta\}$  est d'appui pour  $A$  car sur  $A$  compact la borne inférieure  $\beta$  est atteinte. Mais  $x$  n'appartient pas au demi-espace  $\{y \in E : f(y) \geq \beta\}$  car  $f(x) < \alpha \leq \beta$ . Ainsi  $x \notin \widehat{A}$ .  $\square$

*Exercice 3.* — Dans  $\ell^2(\mathbf{N})$  soit  $A$  l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble  $\{\pm \frac{e_n}{n}\}_{n \geq 1}$ . Montrer que  $A$  est compact, que  $0 \in \text{Fr}(A)$  mais que par  $0$  ne passe aucun hyperplan d'appui de  $A$ .

## § 7. POINTS EXTRÊMAUX

Soit  $A$  un ensemble convexe fermé dans un espace vectoriel normé sur  $\mathbf{R}$ . Soit  $a \in A$

DÉFINITION 1. — On dit que  $a$  est un point extrémal de  $A$  s'il n'existe aucun intervalle ouvert contenant  $a$  et contenu dans  $A$ ; en d'autres termes si les relations

$$\alpha = \lambda x + (1 - \lambda)y, \quad x, y \in A, \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

entraînent  $x = y = a$ .

Il revient au même de dire que  $a$  n'est pas le milieu d'un segment de longueur  $> 0$  contenu dans  $A$ ; en d'autres termes les relations

$$a = \frac{x + y}{2} \quad x, y \in A$$

entraînent  $x = y = a$ .

Par exemple, dans le plan les points extrémaux d'un domaine polygonal convexe sont les sommets du polygone frontière.

Toujours si  $n = 2$ , l'ensemble  $A$  ci-dessus a ses points extrémaux figurés à droite.

On notera  $\text{Extr}(A)$  l'ensemble des points extrémaux de  $A$ . Il est clair que cet ensemble est contenu dans la frontière de  $A$ .

*Exercice 1.* — Dans  $\mathbf{R}^n$  muni de sa base canonique  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , déterminer les points extrémaux de la boule unité fermée

1° pour la norme sup :  $x = \sum_i x_i e_i \mapsto \max_i |x_i|$  ;

2° pour la norme euclidienne :  $x = \sum_i x_i e_i \mapsto \sqrt{\sum_i |x_i|^2}$ .

3° Plus généralement, montrer que si  $E$  est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et de la norme associée, tout point de la sphère unité est extrémal pour la boule unité fermée de  $E$ .

4° Il en est de même si  $E = \ell^p(\mathbf{N})$  avec  $1 < p < +\infty$ .

*Exercice 2.* — 1° Les points extrémaux de la boule unité fermée de  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  sont les suites  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  tels que  $|x_n| = 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

2° La boule unité fermée de l'espace  $c_0$  des suites qui tendent vers 0 n'a pas de point extrémal.

*Exercice 3.* — Dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^3$ , soit  $A$  l'enveloppe convexe de l'ensemble réunion du cercle  $\{x_3 = 0; x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0\}$  et des deux points  $\{x_1 = x_2 = 0; x_3 = \pm 1\}$ . Montrer que  $A$  est convexe compact. Déterminer  $\text{Extr}(A)$  et constater que cet ensemble n'est pas fermé.

*Lemme 1.* — Soit  $A$  un ensemble convexe fermé dans  $E$ , et soit  $H$  un hyperplan d'appui de  $A$ . Alors :

$$\text{Extr}(A \cap H) = \text{Extr}(A) \cap H.$$

*Preuve.* Par définition des points extrémaux, on a déjà :

$$\text{Extr}(A \cap H) \supset \text{Extr}(A) \cap H.$$

Réciproquement, soit  $x \in \text{Extr}(A \cap H)$ . Alors déjà  $x \in H$ . Par l'absurde, supposons que  $x \notin \text{Extr}(A)$  ; alors  $x$  serait dans un intervalle ouvert  $I$  contenu dans  $A$ . Cet  $I$  serait contenu dans  $H$ , sinon il irait de part et d'autre de  $H$ , en contradiction avec le fait que  $H$  est un hyperplan d'appui de  $A$ . Ainsi  $x \in \text{Extr}(A \cap H)$ .  $\square$

Un théorème, dû à Krein et Milman, affirme que dans un espace vectoriel normé, tout ensemble convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux. Nous nous contenterons ici du cas de la dimension finie mais nous y énonçons un résultat plus fort (remplaçant l'enveloppe convexe fermée par la simple enveloppe convexe).

**THÉORÈME 1 (Krein-Milman).** — Soit  $A$  un ensemble convexe compact non vide dans un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbf{R}$ . Alors  $A$  est l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points extrémaux.

*Preuve.* Il est clair que, si on note  $\text{Fr}(A)$  la frontière de  $A$ , on a

$$A = \text{conv}(\text{Fr}(A)).$$

Il suffit donc de prouver que tout  $x \in \text{Fr}(A)$  est dans  $\text{conv}(\text{Extr}(A))$ . On raisonne par récurrence sur la dimension de  $A$  (i.e. la dimension du plus petit sous-espace affine contenant  $A$ ). Si  $d = 0$  ou  $1$ , l'ensemble  $A$  est un segment  $[a; b]$  et  $\text{Extr}(A) = \{a; b\}$ ; le théorème est alors évident.

On suppose désormais que  $d > 1$  et que l'énoncé est vrai en dimensions inférieures. Plongeons  $A$  dans l'espace affine  $\mathbf{R}^d$  qu'il engendre. Dans cet espace l'intérieur de  $A$  est non vide donc, d'après la proposition 1, si  $x \in \text{Fr}(A)$  est donné, il passe par  $x$  un hyperplan d'appui, disons  $H$ , de  $A$ . L'ensemble  $A \cap H$  est convexe compact non vide et de dimension  $\leq d - 1$ ; par hypothèse de récurrence, on a donc

$$A \cap H = \text{conv}(\text{Extr}(A \cap H)).$$

En appliquant le lemme qui précède, on voit que pour le point  $x \in \text{Fr}(A)$ , on a :

$$x \in A \cap H = \text{conv}(\text{Extr}(A \cap H)) = \text{conv}(\text{Extr}(A) \cap H) \subset \text{conv}(\text{Extr}(A)),$$

ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Exercice 4.* — Soit  $A$  un ensemble convexe compact non vide dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et convexe sur  $A$ , ce qui signifie que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

pour tous  $x, y \in A$  et  $\lambda \in [0; 1]$ . Alors le maximum de  $A$  est atteint sur  $\text{Extr}(A)$ ; en particulier, si  $A$  est un polyèdre il suffit de tester un nombre fini de points.

*Exercice 5.* — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $p$  sur  $\mathbf{R}$ . Dans  $E$  soit  $K$  un polyèdre convexe plein défini par le système d'équations

$$f_1(x) \geq 0; \quad f_2(x) \geq 0; \quad \dots \quad f_N(x) \geq 0,$$

où  $N \geq p$  et où les  $f_i$  sont des fonctions linéaires affines sur  $E$  (i.e. de la forme  $f_i = \varphi_i + \alpha_i$  avec  $\varphi_i \in E'$  et  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ). Soit  $a$  un point extrémal de  $K$ . Montrer que le nombre des indices  $i \in \{1; 2; \dots; N\}$  tels que  $f_i(a) = 0$  est  $\geq p$ ; autrement dit, tout sommet d'un polyèdre convexe dans  $\mathbf{R}^p$  est dans l'intersection d'au moins  $p$  faces dudit polyèdre.

*Exercice 6.* — Dans l'espace  $E$  de dimension  $n^2$  des matrices réelles  $[a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ , soit l'ensemble convexe :

$$A = \{a = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in E : a_{ij} \geq 0 \text{ pour tous } i, j \in \{1; 2; \dots; n\} \\ \text{et } \sum_{i=1}^n a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj} = 1 \text{ pour tout } k \in \{1; 2; \dots; n\}\}$$

des matrices dites bistochastiques. Soit  $P$  l'ensemble des matrices de permutation, i.e. qui ont un coefficient 1 exactement sur chaque ligne et sur chaque colonne, les autres coefficients étant nuls. Montrer que  $P = \text{Extr}(A)$  et en déduire un théorème de Birkhoff : toute matrice bistochastique est combinaison linéaire convexe de matrices de permutations, et même d'au plus  $(n - 1)^2 + 1$  d'entre elles.

Indication :  $A$  est un polyèdre convexe dans l'espace affine

$$\{a = [a_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{E} : \sum_{i=1}^n a_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{kj} = 1 \text{ pour tout } k \in \{1; 2; \dots; n\}\}$$

On montrera que cet espace est de dimension  $(n-1)^2$  et on appliquera l'exercice précédent.

# L'espace des fonctions continues sur un compact

Dans ce chapitre sont exposés quelques aspects de l'Analyse dans l'espace de Banach  $\mathcal{C}(X)$  des fonctions continues sur un espace compact  $X$ . Une notion de base est celle de sous-ensemble *équicontinu* de  $\mathcal{C}(X)$ . Cette propriété a la vertu de rendre uniforme la convergence simple. De plus l'équicontinuité est la seule condition qu'il faut ajouter à celles d'être fermée et bornée pour qu'une partie de  $\mathcal{C}(X)$  soit compacte (théorème d'Ascoli). En liaison avec l'équicontinuité nous étudions aussi la compacité dans l'espace  $\mathcal{O}(U)$  des fonctions holomorphes dans un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  (théorèmes de Montel, de Vitali) : contrairement au cas de  $\mathcal{C}(X)$  et, curieusement, de façon analogue au cas des espaces de dimension finie, le seul fait pour une partie de  $\mathcal{O}(U)$  d'être borné suffit pour qu'on ait dans cette partie la propriété de Bolzano-Weierstrass.

La seconde moitié du chapitre est consacrée au théorème de Weierstrass d'approximation uniforme des fonctions continues sur  $[0; 1]$  par des polynômes, et à la superbe axiomatisation de généralisation à  $\mathcal{C}(X)$  qu'en a donnée en 1948 le mathématicien américain Marshall Stone, en mettant en évidence le rôle joué dans la question par la structure d'algèbre de  $\mathcal{C}(X)$  et par la relation d'ordre dans cet espace. Le théorème de Weierstrass-Stone a d'importantes conséquences en Analyse fonctionnelle.

Enfin, nous terminons le chapitre par l'étude du prolongement à  $X$  d'une fonction définie et continue dans une partie fermée de  $X$  (théorème d'Urysohn).

## § 1. ÉQUICONTINUITÉ ET CONVERGENCE DANS LES ESPACES D'APPLICATIONS

Dans tout ce chapitre,  $X$  et  $F$  désignent des espaces métriques (en fait, pour ceux qui connaissent la Topologie générale :  $X$  pourrait être un espace topologique – les modifications

des énoncés et des démonstrations étant attendues et mineures). On pensera notamment au cas où  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble d'applications  $f : X \rightarrow F$ . On pensera notamment au cas où  $\mathcal{H}$  est un ensemble de fonctions définies dans  $X$ , à valeurs réelles ou complexes. De plus, l'ensemble favori sera celui où  $X$  est le segment  $[0; 1]$  de l'axe réel.

DÉFINITION 1. — Soit  $a$  un point de  $X$ . On dit que  $\mathcal{H}$  est équicontinu en  $a$  si quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe  $\eta > 0$  tel que, quelle que soit  $f \in \mathcal{H}$ , on ait

$$d_X(x, a) < \eta \Rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

On dit que l'ensemble  $\mathcal{H}$  est équicontinu dans  $X$  si  $\mathcal{H}$  est équicontinu en  $a$  pour tout  $a \in X$ .

Ainsi, l'équicontinuité en  $a$  requiert une cohérence dans la façon dont les diverses applications  $f \in \mathcal{H}$  sont continues en  $a$  : à un  $\varepsilon > 0$  donné on peut, dans la définition de la continuité, faire correspondre un unique voisinage de  $a$  dans  $X$  (donné par la boule de centre  $a$  et de rayon  $\eta$  dans le cas métrique que l'on considère) valable d'un seul coup pour toutes les fonctions  $f \in \mathcal{H}$ .

Tout ensemble fini  $\mathcal{H} = \{f_1; f_2; \dots; f_N\}$  d'applications continues au point  $a \in X$  est équicontinu en  $a$  car, si à  $\varepsilon > 0$  correspond, pour chaque  $i \in \{1; 2; \dots; N\}$ , un  $\eta_i$  tel que «  $d_X(x, a) < \eta_i \Rightarrow d_F(f_i(x), f_i(a)) < \varepsilon$  » il suffit de prendre  $\eta = \min_{i \in \{1; 2; \dots; N\}} \eta_i$ . Mais voici des exemples plus intéressants.

Exercice 1. — Soit  $X = [0; 1]$  et  $F = \mathbf{C}$  et soit  $k$  réel  $> 0$  donné. On note  $\mathcal{H}_k$  l'ensemble des fonctions  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  qui sont  $k$ -lipschitziennes de rapport  $k$ , c'est-à-dire telles que quels que soient  $x, y \in X$  on ait :

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Montrer que  $\mathcal{H}_k$  est équicontinu dans  $X$ . En déduire que l'ensemble  $\mathcal{H}'_k$  des  $f$  qui admettent sur  $[0; 1]$  une dérivée  $f'$  telle que  $|f'(x)| \leq k$  pour tout  $x \in X$ , est équicontinu sur  $X$ .

Exercice 2. — Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble de fonctions holomorphes dans  $U$  tel que, pour tout disque  $D$  fermé de rayon  $> 0$  et contenu dans  $U$ , il existe une constante  $M_D$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  et tout  $z \in D$  on ait  $|f(z)| \leq M_D$ .

1° Montrer que pour tout disque  $D$  comme ci-dessus, il existe une constante  $M'_D$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  on ait  $|f'(z)| \leq M'_D$ .

2° Montrer que l'ensemble  $\mathcal{H}$  est équicontinu sur  $U$ .

Rappelons quelques notions de base sur les convergences de suites de fonctions.

DÉFINITION 2. — Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite d'applications de  $X$  dans  $F$ , et soit  $g$  une application de  $X$  dans  $F$ . On dit que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement (ou ponctuellement) vers  $g$  dans  $X$  si

pour tout  $x \in X$  et tout  $\varepsilon > 0$  il existe un rang  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$  on a  $d_F(g(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ ,

alors qu'on dit que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $g$  dans  $X$  si

pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe un rang  $N$  tel que  
 pour tout  $x \in X$  et pour tout  $n \geq N$  on a  $d_F(g(x), f_n(x)) \leq \varepsilon$ .

*Exercice 3.* — Soit  $X = [0; 1]$  et  $F = \mathbf{R}$ . Donner un exemple simple d'une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions continues qui converge simplement sur  $X$  vers une fonction discontinue. Donner un exemple simple d'une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions continues qui converge simplement mais pas uniformément sur  $X$  vers la fonction nulle.

Nous allons voir que ces exemples n'auraient pas été possibles sous l'hypothèse supplémentaire que les  $f_n$  forment un ensemble équicontinu.

Soient à nouveau  $X$  et  $F$  des espaces métriques.

PROPOSITION 1. — Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite d'applications de  $X$  dans  $F$ . Soit  $a \in X$ . On suppose que  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinue en  $a$  et que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction  $g$ . Alors  $g$  est continue en  $a$ .

*Preuve.* On se donne  $\varepsilon > 0$ . On écrit l'équicontinuité en  $a$  de la famille  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  : il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$  et tout  $x \in B(a, \delta)$  on a  $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ . Par inégalité triangulaire, on a :

$$d(g(x), g(a)) \leq d(g(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), g(a)),$$

pour tout  $n \geq 0$ . Par convergence simple, pour  $n$  assez grand on a :

$$d(g(x), f_n(x)) < \varepsilon \quad \text{et} \quad d(f_n(a), g(a)) < \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon > 0$  est quelconque, on en déduit la continuité de  $g$  en  $a$ . □

Dans cette preuve, on ne fait rien d'autre que passer à la limite quand  $n \rightarrow \infty$  dans  $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ ; pour  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , cela donne  $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon$  à partir de  $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$ .

*Exercice 4.* — Soit  $X = [0; 1]$  et  $F = \mathbf{R}$ . On considère la suite des fonctions  $f_n : x \mapsto x^n$ . En quels points cette suite de fonctions est-elle équicontinue ?

PROPOSITION 2. — On suppose que  $F$  est complet et on se donne  $D$  une partie dense de  $X$ . On se donne aussi une suite d'applications  $f_n : X \rightarrow F$ . On suppose que l'ensemble  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinu sur  $X$  et que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $D$ . Alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur  $X$ .

*Preuve.* Par complétude de  $F$ , il suffit de montrer que pour tout  $x \in X$  la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy. On fixe donc  $x \in X$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On écrit l'équicontinuité en  $x$  de la famille  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  : il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$  et tout  $y \in B(x, \delta)$  on a  $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$ . Par densité il existe  $d \in D \cap B(x, \delta)$ , pour lequel en particulier  $d(f_n(x), f_n(d)) < \varepsilon$  pour tout  $n \geq 0$ . Par convergence simple, la suite  $(f_n(d))_{n \geq 0}$  est convergente, donc de Cauchy, et il existe  $n \geq 1$  tel que pour tous  $m, n \geq N$  on ait  $d(f_n(d), f_m(d)) < \varepsilon$ . Par inégalité triangulaire, pour tous  $m, n \geq N$  on a :

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(d)) + d(f_n(d), f_m(d)) + d(f_m(d), f_m(x)),$$

ce qui prouve bien que  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  est de Cauchy. □

PROPOSITION 3. — *On suppose X compact. On se donne  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite d'applications  $X \rightarrow F$ . On suppose que  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinu sur X et que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers une fonction g. Alors la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers g uniformément sur X.*

*Preuve.* Déjà, la proposition 1 dit que g est continue sur X. Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $x \in X$ , par équicontinuité en x de la famille  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  et continuité de g en x, il existe  $\delta_x > 0$  tel que pour tout  $n \geq 0$  et tout  $y \in B(x, \delta_x)$  on ait :

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon.$$

Par compacité de X, on extrait du recouvrement  $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$  un sous-recouvrement fini, disons  $X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta_i)$  avec  $\delta_i = \delta_{x_i}$ . Par convergence simple, il existe  $n \geq 0$  tel que pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  et tout  $n \geq N$ , on ait :  $d(g(x_i), f_n(x_i)) \leq \varepsilon$ . Soit maintenant  $x \in X$  quelconque : ce point est contenu dans une boule  $B(x_i, \delta_i)$  et pour tout  $n \geq N$  on peut écrire :

$$d(g(x), f_n(x)) \leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_n(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Bref :  $\|g - f_n\|_\infty \leq 3\varepsilon$  pour  $n \geq N$ . □

On peut synthétiser les propositions qui précèdent dans le résultat suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit X un espace métrique compact et soit F un espace métrique complet. Soit D une partie dense de X. On suppose que  $\{f_n\}_{n \geq 0}$  est équicontinu sur X et que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement sur D. Alors la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur X.* □

Exercice 5. — Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions polynomiales P à coefficients réels dont le maximum des valeurs absolues des coefficients est  $\leq 1$ .

1° On se donne un nombre réel  $b \in ]0; 1[$ . Soient  $x_0$  et x réels tels que  $|x| \leq b$  et  $|x_0| \leq b$ . Soit N un nombre entier  $> 0$ . Montrer que

$$|P(x) - P(x_0)| \leq \sum_{n=0}^N |x^n - x_0^n| + 2 \sum_{n=?+1}^{\infty} b^n.$$

2° En déduire que  $\mathcal{H}$  est équicontinu sur  $] - 1; 1[$ . Est-ce vrai sur  $[-1; 1]$  ?

## § 2. THÉORÈME D'ASCOLI

Dans un espace métrique, toute partie compacte est fermée et bornée. Réciproquement, dans  $\mathbf{R}^n$  il suffit qu'un ensemble soit fermé et borné pour qu'il soit compact : c'est le théorème de Borel-Lebesgue. En revanche, dans un espace normé de dimension infinie, on sait que la boule unité fermée, quoiqu'évidemment bornée, n'est jamais compacte : c'est le théorème de F. Riesz ; dans de tels espaces, il faut donc donner des conditions supplémentaires pour exprimer la compacité.

Soit  $X$  un espace compact et soit  $F$  un espace métrique complet. On notera  $\mathcal{C}(X, F)$  l'espace de toutes les applications continues de  $X$  dans  $F$ , muni de la distance  $d_\infty$  de la convergence uniforme :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

On sait que l'espace métrique  $(\mathcal{C}(X, F), d_\infty)$  est complet. En particulier, si  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , l'espace  $\mathcal{C}(X, F)$  est un espace vectoriel ; c'est un espace de Banach pour la norme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$

et  $d_\infty$  est la distance associée à cette norme.

Nous allons caractériser les parties compactes de l'espace métrique  $(\mathcal{C}(X, F), d_\infty)$ . Il est remarquable que l'équicontinuité soit la condition essentielle dans cette caractérisation.

**THÉORÈME 1 (Arzela-Ascoli).** — *Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}(X, F)$ , muni de la distance  $d_\infty$  de la convergence uniforme. Si  $x \in X$  désignons par  $\mathcal{H}(x)$  la partie de  $F$  formée des valeurs  $f(x)$  quand  $f$  parcourt  $\mathcal{H}$ . Pour que  $\mathcal{H}$  soit une partie compacte de  $(\mathcal{C}(X, F), d_\infty)$ , il faut et il suffit que les trois conditions suivantes soient simultanément satisfaites :*

- (i) *la partie  $\mathcal{H}$  est fermée dans  $\mathcal{C}(X, F)$  ;*
- (ii) *quel que soit  $x \in X$  l'adhérence de  $\mathcal{H}(x)$  dans  $F$  est compacte ;*
- (iii) *la partie  $\mathcal{H}$  est un ensemble équicontinu d'applications  $X \rightarrow F$ .*

*Remarque 1.* — Si  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , la condition (ii) signifie simplement que, quel que soit  $x \in X$ , l'ensemble  $\mathcal{H}(x)$  est borné dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , ce qui, en présence de l'hypothèse (iii), équivaut à l'hypothèse (ii'), en apparence plus forte que (ii), suivante :

(ii') la partie  $\mathcal{H}$  est bornée dans  $\mathcal{C}(X, F)$ , i.e. il existe une constante  $M$  telle que, quels que soient  $f \in \mathcal{H}$  et  $x \in X$ , on ait :  $|f(x)| \leq M$ .

*Exercice 1.* — Si  $F = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , justifier que « (ii) et (iii) » équivaut à « (ii') et (iii) ».

*Preuve.* Prouvons d'abord la partie banale du théorème, à savoir que les conditions mentionnées sont nécessaires. Soit  $\mathcal{H}$  une partie compacte de  $(\mathcal{C}(X, F), d_\infty)$ . En particulier, elle est fermée, d'où (i). Puis, à  $x \in X$  fixé, on utilise que l'application d'évaluation  $f \mapsto f(x)$  est continue de  $\mathcal{C}(X, F)$  dans  $F$ , car on a :  $d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g)$ , et donc l'image  $\mathcal{H}(x)$  du compact  $\mathcal{H}$  par cette application est compacte elle aussi. On vient de prouver (ii). Enfin, prouvons (iii). Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la condition du  $\varepsilon$ -recouvrement pour le compact  $\mathcal{H}$ , il existe  $f_1, f_2, \dots, f_p \in \mathcal{H}$ , en nombre fini, telles que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  on ait  $d_\infty(f, f_i) \leq \frac{\varepsilon}{3}$  pour un indice  $i \in \{1; 2; \dots; p\}$  convenable. Soit  $x_0 \in X$ . Par équicontinuité de  $\{f_1; f_2; \dots; f_p\}$  en ce point, il existe  $\eta > 0$  tel que  $d_X(x, x_0) < \eta$  entraîne que  $d(f_i(x), f_i(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$  quel que soit l'indice  $i \in \{1; 2; \dots; p\}$ . Dès lors, l'inégalité  $d_X(x, x_0) < \eta$  entraîne que quelle soit  $f \in \mathcal{H}$  on ait :

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

où l'indice  $i$  est l'indice choisi comme ci-dessus par rapport à  $f$ . On a donc prouvé (iii) et le finalement le fait que les conditions mentionnées sont nécessaires à la compacité.

On va prouver maintenant que les conditions en question sont suffisantes pour la compacité d'une partie  $\mathcal{H}$  de  $(\mathcal{C}(X, F), d_\infty)$ , en commençant par le cas particulier où  $X = [0; 1]$  et  $F = \mathbf{C}$ . C'est une démonstration instructive car elle utilise le procédé diagonal, et donc toutes les ressources de la dénombrabilité.

Soit donc pour le moment  $X = [0; 1]$  et  $F = \mathbf{C}$ ; soit  $D = \mathbf{Q} \cap [0; 1]$  l'ensemble des nombres rationnels  $r$  tels que  $0 \leq r \leq 1$  : c'est un ensemble dénombrable et dense dans  $[0; 1]$ . Ordonnons-le :  $D = \{r_1; r_2; \dots r_n; \dots\}$  en une suite (peu importe l'ordre). Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii). Puisque déjà  $\mathcal{H}$  est fermée dans  $\mathcal{C}$ , pour montrer qu'elle est compacte il suffit de prouver la propriété de Bolzano-Weierstrass, à savoir que si  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite dans  $\mathcal{H}$  on peut en extraire une sous-suite qui converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

Or, d'après l'hypothèse (ii), la suite de nombres complexes  $(f_n(r_1))_{n \geq 0}$  est bornée; donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass dans  $\mathbf{C}$ , il existe une suite  $(f_n^1)_{n \geq 0}$  extraite de  $(f_n)_{n \geq 0}$  telle que la suite numérique  $(f_n^1(r_1))_{n \geq 0}$  converge dans  $\mathbf{C}$ . Puis, d'après l'hypothèse (ii) appliquée au point  $x = r_2$ , il existe une suite  $(f_n^2)_{n \geq 0}$  extraite de  $(f_n^1)_{n \geq 0}$  telle que la suite numérique  $(f_n^2(r_2))_{n \geq 0}$  converge dans  $\mathbf{C}$  (alors que la suite  $(f_n^2(r_1))_{n \geq 0}$  reste convergente). On itère ce raisonnement, et l'on prouve ainsi que pour tout entier  $p > 1$  il existe une suite  $(f_n^p)_{n \geq 0}$  extraite de  $(f_n^{p-1})_{n \geq 0}$ , donc de  $(f_n)_{n \geq 0}$ , telle que les suites numériques  $(f_n^p(r_1))_{n \geq 0}, (f_n^p(r_2))_{n \geq 0}, \dots, (f_n^p(r_n))_{n \geq 0}$  convergent.

La suite « diagonale »  $(g_n)_{n \geq 0} = (f_n^n)_{n \geq 0}$  est extraite de  $(f_n)_{n \geq 0}$  et converge simplement sur  $D$  car, quel que soit  $p$ , dès que  $n > p$  la suite  $(f_n^n(r_p))_{n \geq 0}$  est extraite de la suite convergente  $(f_n^p(r_p))_{n \geq 0}$ . Or l'ensemble des  $g_n$  est contenu dans  $\mathcal{H}$ , donc équicontinu dans  $X$ . Le théorème de la section précédente assure donc que la suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $X$ , donc au sens de  $d_\infty$  dans  $\mathcal{C}$ .

Cette démonstration par le procédé diagonal vaut plus généralement chaque fois que l'espace compact  $X$  est *séparable*, i.e. contient une partie dénombrable et dense, donc pour la plupart des espaces compacts usuels en Analyse, et ceci même pour  $F$  métrique complet quelconque au lieu de  $\mathbf{C}$ .

*Remarque 2.* — D'autres utilisations bien connues du procédé diagonal sont : la démonstration par Cantor de la non dénombrabilité de  $\mathbf{R}$ , le fait que toute limite en norme d'opérateurs compacts est encore un opérateur compact, et le théorème de Montel que nous verrons à la section suivante.

Donnons maintenant la preuve du théorème d'Ascoli, valable dans le cas général (et même si  $X$  est un espace topologique compact non nécessairement métrique). Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, F)$  satisfaisant les conditions (i), (ii) et (iii). D'après (i), l'espace  $\mathcal{H}$  est complet donc il suffit, pour vérifier sa compacité, de prouver sa précompacité, i.e. de vérifier la condition d' $\varepsilon$ -recouvrement fini pour  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Soit donc  $\varepsilon > 0$ . D'après (iii) – condition d'équicontinuité, pour tout  $y \in X$  il existe un ouvert  $U_y$  de  $X$ , contenant  $y$  et tel que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  on a :  $d(f(x), f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Par compacité de  $X$ , il existe

$y_1, y_2, \dots, y_p$  en nombre fini dans  $X$  tel que  $X$  soit recouvert par les ouverts  $U_{y_i}$ . D'après (ii) – condition de compacité des ensembles de valeurs, la réunion  $K = \bigcup_{i=1}^p \overline{\mathcal{H}(y_i)}$  est une partie compacte de  $F$ , donc il existe des  $c_1, c_2, \dots, c_m \in K$  tels que les boules fermées  $\overline{B}(c_j, \frac{\varepsilon}{4})$  ( $1 \leq j \leq m$ ) recouvrent  $K$ . Soit  $\Phi$  l'ensemble des applications  $i \mapsto \varphi(i)$  de l'ensemble fini  $\{1; 2; \dots, p\}$  dans l'ensemble fini  $\{1; 2; \dots, m\}$  :  $\Phi$  est fini. Pour toute  $\varphi \in \Phi$ , notons  $\mathcal{H}_\varphi$  l'ensemble des  $f \in \mathcal{H}$  telles que pour tout  $i \in \{1; 2; \dots, p\}$  on a :  $d(f(y_i), c_{\varphi(i)}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Il est évident qu'on a :  $\mathcal{H} = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{H}_\varphi$ . Pour achever la démonstration, nous allons voir que si  $f_0$  est choisie dans  $\mathcal{H}_\varphi$  et si  $f$  est quelconque dans  $\mathcal{H}_\varphi$ , on a :  $d_\infty(f, f_0) \leq \varepsilon$ . En effet, soit  $x \in X$ , et soit  $i$  l'un des indices dans  $\{1; 2; \dots, p\}$  tels que  $x \in U_{y_i}$ . On a :

$$\begin{aligned} d(f_0(x), f(x)) &\leq d(f_0(x), f_0(y_i)) + d(f_0(y_i), c_{\varphi(i)}) + d(c_{\varphi(i)}, f(y_i)) + d(f(y_i), f(x)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

par définition des ouverts  $U_y$  et des ensembles de fonctions  $\mathcal{H}_\varphi$ . □

*Exercice 2.* — L'adhérence dans  $\mathcal{C}(X, F)$  d'une partie équicontinue est une partie équicontinue. Donc, dans l'énoncé du théorème d'Ascoli « (ii) & (iii) » est une condition nécessaire et suffisante pour que l'adhérence de  $\mathcal{H}$  soit compacte.

*Exercice 3.* — Soit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$ . On se donne une fonction continue  $K(\cdot, \cdot)$  sur le carré  $[0; 1] \times [0; 1]$  de  $\mathbf{R}^2$  à valeurs complexes. À toute  $f \in \mathcal{C}$  on fait correspondre la fonction  $Tf$  définie sur  $[0; 1]$  par :

$$Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy.$$

L'application  $f \mapsto Tf$  s'appelle l'opérateur intégral de noyau  $K$ . Soit  $\mathcal{H}$  l'image par  $T$  de la boule unité de  $\mathcal{C}$ . Montrer que l'adhérence de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{C}$  est compacte. Cet exercice annonce la théorie de Fredholm, qui sera développée plus loin.

*Exercice 4.* — Si  $k$  est un nombre réel  $> 0$ , on note  $\mathcal{H}_k$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[0; 1]$ , à valeurs réelles, telles que  $f(0) = 0$  et satisfaisant

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in [0; 1].$$

On pose  $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$  et pour  $f \in \mathcal{E}$ , on note  $N(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathcal{H}_k\}$ .

1° Justifier que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{E}$ .

2° Prouver que l'on a  $\|f\|_\infty \leq N(f)$  pour toute  $f \in \mathcal{E}$  mais que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  ne sont pas des normes équivalentes sur  $\mathcal{H}_k$ .

3° On fixe  $k > 0$ . Discuter la compacité de  $\mathcal{H}_k$  dans  $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$  et dans  $(\mathcal{E}, N(\cdot))$ .

*Exercice 5.* — Soit  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  l'espace vectoriel des fonctions  $f$  bornées dans  $\mathbf{R}$ , à valeurs complexes, avec la norme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ . Soit  $E$  le sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{B}$  engendré par les fonctions exponentielles  $x \mapsto \exp(i\lambda x)$ , où  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Les fonctions  $f \in E$  sont appelées fonctions presque périodiques sur  $\mathbf{R}$ . Si  $f \in E$  et  $\tau \in \mathbf{R}$ , on note  $f_\tau$  la fonction telle que  $f_\tau(x) = f(x - \tau)$  pour tout  $x \in \mathbf{R}$ . Montrer que les  $f_\tau$  sont dans  $E$  et que, si  $f \in E$  est donnée, l'ensemble  $\mathcal{H}_f$  des  $f_\tau$ , où  $\tau$  parcourt  $\mathbf{R}$ , est d'adhérence compacte dans  $E$ . Indication : on commencera par traiter le cas où  $f$  est une exponentielle  $x \mapsto \exp(i\lambda x)$ , puis celui où  $f$  est un combinaison linéaire  $g$  de telles exponentielles ;

dans le cas général, on prouvera la précompacité pour  $\mathcal{H}_f$  à partir de celle de  $\mathcal{H}_g$  pour  $g$  approchant convenablement  $f$ .

### § 3. ANALYSE DANS L'ESPACE DES FONCTIONS HOLOMORPHES

Soit  $U$  un ensemble ouvert non vide fixé du plan complexe. Notons  $\mathcal{O}(U)$  l'espace vectoriel sur  $\mathbf{C}$  des fonctions  $f = f(z)$  définies et holomorphes dans  $U$ . On ne fait pas de  $\mathcal{O}(U)$  un espace normé, mais pour y pratiquer néanmoins l'Analyse, on utilise la *convergence uniforme sur tout compact* de  $U$ .

DÉFINITION 1. — Une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{O}(U)$  converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers une fonction  $g$  si :

Pour tout compact  $X$  dans  $U$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N = N_{\varepsilon, X}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $z \in X$  on a :

$$|g(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Nous dirons plus brièvement que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g$  dans  $\mathcal{O}(U)$ .

Remarque 1. — 1. Si c'est le cas, la fonction limite est automatiquement holomorphe dans  $U$ , donc appartient à  $\mathcal{O}(U)$ . En effet, soit  $a \in U$ ; montrons que  $g$  est dérivable au sens complexe au voisinage de  $a$ . Soit  $r > 0$  assez petit pour que le disque  $D = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r\}$  soit contenu dans  $U$ . Pour tout  $z \in D^\circ$ , on a la formule intégrale de Cauchy :

$$f_n(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{f_n(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

qui évidemment converge quand  $n \rightarrow \infty$  vers

$$g(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{g(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

et cette fonction est bien dérivable au sens complexe par rapport à  $z$ , sous le signe somme dans le membre de gauche : pour  $|z - a| < r$ , on a :

$$g'(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|z-a|=r} \frac{g(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi.$$

2. Pour vérifier la convergence uniforme sur tout compact, on peut en fait se contenter de la tester sur une famille particulière (mais bien choisie) de compacts dans  $X$ , par exemple sur la famille des disques fermés. Supposons qu'une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $\mathcal{O}(U)$  satisfasse la condition :

Pour tout disque fermé  $D$  contenu dans  $U$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $N = N_{\varepsilon, D}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et pour tout  $z \in D$  on a :

$$|g(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon.$$

Il s'agit de voir que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $U$  vers  $g$ . Soit  $X$  un compact contenu dans  $U$ . Tout point  $a \in X$  est le centre d'un disque fermé  $D_A$  de rayon  $> 0$  et contenu dans  $U$ . Puisque  $X$  est compact, il existe un ensemble fini de points  $a_1, a_2, \dots, a_p$  de  $X$  tels que

$$X \subset D_{a_1} \cup D_{a_2} \cup \dots \cup D_{a_p}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , et soient  $N_{\varepsilon, D_{a_1}}, N_{\varepsilon, D_{a_2}}, \dots, N_{\varepsilon, D_{a_p}}$  les entiers donnés par la condition de convergence uniforme sur les disques cités ci-dessus. Posons

$$N_{\varepsilon, X} = \max_{1 \leq i \leq p} N_{\varepsilon, D_{a_i}}.$$

Si  $z \in X$ , on a  $z \in D_{a_i}$  pour au moins un indice  $i$ ; donc, puisque  $N_{\varepsilon, X} \geq N_{\varepsilon, D_{a_i}}$  :

$$n \geq N_{\varepsilon, X} \implies |g(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve la convergence de  $(f_n)_{n \geq 0}$  vers  $g$  dans  $\mathcal{O}(U)$ .

*Exercice 1.* — Il s'agit d'un rappel de théorie élémentaire des séries entières. Soit  $0 < R \leq +\infty$ , et soit  $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < R\}$ . Soit  $f \in \mathcal{O}(U)$ . On a :  $f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$  où la série converge pour tout  $z \in U$ . Montrer que la suite des sommes partielles  $f_n$  définie par  $f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$  converge vers  $f(z)$  dans  $\mathcal{O}(U)$ .

**DÉFINITION 2.** — Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{O}(U)$ . On dit que  $\mathcal{H}$  est bornée dans  $\mathcal{O}(U)$  si elle est bornée sur tout compact de  $U$ , c'est-à-dire si pour tout compact  $X$  de  $U$  il existe une constante  $M_X > 0$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{H}$  et pour tout  $z \in X$  on ait  $|f(z)| \leq M_X$ .

Cette condition est équivalente à la suivante : pour tout disque fermé  $D$  de  $U$  il existe une constante  $M_D > 0$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{H}$  et pour tout  $z \in D$  on ait  $|f(z)| \leq M_D$ .

En effet, sous la seconde condition, en s'étant donné un compact  $X$  on peut trouver un recouvrement comme précédemment

$$X \subset D_{a_1} \cup D_{a_2} \cup \dots \cup D_{a_p},$$

et il suffit alors de poser

$$M_X = \max_{1 \leq i \leq p} M_{\varepsilon, D_{a_i}}$$

pour vérifier la condition pour  $X$ .

Dans les deux propositions ci-après nous allons voir que, du point de vue de l'Analyse dans l'espace  $\mathcal{O}(U)$ , la dérivation est une opération très régulière.

**PROPOSITION 1.** — Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite qui converge vers  $g$  dans  $\mathcal{O}(U)$ . Alors la suite des dérivées  $(f'_n)_{n \geq 0}$  converge vers la dérivée  $g'$  dans  $\mathcal{O}(U)$ .

*Preuve.* On va prouver la condition de convergence uniforme sur les disques pour les dérivées. Soit  $D_a = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r\}$  un disque fermé contenu dans  $U$ . Il existe  $r_1 > r$  tel que le disque  $D_a^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r_1\}$  soit encore contenu dans  $U$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par l'hypothèse que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $g$  dans  $\mathcal{O}(U)$ , il existe  $N_\varepsilon$  tel que pour tout  $z \in D_a^1$  on ait :

$$|g(z) - f_n(z)| \leq \frac{(r_1 - r)^2}{r_1} \varepsilon.$$

Mais alors, pour tout  $z \in D_a$ , d'après la formule intégrale de Cauchy pour la dérivée, on a :

$$|g'(z) - f'_n(z)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi-a|=r_1} \frac{g(\xi) - f_n(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{2\pi r_1}{2\pi} \frac{1}{(r_1 - r)^2} \sup_{|\xi-a|=r_1} |g(\xi) - f_n(\xi)|$$

qui est  $\leq \varepsilon$  dès que  $n \geq N_\varepsilon$ . Ceci prouve la proposition, par la réduction initiale.  $\square$

*Exercice 2.* — Constater combien cette situation diffère du cas de la variable réelle, en exhibant une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions dérivables sur  $[0; 1]$  qui converge uniformément vers une fonction  $g$  dérivable, mais telle que les suites numériques  $(f'_n(x))_{n \geq 0}$  n'aient de limite pour aucun  $x \in [0; 1]$ .

PROPOSITION 2. — Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{O}(U)$  et soit  $\mathcal{H}' = \{f' : f \in \mathcal{H}\}$ . Si  $\mathcal{H}$  est bornée dans  $\mathcal{O}(U)$ , alors  $\mathcal{H}'$  l'est aussi.

*Preuve.* On utilise là aussi la réduction à la famille des disques fermés. Soit  $D_a = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r\}$  un disque fermé contenu dans  $U$ . On cherche une constante  $M'_{D_a}$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  et tout  $z \in D_a$  on ait :  $|f'(z)| \leq M'_{D_a}$ . Il existe  $r_1 > r$  tel que le disque  $D_a^1 = \{z \in \mathbf{C} : |z - a| \leq r_1\}$  soit encore contenu dans  $U$ , et pour tout  $z \in D_a$  on a :

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2i\pi} \int_{|\xi-a|=r_1} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \frac{2\pi r_1}{2\pi} \frac{1}{(r_1 - r)^2} M_{D_a^1},$$

où  $M_{D_a^1}$  est une constante provenant de la condition que  $\mathcal{H}$  est bornée dans  $\mathcal{O}(U)$ . Ceci prouve la proposition, par la réduction initiale.  $\square$

COROLLAIRE 1. — Toute partie bornée dans  $\mathcal{O}(U)$  est équicontinue.

*Preuve.* Soit  $\mathcal{H}$  une partie bornée dans  $\mathcal{O}(U)$ . Soit  $a \in U$ . Pour démontrer l'équicontinuité de  $\mathcal{H}$  en  $a$ , on se place dans un disque  $D_a$  centré en  $a$ , de rayon  $> 0$ , contenu dans  $U$ . D'après la proposition 2, il existe une constante  $M'_{D_a}$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  et pour tout  $z \in D_a$  on a :  $|f'(z)| \leq M'_{D_a}$ . En intégrant le long du segment  $[a; z]$ , on obtient que, pour toute  $f \in \mathcal{H}$  et pour tout  $z \in D_a$ , on a :

$$|f(z) - f(a)| = \left| \int_a^z f'(\xi) d\xi \right| \leq |z - a| \sup_{\xi \in [a; z]} |f'(\xi)| \leq M'_{D_a} |z - a| \leq \varepsilon$$

dès que  $|z - a| \leq \frac{\varepsilon}{M'_{D_a}}$ .  $\square$

COROLLAIRE 2. — Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{O}(U)$ . Supposons que l'ensemble des  $f_n$  est borné dans  $\mathcal{O}(U)$ , ce qui signifie que

$$\sup_{n \geq 0} \sup_{z \in X} |f_n(z)| = M_X < +\infty$$

pour tout compact  $X$  contenu dans  $U$ . Supposons de plus que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement dans une partie dense de  $U$ . Alors la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $U$ , c'est-à-dire dans  $\mathcal{O}(U)$ .

*Preuve.* Vu le corollaire 1, c'est une conséquence immédiate des propositions 2 et 3 appliquées aux parties compactes  $X$  de  $U$ .  $\square$

THÉORÈME 1 (Montel). — Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{O}(U)$ . Supposons que l'ensemble des  $f_n$  est borné dans  $\mathcal{O}(U)$ . Alors on peut extraire de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite convergente dans  $\mathcal{O}(U)$ .

*Preuve.* Les points  $r = x + iy$  de  $U$  avec  $x, y \in \mathbf{Q}$  forment un ensemble  $D = \{r_1; r_2; \dots; r_n; \dots\}$  dénombrable et dense dans  $U$ . Pour tout  $r \in D$  l'ensemble de nombres complexes  $\{f_n(r)\}_{n \geq 0}$  est borné car  $\{r\}$  est compact. Le procédé diagonal utilisé dans la preuve du théorème d'Ascoli fournit une suite  $(g_n)_{n \geq 0}$  extraite de la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ , qui converge simplement en tout point de  $D$ , donc dans  $\mathcal{O}(U)$  d'après le corollaire 2.  $\square$

Cet énoncé est remarquable et même étonnant : l'espace  $\mathcal{O}(U)$ , de même que l'espace de dimension finie  $\mathbf{R}^n$ , jouit de la propriété de Bolzano-Weierstrass, à savoir que de toute suite bornée on peut extraire une suite convergente, alors que ceci n'est jamais vrai dans un espace vectoriel normé de dimension infinie (théorème de F. Riesz).

Voici un complément au théorème de Montel.

THÉORÈME 2 (Vitali). — Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbf{C}$  et soit  $D$  une partie de  $U$  ayant au moins un point d'accumulation dans  $U$ , i.e.  $D$  contient au moins une suite injective  $(r_p)_{p \geq 0}$  qui converge vers un point de  $U$ . Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{O}(U)$ . Supposons que l'ensemble des  $f_n$  soit borné dans  $\mathcal{O}(U)$  et que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement dans  $D$ . Alors la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur tout compact de  $U$ , c'est-à-dire dans  $\mathcal{O}(U)$ .

*Preuve.* Remarque préliminaire : puisque  $U$  est connexe, si  $g_1$  et  $g_2$  sont holomorphes sur  $U$  et si  $g_1(r_p) = g_2(r_p)$  pour tout  $p \geq 0$ , alors  $g_1 = g_2$  par le principe des zéros isolés appliqué à  $g_1 - g_2$ .

D'après le théorème 1, il existe des suites extraites de  $(f_n)_{n \geq 0}$  qui convergent dans  $\mathcal{O}(U)$ . Par la remarque préliminaire et l'hypothèse que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement dans  $D$ , donc en chaque  $r_p$ , pour toute telle sous-suite convergente, la limite  $g(z)$  est toujours la même (car elle est déterminée par ses valeurs en les  $r_p$ ). Par l'absurde, supposons que  $(f_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas vers  $g$  dans  $\mathcal{O}(U)$ . Il existe alors un compact  $X$  de  $U$  et un  $\alpha > 0$  tels que, pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe un entier  $n_k$  et un  $z_k \in X$ , avec  $n_k > n_{k-1}$  et  $|g(z_k) - f_{n_k}(z_k)| > \alpha$ . De la suite bornée  $(f_{n_k})_{k \geq 0}$  on ne peut extraire aucune sous-suite convergente (ce qui est en contradiction avec le théorème 1), car cette dernière suite devrait alors converger vers  $g$  tout en satisfaisant les inégalités  $|g(z_k) - f_{n_k}(z_k)| > \alpha$ .  $\square$

*Exercice 3.* — On pose, pour tout  $z \in \mathbf{C}$  :

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Montrer que  $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  en procédant comme suit.

- 1° Vérifier que c'est vrai pour tous les  $z$  réels  $> 0$  en passant au logarithme.
- 2° Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ , où  $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ , est bornée dans  $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ .
- 3° En déduire, par le théorème de Vitali, que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ , disons vers  $g$ .

4° Constater que  $g(z) = \exp(z)$  car c'est vrai pour  $z$  réel  $> 0$ .

*Exercice 4.* — Soit  $U$  le disque  $\{z \in \mathbf{C} : |z - 1| < 1\}$ . Si  $z \in U$  on pose :

$$\log(z) = \sum_{m \geq 1} -\frac{(1-z)^m}{m},$$

somme d'une série absolument convergente, et

$$f_n(z) = \sum_{m=1}^n -\frac{(1-z)^m}{m}.$$

1° Si  $z$  est réel et dans  $U$ , constater que  $\log(z)$  est la fonction bien connue telle que  $\exp(\log(z)) = z$ .

2° Montrer que, quand  $n \rightarrow \infty$ , la suite  $(\exp \circ f_n)_{n \geq 1}$  converge dans  $\mathcal{O}(U)$ .

3° En déduire que, pour tout  $z \in U$ , on a :  $\exp(\log(z)) = z$ .

*Exercice 5.* — Soit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}([-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], \mathbf{R})$ , et soit  $\mathcal{H}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  formé des fonctions polynomiales à coefficients réels tous  $\leq 1$  en valeur absolue. Soit  $\overline{\mathcal{H}}$  l'adhérence de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{C}$ .

1° Montrer que, pour toute  $f \in \mathcal{H}$ , la dérivée  $\frac{df}{dx}$  est bornée en valeur absolue par 4 sur  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

2° En déduire que  $\overline{\mathcal{H}}$  est équicontinu dans  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .

3° Montrer que  $\overline{\mathcal{H}}$  est un sous-ensemble convexe et compact dans  $\mathcal{C}$ .

4° En appliquant le théorème de Vitali, montrer que toute  $f \in \overline{\mathcal{H}}$  est la restriction au segment  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  d'une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ , notée  $\tilde{f}$ .

5° Caractériser les fonctions  $\tilde{f}$  où  $f \in \overline{\mathcal{H}}$ , par une propriété de leurs coefficients de Taylor à l'origine. Indication : on pourra utiliser la formule, pour  $n \geq 0$  et  $0 \leq r < 1$ , donnant ces coefficients  $a_n$ , à savoir :  $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$ .

6° Déterminer l'ensemble des points extrémaux de  $\overline{\mathcal{H}}$ .

*Exercice 6.* — Soit  $U$  la bande  $\{z = x + iy : 0 < x < 1; y > 0\}$ . Soit  $f$  une fonction holomorphe et bornée dans  $U$ . Supposons que  $l = \lim_{y \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{2} + iy)$  existe. Montrer qu'alors, pour tout  $x \in ]0; 1[$ , on a :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} f(x + iy)$$

et ceci uniformément pour  $x \in [a; b]$  quels que soient  $a < b$  dans  $]0; 1[$ . Indication : appliquer le théorème de Vitali à la suite  $f_n(z) = f(z + in)$  dans le rectangle défini par  $0 < x < 1$  et  $0 < y < 2$ .

§ 4. APPROXIMATION UNIFORME DES FONCTIONS CONTINUES SUR UN COMPACT

Dans tout ce paragraphe,  $X$  désigne un espace compact, et  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  est l'espace de Banach sur  $\mathbf{R}$  des fonctions continues sur  $X$  à valeurs réelles, muni de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Outre les opérations vectorielles, on a dans  $\mathcal{C}$  :

- la multiplication des fonctions : pour  $f, g \in \mathcal{C}$ , la fonction  $fg$  est définie par  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  pour tout  $x \in X$ ; la compatibilité avec la norme est l'inégalité de *sous-multiplicativité* :

$$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty,$$

ce qui fait de  $\mathcal{C}$  une *algèbre de Banach* dont la théorie générale sera développée plus loin dans ce cours.

- la relation d'ordre  $\leq$ , où  $f \leq g$  signifie que  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in X$ . Si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{C}$ , on définit leurs *enveloppe supérieure*  $\sup(f, g)$  et *enveloppe inférieure*  $\inf(f, g)$  par les formules pour tout  $x \in X$  :

$$\sup(f, g)(x) = \max\{f(x); g(x)\} \quad \text{et} \quad \inf(f, g)(x) = \min\{f(x); g(x)\}.$$

*Exercice 1.* — Justifier que les fonctions  $\sup(f, g)$  et  $\inf(f, g)$  sont dans  $\mathcal{C}$  puis, en définissant  $|f|$  par  $|f|(x) = |f(x)|$  pour tout  $x \in X$ , démontrer les formules :

$$|f| = \sup(f, -f), \quad \sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|).$$

Montrer que  $f \mapsto |f|$  est une application continue de  $\mathcal{C}$  dans lui-même.

Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}$  et soit  $\overline{\mathcal{H}}$  son adhérence dans  $\mathcal{C}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}$ . On dit que  $f$  peut être approchée uniformément dans  $X$  par des fonctions appartenant à  $\mathcal{H}$  si  $f$  appartient à  $\overline{\mathcal{H}}$ , autrement dit si : quel que soit  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction  $u_\varepsilon \in \mathcal{H}$  telle que, quel que soit  $x \in X$ , on ait :  $|f(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$ .

Dire que toute fonction continue sur  $X$  peut être approchée uniformément dans  $X$  par des fonctions appartenant à  $\mathcal{H}$ , c'est donc dire que  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ , ou encore que  $\mathcal{H}$  est dense dans l'espace de Banach  $\mathcal{C}$ . L'exemple historique est le théorème de Weierstrass, dont l'énoncé est que toute fonction continue  $[0; 1]$  est limite uniforme sur  $[0; 1]$  de fonctions polynomiales. C'est cet énoncé que nous allons retrouver après l'avoir généralisé considérablement, suivant les idées de M. Stone.

**THÉORÈME 1 (Stone-Weierstrass).** — *Soit  $X$  un espace compact. On se donne  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  telle que :*

- (i)  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}$  ;
- (ii)  $\mathcal{H}$  est stable par multiplication : si  $u, v \in \mathcal{H}$ , alors  $uv \in \mathcal{H}$  ;
- (iii)  $\mathcal{H}$  contient la fonction constante égale à 1 ;
- (iv)  $\mathcal{H}$  sépare  $X$  : pour tous  $x \neq x'$  dans  $X$ , il existe  $u \in \mathcal{H}$  telle que  $u(x) \neq u(x')$ .

Alors  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ .

On retrouve bien le théorème historique en prenant  $X = [0; 1]$  et  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions polynomiales sur  $[0; 1]$ ; le seul polynôme  $x \mapsto x$  sert ici à séparer les points de  $X$ .

En fait, Stone a su dégager l'importance, dans la question, de la relation d'ordre sur  $\mathcal{C}$ ; le théorème de Stone-Weierstrass sera obtenu comme conséquence du

**THÉORÈME 2 (Stone).** — Soit  $X$  un espace compact. On se donne  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  telle que :

- (i)  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}$ ;
- (ii')  $\mathcal{H}$  est stable par prise de valeur absolue : si  $u \in \mathcal{H}$ , alors  $|u| \in \mathcal{H}$ ;
- (iii)  $\mathcal{H}$  contient la fonction constante égale à 1;
- (iv)  $\mathcal{H}$  sépare  $X$ .

Alors  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ .

Nous commençons par établir un lemme dont la démonstration est un bel argument de compacité.

**Lemme 1.** — Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}$  telle que si  $u_1$  et  $u_2$  sont dans  $\mathcal{H}$ , alors  $\max(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}(X; \mathbf{R})$ . On suppose que pour tout  $y \in X$  il existe  $u_y \in \mathcal{H}$  telle que  $u_y(y) > f(y)$ . Alors il existe  $v \in \mathcal{H}$  telle que  $v(x) > f(x)$  pour tout  $x \in X$ .

*Preuve.* Pour chaque  $y \in X$ , note  $U_y = \{x \in X : u_y(x) > f(x)\}$  : c'est un ouvert car c'est l'image réciproque de  $\mathbf{R}_+^\times$  par la fonction continue  $u_y - f$ ; en outre  $y \in U_y$ . Par compacité de  $X$ , qui est réunion de tous les  $U_y$ , on peut écrire  $X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_p}$  pour des  $y_i$  convenables et en nombre fini.

Par récurrence finie, la fonction  $v : x \mapsto \max\{u_{y_1}(x); u_{y_2}(x); \dots; u_{y_p}(x)\}$  est dans  $\mathcal{H}$ . Elle convient car un élément quelconque  $x \in X$  est dans un  $U_{y_i}$  au moins et on peut écrire :

$$v(x) \geq u_{y_i}(x) > f(x). \quad \square$$

De ce lemme, on déduit déjà le remarquable :

**THÉORÈME 3 (Dini).** — Soit  $X$  un espace compact. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ . On fait les hypothèses suivantes.

- (i) La suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement vers  $f$  dans  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ .
- (ii) La suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est monotone, c'est-à-dire ou bien décroissante ou bien croissante.

Alors  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément vers  $f$ , c'est-à-dire converge vers  $f$  pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

*Preuve.* On travaille dans le cas où la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  est croissante (cas auquel on peut toujours se ramener, quitte à opposer les fonctions). Alors, par monotonie la famille  $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n \geq 0}$  est stable par passage au maximum car pour  $m \geq n$ , on a :  $\max\{f_n; f_m\} = f_m$ .

Maintenant on se donne  $\varepsilon > 0$ . Par convergence simple, pour tout  $y \in X$  il existe  $u \in \mathcal{H}$  telle que  $u(y) > f(y) - \varepsilon$ . On applique le lemme précédent à la fonction  $f - \varepsilon$  (toujours avec  $\mathcal{H} = \{f_n\}_{n \geq 0}$ ) : il existe  $N$  tel que pour tout  $x \in X$  on ait :

$$f_N(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Finalement, pour tout indice  $n \geq N$  et pour tout  $x \in X$ , on a :

$$f(x) - \varepsilon < f_N(x) \leq f_n(x) \leq f(x),$$

soit  $\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . □

Le théorème de Dini a pour conséquence ce premier énoncé, d'apparence anecdotique, mais utile pour prouver le théorème de Weierstrass historique (approximation uniforme des fonctions continues sur un segment compact par des fonctions polynomiales).

*Lemme 2.* — On définit une suite  $(p_n)_{n \geq 0}$  de fonctions  $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$  par  $p_1(x) = 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$  et

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2} (x - p_n(x))^2.$$

Alors les fonctions  $p_n$  sont polynomiales et convergent uniformément vers  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0; 1]$ .

Remarquons qu'en remplaçant  $p_n(x)$  par  $p_n(x^2)$ , on voit que la fonction valeur absolue  $x \mapsto |x|$  est limite uniforme de fonctions polynomiales sur  $[0; 1]$ .

*Preuve.* Pour tout  $n \geq 1$ , un calcul montre que :

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = (\sqrt{x} - p_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2} (\sqrt{x} + p_n(x))\right),$$

ce qui permet de voir par récurrence que

$$p_n(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad p_n(x) \leq p_{n+1}(x) \leq \sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \in [0; 1].$$

À  $x$  fixé la suite numérique  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  est croissante et majorée. Elle converge donc vers  $g(x)$  qui satisfait  $g(x) = g(x) + \frac{1}{2} (x - g(x)^2)$ , autrement dit vers  $g(x) = \sqrt{x}$ . Ainsi on vient de voir que  $\sqrt{\cdot}$  est limite simple des  $p_n$  sur  $[0; 1]$ , et le théorème de Dini assure que la convergence est uniforme. □

La proposition suivante est au cœur de la démonstration de Stone ; sa démonstration n'est pas vraiment délicate si l'on a compris la preuve du lemme 1.

**PROPOSITION 1.** — Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}$  stable par prise d'enveloppe supérieure et inférieure, i.e. telle que si  $u_1$  et  $u_2$  sont dans  $\mathcal{H}$ , alors  $\sup(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$  et  $\inf(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ . Soit  $f \in \mathcal{C}$ . On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$  et quels que soient  $x, y \in X$  il existe une fonction  $u_{x,y}$  telle que

$$|f(x) - u_{x,y}(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |f(y) - u_{x,y}(y)| < \varepsilon.$$

Alors  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ .

*Preuve.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $x \in X$ , notons  $\mathcal{H}_x$  l'ensemble des fonctions  $u \in \mathcal{H}$  telles que  $u(x) < f(x) + \varepsilon$ . Par hypothèse, pour tout  $y \in X$ , on a :

$$u_{x,y} \in \mathcal{H}_x \quad \text{et} \quad u_{x,y}(y) > f(y) - \varepsilon.$$

De plus  $u_1, u_2 \in \mathcal{H}_x$  entraîne que  $\sup(u_1, u_2) \in \mathcal{H}_x$ . Donc, d'après le lemme 1, il existe une fonction  $u_x \in \mathcal{H}_x$  telle que pour tout  $z \in X$  on a :

$$u_x(z) > f(z) - \varepsilon.$$

Puisque  $u_x \in \mathcal{H}_x$ , on a de plus :  $u_x(x) < f(x) + \varepsilon$ . Soit  $\mathcal{H}'$  l'ensemble des  $u \in \mathcal{H}$  telles que l'on ait  $u(z) > f(z) - \varepsilon$  pour tout  $z \in X$ . Si  $u_1$  et  $u_2$  sont dans  $\mathcal{H}'$ , il est clair que  $\inf(u_1, u_2) \in \mathcal{H}'$ . Comme les  $u_x$  appartiennent à  $\mathcal{H}'$  et vérifient  $u_x(x) < f(x) + \varepsilon$ , d'après le lemme 1 il existe  $u \in \mathcal{H}'$  telle que quel que soit  $z \in X$  on a :  $u(z) < f(z) + \varepsilon$ . Finalement, pour cette fonction  $u$ , qui est évidemment dans  $\mathcal{H}$ , on a :  $\|f - u\|_\infty \leq \varepsilon$ .  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — Soit  $X$  un espace compact ayant au moins deux éléments. Soit  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C}$  telle que :

- (i)  $\mathcal{H}$  est stable par prise d'enveloppe supérieure et inférieure ;
- (ii) quels que soient  $x \neq y$  dans  $X$  et  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , il existe  $g \in \mathcal{H}$  telle que  $g(x) = \alpha$  et  $g(y) = \beta$ .

Alors  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ .

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Montrons que  $f$  et  $\mathcal{H}$  satisfont aux hypothèses de la proposition précédente. Si  $x \neq y$ , on y satisfait (pour tout  $\varepsilon > 0$ ) en prenant pour  $u_{x,y}$  la fonction  $g$  de la condition (ii) ci-dessus pour le choix de  $\alpha = f(x)$  et  $\beta = f(y)$ . Si  $x = y$ , prenons un  $z \neq x$  ; il suffit alors de choisir pour  $u_{x,y}$  la fonction  $g$  de la condition (ii) ci-dessus pour le choix de  $\alpha = f(x) = f(y)$  et  $\beta = f(z)$ .  $\square$

*Exercice 2.* — Par ce corollaire, démontrer que dans  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$  est uniformément dense l'ensemble des fonctions dont le graphe est une ligne polygonales à nombre fini de côtés.

Maintenant, tout est prêt pour obtenir sans effort la preuve du théorème de Stone.

*Preuve.* Les hypothèses (i) et (ii') entraînent que  $\mathcal{H}$  est stable par prise d'enveloppe supérieure et inférieure, car :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2} (f + g + |f - g|) \quad \text{et} \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2} (f + g - |f - g|).$$

Si  $X$  est réduit à un point, le théorème de Stone est évident (et sans intérêt). Désormais, on se place dans le cas où  $X$  a au moins deux éléments. Si  $x \neq y$  sont dans  $X$  et si  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ , donnons-nous grâce à l'hypothèse (iv) une fonction  $h \in \mathcal{H}$  telle que  $h(x) \neq h(y)$ . On considère alors la fonction  $g$  définie par :

$$z \mapsto g(z) = \alpha 1 + (\beta - \alpha) \frac{h(z) - h(x)}{h(y) - h(x)}.$$

Cette fonction  $g$  est dans  $\mathcal{H}$  par les hypothèses (i) et (iii), et tout a été fait pour que  $g(x) = \alpha$  et  $g(y) = \beta$ . Donc  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$  par le corollaire qui précède.  $\square$

*Exercice 3.* — Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact. Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des fonctions lipschitziennes sur  $X$ , i.e. telles qu'il existe une constante  $k$  (dépendant de  $f$ ) pour laquelle on ait  $|f(x) - f(y)| \leq kd(x, y)$  quels que soient  $x, y \in X$ . Montrer que  $\mathcal{H}$  est uniformément dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ .

Passons maintenant à la démonstration du théorème de Stone-Weierstrass.

*Preuve.* On va le déduire du théorème de Stone ; il suffit de voir que les hypothèses (i) à (iv) du théorème de Stone-Weierstrass entraînent l'hypothèse (ii') du théorème de Stone. En fait, il suffit de voir que ces quatre hypothèses entraînent

$$(ii'') \quad u \in \mathcal{H} \Rightarrow |u| \in \overline{\mathcal{H}}.$$

C'est une condition plus faible en apparence que (ii'), mais l'astuce est la suivante : vu la continuité de l'application  $u \mapsto |u|$  de  $\mathcal{C}$  dans lui-même, on saura alors que  $u \in \overline{\mathcal{H}}$  implique  $|u| \in \overline{\mathcal{H}}$ , et puisque que  $\overline{\mathcal{H}}$  est un sous-espace vectoriel, on lui appliquera le théorème de Stone, ce qui donnera  $\overline{\overline{\mathcal{H}}} = \mathcal{C}$ , soit  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$  puisque  $\overline{\overline{\mathcal{H}}} = \overline{\mathcal{H}}$ .

Pour vérifier (ii''), on se ramène au cas  $u \neq 0$ . Posons alors  $a = \|u\|_\infty$ . Soient les polynômes  $p_n$  du lemme 2, qui approchent uniformément la fonction racine carrée sur  $[0; 1]$ . La suite de fonctions  $u_n = ap_n(\frac{u^2}{a^2})$  est dans  $\mathcal{H}$  d'après les hypothèses (i) à (iii). La suite des fonctions  $u_n$ , quand  $n \rightarrow \infty$ , converge uniformément dans  $X$  vers la fonction  $a\sqrt{\frac{u^2}{a^2}} = |u|$ . Donc  $u \in \overline{\mathcal{H}}$ , ce qui montre que la condition (ii'') est satisfaite.  $\square$

Relisez l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass et constatez que, plus brièvement, il peut se lire : *toute sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ , qui contient 1 et sépare  $X$ , est dense dans  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ .*

Nous pouvons maintenant dérouler une série de corollaires importants.

**COROLLAIRE 2** (Weierstrass classique). — *Soit  $X$  une partie fermée et bornée de  $\mathbf{R}^n$ . Alors toute fonction  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  est limite uniforme sur  $X$  d'une suite de fonctions  $(p_k(x_1, x_2, \dots, x_n))_{k \geq 0}$  polynomiales en  $n$  variables et à coefficients réels.*

*Preuve.* En effet, un tel  $X$  est compact dans  $\mathbf{R}^n$  par Borel-Lebesgue ; l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions polynomiales satisfait les conditions (i), (ii) et (iii), ainsi que (iv) car si  $x$  et  $y$  sont distincts dans  $\mathbf{R}^n$ , l'une au moins de leurs coordonnées diffèrent (les fonctions coordonnées sont bien sûr polynomiales, de degré 1).  $\square$

**COROLLAIRE 3** (Stone-Weierstrass complexe). — *Soit  $X$  un espace compact. On se donne  $\mathcal{H}$  une partie de  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  telle que :*

- (i)  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}$  ;
- (ii)  $\mathcal{H}$  est stable par produit : si  $u, v \in \mathcal{H}$ , alors  $uv \in \mathcal{H}$  ;
- (iii)  $\mathcal{H}$  contient la fonction constante égale à 1 ;
- (iv)  $\mathcal{H}$  sépare  $X$  ; et
- (v)  $\mathcal{H}$  est stable par conjugaison complexe :  $u \in \mathcal{H}$  entraîne  $\bar{u} \in \mathcal{H}$ , où  $\bar{u}$  est la fonction sur  $X$  définie par  $\bar{u}(x) = \overline{u(x)}$  pour tout  $x \in X$ .

Alors  $\overline{\mathcal{H}} = \mathcal{C}$ , i.e. toute fonction continue à valeurs complexes sur  $X$  peut être approchée uniformément sur  $X$  par des fonctions dans  $\mathcal{H}$ .

Plus brièvement : toute sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ , contenant 1, séparante et auto-adjointe, est dense dans l'espace de Banach  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ .

*Preuve.* Soit  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$  l'ensemble des  $u \in \mathcal{H}$  telles que  $u(X) \subset \mathbf{R}$ . Il est clair que  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}} \subset \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  satisfait les conditions (i), (ii), (iii) du théorème de Stone-Weierstrass. De plus,  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$  satisfait (iv), c'est-à-dire sépare  $X$  : en effet, soient  $x, y \in X$  avec  $x \neq y$  ; il existe  $u \in \mathcal{H}$  telle que  $u(x) \neq u(y)$  ; les fonctions  $\mathbf{R}(u) = \frac{u+\bar{u}}{2}$  et  $\mathbf{I}(u) = \frac{u-\bar{u}}{2i}$  sont dans  $\mathcal{H}_{\mathbf{R}}$  et l'une au moins prend des valeurs différentes en  $x$  et en  $y$  car  $u = \mathbf{R}(u) + i\mathbf{I}(u)$ . Ainsi, par le théorème de Stone-Weierstrass toute fonction  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  est approchée uniformément sur  $X$  par des  $u \in \mathcal{H}_{\mathbf{R}}$ .  $\square$

*Exercice 4.* — Soit  $X$  un sous-ensemble compact de  $\mathbf{C}$ .

1° Montrer que toute fonction  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  peut être approchée uniformément sur  $X$  par des fonctions polynomiales en les variables  $z$  et  $\bar{z}$ , à coefficients complexes.

2° Soit  $X$  le disque unité  $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ . Soit  $\overline{\mathcal{H}}$  l'adhérence dans  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  de l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en la seule variable  $z$ . Montrer que pour toute  $f \in \overline{\mathcal{H}}$  on a la formule :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

et que, en revanche, la fonction continue  $f(z) = |z|$  ne possède pas cette propriété.

3° En déduire que  $\overline{\mathcal{H}}$  est différent de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ .

*Exercice 5.* — Soit  $a \leq b$  des nombres réels. Montrer que l'ensemble des fonctions de la forme  $x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k \exp(n_k x)$  où les  $\lambda_k$  appartiennent à  $\mathbf{R}$ , les  $n_k$  à  $\mathbf{N}$  et  $n$  est un indice entier, est uniformément dense dans  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{R})$ .

**COROLLAIRE 4.** — Soient  $X$  et  $Y$  des espaces compacts. Dans l'espace de Banach  $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$  est dense l'ensemble  $\mathcal{H}$  des sommes finies de fonctions  $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$  où  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  et  $g \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$ .

*Preuve.* En effet,  $\mathcal{H}$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$  et deux points  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  de  $X \times Y$ , où par exemple  $x_1 \neq x_2$ , sont séparés par  $d_X(x_1, \cdot)$  qui est dans  $\mathcal{H}$ .  $\square$

Ce corollaire, très utile, permet de travailler à variables séparées pour des problèmes à deux variables.

**COROLLAIRE 5.** — Toute fonction  $f = f(x)$  continue sur  $\mathbf{R}$ , à valeurs complexes, et de période  $2\pi$ , est limite uniforme sur  $\mathbf{R}$  de polynômes trigonométriques  $\sum_{k=-n}^n a_k e^{ikx}$  où  $n \in \mathbf{N}$  et les  $a_k$  appartiennent à  $\mathbf{C}$ .

*Preuve.* Soit  $X$  le cercle  $\{e \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$  ; il est compact. À toute  $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  de période  $2\pi$ , associons la fonction  $\tilde{f}$  définie sur  $X$  par la formule  $\tilde{f}(e^{ix}) = f(x)$  où  $0 \leq x \leq 2\pi$ . L'ensemble  $\mathcal{H}$  des  $\tilde{g}$ , où  $g$  est un polynôme trigonométrique sur  $\mathbf{R}$ , n'est

autre que l'ensemble  $\mathcal{H}$  des fonctions  $z \mapsto \sum_{k=-n}^n a_k z^k$ , où  $n \in \mathbf{N}$  et les  $a_k$  appartiennent à  $\mathbf{C}$ . Il est clair que  $\mathcal{H}$  remplit les hypothèses (i) à (v) du corollaire 3, ce qui achève la démonstration puisqu'évidemment :

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x) - g_n(x)| = \sup_{z \in X} |\tilde{f}(z) - \tilde{g}_n(z)|. \quad \square$$

*Exercice 6.* — 1° Utilisez vos connaissances classiques sur les séries de Fourier (théorème de Fejer) pour préciser l'énoncé du corollaire précédent.

2° Plus généralement, donnez un énoncé du type du corollaire précédent pour les fonctions périodiques de plusieurs variables.

*Exercice 7.* — On suppose connu (par exemple par le théorème de Fejer) le fait que toute fonction continue de période  $2\pi$  est limite uniforme sur  $\mathbf{R}$  de polynômes trigonométriques. En déduire une démonstration du théorème de Weierstrass historique : on se ramène à démontrer que les fonctions  $x \mapsto \sin(nx)$  et  $x \mapsto \cos(nx)$  sont sur  $[0; 2\pi]$  limites uniformes de fonctions polynomiales, ce qui résulte de leur développement en série de Taylor.

Revenons au théorème de Weierstrass historique : toute  $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$  est limite uniforme sur  $[0; 1]$  d'une suite  $(P_n)_{n \geq 0}$  de fonctions polynomiales à coefficients réels. Si  $f$  est donnée, peut-on préciser explicitement de tels  $P_n$  qui conviennent pour approximer  $f$ ? Réponse : oui.

THÉORÈME 4 (Bernstein). — Si  $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$ , posons pour tout  $n \geq 1$  :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \quad x \in [0; 1].$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - P_n\| = 0.$$

La démonstration commence, de façon élémentaire, par le

*Lemme 3.* — Pour  $1 \leq k \leq n$ , posons :

$$r_k^n(x) = r_k(x) = C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Alors :

1.  $\sum_{k=0}^n r_k(x) = 1$  ;
2.  $\sum_{k=0}^n k r_k(x) = nx$  ;
3.  $\sum_{k=0}^n k(k-1) r_k(x) = n(n-1)x^2$  ;
4.  $\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 r_k(x) = nx(1-x)$ .

*Preuve.* La formule 1. est la formule du binôme. Pour 2, on calcule :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k r_k(x) &= nx \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= nx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} x^k (1-x)^{n-1-k} = nx. \end{aligned}$$

Pour 3, on calcule également :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} &= n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^n \frac{(n-2)!}{(k-2)!((n-2)-(k-2))!} x^{k-2} (1-x)^{n-2-(k-2)} \\ &= n(n-1)x^2 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!} x^k (1-x)^{n-2-k} = n(n-1)x^2. \end{aligned}$$

Enfin, le premier membre de 4 vaut :

$$\sum_k k^2 r_k(x) - 2nx \sum_k k r_k(x) + n^2 x^2 \sum_k r_k(x) = \sum_k k(k-1)r_k(x) - (2nx-1) \sum_k k r_k(x) + n^2 x^2 = nx(1-x),$$

d'après 2 et 3 déjà démontrées.  $\square$

Passons à la démonstration du théorème de Bernstein.

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{C}$  et soit  $\varepsilon > 0$ . La fonction  $f$  est uniformément continue sur  $[0; 1]$  par le théorème de Heine, donc on peut choisir  $\delta > 0$  tel que

$$|x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons désormais un tel  $\delta$  (qui ne dépend que de  $\varepsilon$ ).

Pour tout  $n$  entier  $> 0$  et tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) r_k(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^n \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) r_k(x) \right| \\ &\leq \sum_{k:|k-nx| \leq \delta n} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| r_k(x) + \left| \sum_{k:|k-nx| > \delta n} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) r_k(x) \right|, \end{aligned}$$

et donc par 1 et choix de  $\delta$  :

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| \sum_{k:|k-nx| > \delta n} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) r_k(x) \right|.$$

Mais, d'autre part :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k:|k-nx| > \delta n} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) r_k(x) \right| &\leq 2\|f\|_\infty \sum_{k:|k-nx| > \delta n} r_k(x) \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} \sum_{k:|k-nx| > \delta n} (k-nx)^2 r_k(x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 r_k(x) \\ &= \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2 n^2} nx(1-x) \leq \frac{2\|f\|_\infty}{\delta^2} \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

qui est aussi  $\leq \frac{\varepsilon}{2}$  dès que  $n$  est assez grand.  $\square$

Notons qu'à degré  $n$  fixé, le polynôme de Bernstein  $P_n$  de  $f$  n'est pas le meilleur polynôme d'approximation uniforme de  $f$  sur  $[0; 1]$ .

## § 5. THÉORÈME D'URYSOHN

Dans un espace compact  $X$ , peut-on prolonger toute fonction définie et continue sur un sous-ensemble fermé de  $X$  en une fonction continue sur  $X$  tout entier ? La question est naturelle et la réponse affirmative.

THÉORÈME 1 (Urysohn). — *Soit  $X$  un espace compact et soit  $Y$  un sous-ensemble fermé de  $X$ . Alors toute  $f \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$  est la restriction à  $Y$  d'une fonction  $F \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ .*

*Preuve.* Soit  $\mathcal{H}$  l'ensemble des restrictions à  $Y$  des fonctions continues sur  $X$ . Pour le compact  $Y$ , l'ensemble  $\mathcal{H}$  satisfait aux hypothèses (i), (ii) et (iii) du théorème de Stone-Weierstrass. De plus,  $\mathcal{H}$  sépare  $Y$ , car si  $y_1 \in Y$ ,  $y_2 \in Y$  et  $y_1 \neq y_2$ , la fonction  $x \mapsto d(y, x)$  est définie et continue sur  $X$  et sa restriction à  $Y$  sépare  $y_1$  et  $y_2$ . En appliquant le théorème de Stone-Weierstrass, on trouve déjà que l'ensemble des restrictions à  $Y$  des  $F \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  est uniformément dense dans  $\mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$ ; c'est un pas en direction du théorème mais il faut faire mieux. Donc on sait déjà que :

pour toute  $g \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$  et pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $g_\varepsilon \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  telle que :  
 $|g(y) - g_\varepsilon(y)| \leq \varepsilon$  pour tout  $y \in Y$ .

Dans cette notation  $g_\varepsilon$ , on peut même supposer que

$$\|g_\varepsilon\|_{\infty, \mathcal{C}(X, \mathbf{R})} = \|g_\varepsilon\|_{\infty, \mathcal{C}(Y, \mathbf{R})}$$

quitte à tronquer  $g_\varepsilon$  en la remplaçant par la fonction  $\sup(\alpha, \inf(\beta, g_\varepsilon))$  où  $\alpha = \inf_{y \in Y} g(y)$  et  $\beta = \sup_{y \in Y} g(y)$ .

Soit  $f \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R})$ . Par récurrence, définissons une suite  $g^{(n)}$  d'éléments de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  par les formules :

$$g^{(1)} = f_{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad g^{(n)} = \left( f - \sum_{i=1}^{n-1} g^{(i)} \right)_{\frac{1}{2^n}} \quad \text{pour } n > 1.$$

Par définition du symbole  $g_\varepsilon$ , employé ici pour  $\varepsilon$  valant les  $\frac{1}{2^n}$ , on a donc :

$$\left| f(y) - \sum_{i=1}^k g^{(i)}(y) \right| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{pour tout } y \in Y$$

et

$$|g^{(n)}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \quad \text{pour tout } x \in X.$$

Ainsi la série de fonctions  $\sum_{n=1}^{\infty} g^{(n)}(x)$  converge uniformément sur  $X$  vers une fonction  $F$  continue et, pour tout  $y \in Y$ , on a :  $F(y) = f(y)$ . □

COROLLAIRE 1. — *Soient  $Y_1$  et  $Y_2$  deux fermés disjoints dans un espace compact  $X$ . Alors il existe une  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$  telle que*

$$0 \leq f \leq 1, \quad f(y) = 1 \text{ si } y \in Y_1 \quad \text{et} \quad f(y) = 0 \text{ si } y \in Y_2.$$

*Preuve.* La fonction constante égale à 1 sur  $Y_1$  et constante égale à 0 sur  $Y_2$  est continue sur  $Y_1 \cup Y_2$ . Si  $F$  est un prolongement de cette fonction en une fonction continue sur  $X$ , il suffit de poser  $f = \sup(0, \inf(1, F))$ .  $\square$

*Exercice 1.* — Montrer que le corollaire est satisfait dans tout espace métrique  $X$ , même non compact, en posant

$$f(x) = \frac{d(x, Y_2)}{d(x, Y_1) + d(x, Y_2)},$$

où, si  $Y$  est fermé dans  $X$ , on pose  $d(x, Y) = \inf_{y \in Y} d(x, y)$ .

# Le théorème de Baire

## et ses applications

L'Analyse fournit des exemples divers et importants d'espaces métriques complets : les espaces  $\mathbf{R}^n$ , les espaces  $L^p$  de la théorie de la mesure, notamment  $L^1$  et  $L^2$ , l'espace  $(\mathcal{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$  des fonctions continues sur  $X$  compact, l'espace de Hilbert des fonctions  $f$  holomorphes sur un ouvert  $U$  de  $\mathbf{C}$  telles que  $\|f\|^2 = \int_U |f(z)|^2 dz < +\infty$ , l'espace  $\mathcal{L}(E, F)$  des applications linéaires continues d'un espace normé vers un espace de Banach  $F$ , avec la norme :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\varphi(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|\varphi(x)\|_F$$

si  $E \neq \{0\}$ , sont des espaces complets, i.e. dans lesquels toute suite de Cauchy est convergente. De plus, si  $E$  est complet, tout sous-ensemble fermé de  $E$  est lui-même complet, en tant que sous-espace métrique de  $E$ , par exemple le segment  $[0; 1]$  de  $\mathbf{R}$ .

Influencé par les idées de Cantor sur le dénombrable et le transfini, René Baire (1874-1932) a découvert en 1899 dans le cas de  $\mathbf{R}^n$  un théorème, qui en fait est valable dans tout espace métrique complet (et aussi dans tout sous-espace ouvert non vide d'un tel espace), et qui dit que si un tel espace n'est pas vide, il ne peut être réunion d'une suite (i.e. d'une famille dénombrable) de fermés tous d'intérieur vide, alors qu'en revanche, il est par exemple réunion de la famille de tous ses points, lesquels sont fermés d'intérieur vide en général. On voit donc combien les hypothèses de dénombrabilité sont essentielles dans le théorie de Baire.

Ce théorème a d'abord des applications à la théorie des fonctions discontinues ; si une telle fonction est limite simple de fonctions continues, alors elle n'est pas trop discontinue : l'ensemble des points où elle est discontinue est *maigre* en un sens que nous préciserons.

D'autres applications du théorème de Baire apparaissent en théorie des espaces de Banach. Dans cette théorie, il y a trois résultats fondamentaux. L'un d'eux, le théorème de Hahn-Banach, a été étudié au chapitre I. Les deux autres, le théorème de Banach-Steinhaus et le théorème de l'application ouverte (ou théorème de Banach) sont des conséquences du

théorème de Baire; ils sont établis dans le présent chapitre, avec quelques applications à la théorie de l'approximation, par exemple la non convergence uniforme du procédé d'interpolation de Lagrange, la non convergence en général de la série de Fourier d'une application continue etc.

## § 1. THÉORÈME DE BAIRE

Commençons par formuler un lemme sur les espaces métriques complet.

*Lemme 1 (Cantor).* — Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet. Soit  $(F_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante pour l'inclusion de fermés non vides de  $E$  dont les diamètres

$$\delta(F_n) = \sup_{x, x' \in F_n} d(x, x')$$

tendent vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Alors l'intersection des  $F_n$  n'est pas vide; elle est en fait réduite à un point.

*Preuve.* Pour tout entier  $n \geq 0$ , choisissons un point  $x_n$  dans l'ensemble non vide  $F_n$ . Si  $m \geq n$ , les points  $x_m$  et  $x_n$  sont dans  $F_n$  par décroissance de  $(F_n)_{n \geq 0}$ , donc

$$m \geq n \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq \delta(F_n) \leq \varepsilon$$

dès que  $n$  est assez grand puisque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(F_n) = 0$ . Ceci prouve que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy, et donc qu'elle a une limite, disons  $x$ , puisque  $E$  est complet.

Pour  $p$  entier fixé, montrons que  $x \in F_p$ . Pour tout  $k \geq 0$ , le point  $x_{p+k}$  est dans  $F_p$ , donc puisque  $F_p$  est fermé :

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{p+k} \in F_p.$$

En fait,  $\bigcap_{n \geq 0} F_n = \{x\}$  car si  $y$  est dans cette intersection on a pour tout  $n$  :  $d(x, y) \leq \delta(F_n)$ , et donc en faisant  $n \rightarrow \infty$  on obtient :  $d(x, y) = 0$ .  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $(E, d)$  un espace métrique complet. Soit  $0 \leq k < 1$ . Soit  $f$  une application de  $E$  dans  $E$  contractante de rapport  $k$  : pour tous  $x, y \in E$ , on a :

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y).$$

Pour tout entier  $n \geq 1$ , soit  $F_n = \{x \in E : d(f^n(x), x) \leq \frac{1}{n}\}$ . En appliquant aux parties  $F_n$  le lemme de Cantor, retrouver un théorème de Banach.

Rappelons maintenant quelques notions de topologie dans un espace métrique  $(E, d)$ . Dire qu'une partie  $X$  est *dense* dans  $E$ , c'est dire que :

- pour tout  $x \in E$  on a une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dans  $X$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ;
- ou encore : l'adhérence de  $X$  est  $E$  tout entier;
- ou encore : pour tout  $y \in E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a  $B(y, \varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ ;
- ou encore : pour tout ouvert non vide  $U$  de  $E$ ,  $U \cap X \neq \emptyset$ .

Soit  $X$  une partie de  $E$ . L'intérieur  $X^\circ$  de  $X$  est le plus grand ouvert de  $E$  contenu dans  $X$ ; autrement dit, c'est la réunion des ouverts de  $E$  contenus dans  $X$ . Un élément  $y \in E$  appartient à  $X^\circ$  (on dit aussi que  $y$  est un point *intérieur* à  $X$ ) s'il existe  $r > 0$  tel que  $B(y, r) \subset X$ . Souvent,  $X^\circ$  est vide (penser à sous-espace vectoriel  $X$  strictement inclus dans un espace vectoriel normé  $E$ ); dans ce cas, on dit que  $X$  est *sans point intérieur*, ou encore d'*intérieur vide*.

Pour relier les deux précédentes notions, on peut remarquer qu'une partie  $X$  est dense dans  $E$  si, et seulement si, son complémentaire  $E - X$  est d'intérieur vide :  $\bar{X} = E \Leftrightarrow (E - X)^\circ = \emptyset$ , et donc  $X^\circ = \emptyset \Leftrightarrow \overline{E - X} = X$ .

Rappelons aussi la structure des ouverts de  $\mathbf{R}$  : tout ouvert de  $\mathbf{R}$  est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints (qui sont ses composantes connexes).

*Exercice 2.* — Redémontrez ce fait.

Dans l'exemple le plus simple, le théorème de Baire dit que  $\mathbf{R}$  n'est pas réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Plus généralement :

THÉORÈME 1 (Baire). — *Dans un espace métrique complet  $(E, d)$  non vide, les assertions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *l'intersection de toute suite, i.e. de toute famille dénombrable, d'ouverts denses est non vide, et en fait est même encore dense;*
- (ii) *l'intersection de toute suite, i.e. de toute famille dénombrable, de fermés d'intérieur vide est encore d'intérieur vide, et en particulier n'est pas l'espace  $E$  tout entier.*

*Ainsi, un espace métrique complet n'est pas réunion dénombrable de fermés sans point intérieur.*

*Preuve.* Le point (ii) équivaut à (i) par passage au complémentaire. Prouvons (i). Soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  une suite d'ouverts tous denses dans  $E$ . Soit  $V$  un ouvert non vide de  $E$ . On va prouver que  $V \cap \bigcap_{n \geq 0} U_n$  n'est pas vide. Par récurrence sur  $n$ , construisons une suite de boules ouvertes  $B(x_n, r_n)$  telles que

$$\begin{aligned} \overline{B(x_1, r_1)} &\subset U_1 \cap V \text{ (possible car } U_1 \cap V \neq \emptyset, \text{ vu que } U_1 \text{ est dense);} \\ \overline{B(x_2, r_2)} &\subset U_2 \cap B(x_1, r_1) \text{ (possible car } U_2 \text{ est ouvert dense);} \\ &\dots \\ \overline{B(x_n, r_n)} &\subset U_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \text{ et } r_n < \frac{1}{2} \cdot r_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 2. \end{aligned}$$

Les  $F_n = \overline{B(x_n, r_n)}$  sont une suite de décroissante de fermés non vides dont les diamètres  $\delta(F_n) = 2r_n$  tendent vers 0. D'après le lemme d'intersection de Cantor, il y a au moins un point  $x$  dans  $\bigcap_{n \geq 0} \overline{B(x_n, r_n)}$  et donc dans  $\left( \bigcap_{n \geq 0} U_n \right) \cap V$ .  $\square$

COROLLAIRE 1. — Soit  $\Omega$  un ouvert non vide dans un espace métrique complet  $(E, d)$ . Les assertions (i) et (ii) du théorème de Baire restent vérifiées en remplaçant  $(E, d)$  par  $\Omega$  muni de la distance induite.

*Preuve.* En effet, soit  $(U_n)_{n \geq 0}$  une suite d'ouverts de  $\Omega$  tous denses dans  $\Omega$ ; les ouverts  $U_n$  sont encore des ouverts de  $\overline{\Omega}$  tous denses dans  $\overline{\Omega}$ . Mais l'adhérence  $\overline{\Omega}$  de  $\Omega$  dans  $E$  est un espace complet, auquel on peut appliquer le théorème de Baire : l'intersection des  $U_n$  est dense dans  $\overline{\Omega}$ , donc a fortiori dans  $\Omega$ .  $\square$

Ainsi, le théorème de Baire est valable dans l'intervalle de  $] - 1; 1[$  de  $\mathbf{R}$ , bien que ce ne soit pas un espace complet.

## § 2. APPLICATIONS À LA THÉORIE DES FONCTIONS DISCONTINUES

Une fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est dite *de la première classe de Baire* si elle est limite simple sur  $\mathbf{R}$  d'une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  de fonctions continues sur  $\mathbf{R}$ . Bien entendu, une telle  $f$  peut être discontinue, mais nous allons voir qu'elle ne peut pas l'être trop.

Pour étudier cette question, rappelons – ou introduisons – la notion d'*oscillation*.

DÉFINITION 1. — L'oscillation d'une fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  au point  $x \in \mathbf{R}$  est par définition le nombre (fini ou infini) :

$$\omega_f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y, y' \in B(x, \varepsilon)} |f(y') - f(y)|.$$

PROPOSITION 1. — La fonction  $f$  est continue en  $x$  si, et seulement si,  $\omega_f(x) = 0$ .

*Preuve.* En effet, d'après le critère de Cauchy, valable parce que  $\mathbf{R}$  est complet par construction, dire que  $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$  équivaut à dire que : pour tout  $\eta > 0$  il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $y, y' \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow |f(y) - f(y')| \leq \eta$ . Autrement dit :

$$\text{pour tout } \eta > 0 \text{ il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } \sup_{y, y' \in B(x, \varepsilon)} |f(y') - f(y)| \leq \eta.$$

Ou encore :  $\inf_{\varepsilon > 0} \sup_{y, y' \in B(x, \varepsilon)} |f(y') - f(y)| = 0$ .  $\square$

Si  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est quelconque, on prendra garde au fait que la fonction  $x \mapsto \omega_f(x)$  n'est pas continue en général; cependant, on a :

Lemme 1. — Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  et soit  $\alpha$  un nombre réel  $> 0$ . Alors :

$$U_\alpha = \{x \in \mathbf{R} : \omega_f(x) < \alpha\}$$

est un ensemble ouvert dans  $\mathbf{R}$ .

*Preuve.* On remarque d'abord que la fonction  $\varepsilon \mapsto \sup_{y, y' \in B(x, \varepsilon)} |f(y') - f(y)|$  est croissante et  $\geq 0$ . Soit  $x \in U_\alpha$ . Alors il existe  $\eta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que

$$y, y' \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow |f(y') - f(y)| \leq \alpha - \eta.$$

Soit  $x' \in B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ . On se donne  $y, y' \in B(x', \frac{\varepsilon}{2})$ . Par inégalité triangulaire, on a  $y, y' \in B(x, \varepsilon)$  et donc  $|f(y') - f(y)| \leq \alpha - \eta$ . En passant à la borne supérieure, on obtient

$$\sup_{y, y' \in B(x', \frac{\varepsilon}{2})} |f(y') - f(y)| \leq \alpha - \eta,$$

et donc  $\omega_f(x') \leq \alpha - \eta$ . Ceci prouve donc que  $B(x, \frac{\varepsilon}{2}) \subset U_\alpha$ , et donc que  $U_\alpha$  est ouvert puisque c'est un voisinage de tous ses points.  $\square$

*Lemme 2.* — Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dans la première classe de Baire et soit  $\alpha$  un nombre réel  $> 0$ . Alors l'ensemble ouvert :

$$U_\alpha = \{x \in \mathbf{R} : \omega_f(x) < \alpha\}$$

est dense dans  $\mathbf{R}$ .

*Preuve.* Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  qui converge simplement sur  $\mathbf{R}$  vers  $f$ . Soit  $\Omega$  un intervalle ouvert non vide de  $\mathbf{R}$ . On va prouver que  $\Omega \cap U_\alpha \neq \emptyset$ . Pour tout entier  $p \geq 1$ , l'ensemble

$$F_p = \{x \in \Omega : \text{quel que soit } q \geq p, |f_q(x) - f_p(x)| \leq \frac{\alpha}{3}\}$$

est fermé dans l'espace métrique  $\Omega$ , car les fonctions différence  $f_q - f_p$  sont continues. De plus, on a  $\Omega = \bigcup_{p \geq 1} F_p$  car, pour tout  $x \in \Omega$  fixé, la suite  $(f_p(x))_{p \geq 1}$  est de Cauchy dans  $\mathbf{R}$ .

Appliquons à l'espace  $\Omega$  le corollaire 1 du théorème de Baire : il existe un indice  $p_0$  tel que  $F_{p_0}$  soit d'intérieur non vide dans  $\Omega$ . On va montrer que :

$$(*) \quad (F_{p_0})^\circ \subset U_\alpha,$$

ce qui achèvera la démonstration car alors  $\Omega \cap U_\alpha \supset (F_{p_0})^\circ \neq \emptyset$ .

Soit  $x \in (F_{p_0})^\circ$ . En faisant  $q \rightarrow \infty$  dans la définition de  $F_{p_0}$ , on voit que

$$|f(y) - f_{p_0}(y)| \leq \frac{\alpha}{3}$$

pour tout  $y \in F_{p_0}$ ; d'où, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(y')| &\leq |f(y) - f_{p_0}(y)| + |f_{p_0}(y) - f_{p_0}(y')| + |f_{p_0}(y') - f(y')| \\ &\leq \frac{\alpha}{3} + |f_{p_0}(y) - f_{p_0}(y')| + \frac{\alpha}{3} < \alpha \end{aligned}$$

dès que  $y$  et  $y'$  sont assez proches de  $x$  tout en étant dans  $F_{p_0}$ , ce qui est loisible car  $(F_{p_0})^\circ$  est un ouvert non vide contenant  $x$ , et vu la continuité de  $f_{p_0}$  au point  $x$ , qui permet de rendre le terme médian  $< \frac{\alpha}{3}$ . Ceci prouve que  $\omega_f(x) < \alpha$  et donc (\*).  $\square$

On en déduit le

THÉORÈME 1 (Baire). — Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dans la première classe de Baire. Alors l'ensemble  $X$  des points de  $\mathbf{R}$  où  $f$  est continue est intersection dénombrable d'ouverts denses. En particulier, par le théorème de Baire,  $X$  est dense dans  $\mathbf{R}$ .

*Preuve.* En effet, on a :

$$X = \{x \in \mathbf{R} : \omega_f(x) = 0\} = \bigcap_{n \geq 1} U_{\frac{1}{n}},$$

où les  $U_{\frac{1}{n}}$  sont ouverts et denses dans  $\mathbf{R}$  par les lemmes qui précèdent.  $\square$

Bien entendu, le même énoncé reste valable pour tout espace métrique complet  $(E, d)$  à la place de la droite réelle.

DÉFINITION 2. — Dans un espace métrique complet  $(E, d)$ , nous disons qu'un sous-ensemble est maigre s'il est réunion au plus dénombrable d'ensembles dont l'adhérence est d'intérieur vide.

Le théorème 1 se lit encore : si  $f$  est limite simple de fonctions continues sur  $E$  complet, l'ensemble de ses points de discontinuité est maigre dans  $E$ .

*Exercice 1.* — Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dans la première classe de Baire. Montrer que, pour tout intervalle ouvert non vide  $I$ , il existe un sous-intervalle ouvert non vide  $J$  de  $I$  sur lequel  $f$  est bornée.

*Exercice 2.* — Soit l'espace métrique  $\mathbf{Q}$  des nombres rationnels, muni de la distance de la valeur absolue des nombres réels. Soit une fonction  $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  continue. Alors l'ensemble

$$D = \{x \in \mathbf{R} : f(r) \text{ n'a pas de limite quand } r \rightarrow x, x \in \mathbf{Q}\}$$

est maigre dans  $\mathbf{R}$ . Indication : introduire

$$\tilde{\omega}_f(x) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup_{r, r' \in B(x, \varepsilon) \cap \mathbf{Q}} |f(r') - f(r)|;$$

remarquer que  $D = \{x \in \mathbf{R} : \tilde{\omega}_f(x) \neq 0\}$ , puis montrer que les ensembles  $U_\alpha = \{x \in \mathbf{R} : \tilde{\omega}_f(x) < \alpha\}$  sont ouverts et denses dans  $\mathbf{R}$ , la densité n'étant pas difficile à voir ici.

### § 3. THÉORÈME DE BANACH-STEINHAUS

Rappelons que si  $E$  et  $F$  sont deux espaces normés sur le même corps des scalaires  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , l'espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$  sur  $\mathbf{K}$  de toutes les applications linéaires et continues  $\varphi$  de  $E$  dans  $F$  est normé par :

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\varphi(x)\|_F.$$

Si  $E \neq \{0\}$  on peut calculer cette borne supérieure sur la sphère unité :  $\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|\varphi(x)\|_F$ . De plus, pour tout  $x \in E$ , on a par définition l'inégalité :

$$\|\varphi(x)\|_F \leq \|\varphi\| \|x\|_E.$$

Un cas important est celui où  $F = \mathbf{K}$  est de dimension 1. Alors  $\mathcal{L}(E, \mathbf{K})$  n'est autre que le dual (topologique)  $E'$  de  $E$ .

Soit  $\Phi$  une partie de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Supposons  $\Phi$  bornée dans l'espace normé  $\mathcal{L}(E, F)$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M$  telle que pour toute  $\varphi \in \Phi$  on ait :  $\|\varphi\| \leq M$ . Alors il est clair que  $\Phi$  est bornée en chaque point  $x$  de  $E$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $M_x$  telle que pour toute  $\varphi \in \Phi$  on ait :  $\|\varphi(x)\|_F \leq M_x$ . En effet, il suffit de prendre  $M_x = \|\varphi\| \cdot \|x\|_E$ . Cette conclusion semble être un affaiblissement considérable de l'hypothèse. C'est un résultat très fort que la réciproque soit vraie sous l'hypothèse que  $E$  est complet.

**THÉORÈME 1** (Banach-Steinhaus). — *Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $F$  un espace normé sur le même corps des scalaires  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $\Phi \subset \mathcal{L}(E, F)$  un ensemble d'applications linéaires et continues de  $E$  dans  $F$ . On suppose que pour tout  $x \in E$ , on a :*

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi(x)\|_F < +\infty,$$

alors on a :

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\| < +\infty.$$

Autrement dit, si la famille  $\Phi$  est bornée en chaque point  $x$  de  $E$ , alors elle est uniformément bornée sur tous les points de la boule unité de  $E$ ; on parle en anglais de *uniform boundedness principle*.

*Preuve.* Pour chaque entier  $n \geq 1$ , notons :

$$V_n = \{x \in E : \sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi(x)\|_F > n\}.$$

D'abord, on remarque que chaque  $V_n$  est ouvert dans  $E$ . Fixons en effet  $n \geq 1$ . Pour  $x_0 \in V_n$ , il suffit de trouver un ouvert  $U_0$  tel que  $x_0 \in U_0 \subset V_n$ . Puisque

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi(x_0)\|_F > n,$$

il existe  $\varphi_0 \in \Phi$  telle que  $\|\varphi_0(x_0)\|_F > n$ ; mais la fonction  $x \mapsto \|\varphi_0(x)\|_F$  est continue donc l'ensemble

$$U_0 = \{x \in E : \|\varphi_0(x)\|_F > n\}$$

est ouvert dans  $E$ , et visiblement  $x_0 \in U_0 \subset V_n$ .

Ensuite, on remarque que l'un au moins des  $V_n$  n'est pas dense dans  $E$  : sinon, par le théorème de Baire 1, l'intersection  $\bigcap_{n \geq 1} V_n$  serait non vide : il existerait donc  $x \in E$  tel que  $\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi(x)\|_F = +\infty$ , contrairement à l'hypothèse.

On prend donc  $N$  tel que  $V_N$  n'est pas dense dans  $E$ . Le complémentaire de  $V_N$  est donc d'intérieur non vide : il contient une boule ouverte. Il existe donc  $a \in E$  et  $r > 0$  tel que :  $\|x\| \leq r \Rightarrow a + x \notin V_N$ . Ainsi, pour toute  $\varphi \in \Phi$ , on a  $\|\varphi(a + x)\| \leq N$  dès que  $\|x\| \leq r$ ; ce qui entraîne que pour toute  $\varphi \in \Phi$  :

$$\|\varphi(x)\| \leq \|\varphi(a + x)\| + \|\varphi(a)\| \leq 2N$$

dès que  $\|x\| \leq r$ ; autrement dit  $\sup_{\|x\| \leq 1} \|\varphi(x)\| \leq \frac{2N}{r}$ . Ainsi, pour toute  $\varphi \in \Phi$ , on a :

$$\|\varphi\| \leq \frac{2N}{r},$$

et donc  $\sup_{\varphi \in \Phi} \|\varphi\| < +\infty$ . □

*Exercice 1.* — Soit  $E$  un espace de Banach et  $F$  un espace normé sur le même corps des scalaires  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Soit  $(\varphi)_{n \geq 1}$  une suite d'applications linéaires continues qui converge simplement sur  $E$  vers une application  $\varphi : E \rightarrow F$ . Montrer que  $\Phi = \{\varphi\}_{n \geq 1}$  vérifie l'hypothèse du théorème de Banach-Steinhaus; en déduire que  $\Phi$  est équicontinue, et finalement que  $\varphi$  est continue.

#### § 4. APPLICATION À LA NON-CONVERGENCE SIMPLE DES SÉRIES DE FOURIER

Faisons tout d'abord quelques rappels sur les séries de Fourier. À toute fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue de période  $2\pi$ , on associe ses *coefficients de Fourier* :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbf{Z})$$

et sa *série de Fourier* :  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{inx}$ .

Les sommes de Fourier d'ordre  $n$  de  $f$  sont les

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt,$$

où  $D_n$  est le *noyau de Dirichlet* :

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^2([-\pi; \pi])} = 0$$

et que, par conséquent, il existe une suite extraite de  $(S_n(f))_{n \geq 1}$  qui converge vers  $f$  presque partout.

Il est donc naturel de se demander s'il y a convergence simple de  $(S_n(f))_{n \geq 1}$  sur  $[-\pi; \pi]$  pour toute fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  continue de période  $2\pi$ .

La réponse est négative : grâce au théorème de Banach-Steinhaus, on va prouver que pour tout  $x \in \mathbf{R}$  il existe une telle fonction  $f$  telle que

$$\sup_{n \geq 1} |S_n(f)(x)| = +\infty.$$

La suite des  $S_n(f)(x)$  étant non bornée, elle n'a évidemment pas de limite finie et en particulier ne converge pas vers  $f(x)$ .

Nous utilisons pour cela une estimation du noyau de Dirichlet.

*Lemme 1.* — *On a :*

$$\|D_n\|_{L^1([-π;π])} = \frac{1}{2π} \int_{-π}^π |D_n(t)| dt \geq \frac{4}{π^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

et donc :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|D_n\|_{L^1([-π;π])} = +\infty.$$

*Preuve.* On utilise un argument de parité et l'inégalité  $\sin(\frac{t}{2}) \leq \frac{t}{2}$  pour  $0 \leq t \leq \pi$  pour le calcul qui suit.

$$\|D_n\|_{L^1([-π;π])} = \frac{1}{2π} \int_{-π}^π |D_n(t)| dt = \frac{1}{π} \int_0^π |D_n(t)| dt \geq \frac{2}{π} \int_0^π \left| \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \right| \frac{dt}{t},$$

et un changement de variable fournit :

$$\|D_n\|_{L^1([-π;π])} \geq \frac{2}{π} \int_0^{(n+\frac{1}{2})π} |\sin(u)| \frac{du}{u} \geq \frac{2}{π} \sum_{k=1}^n \frac{1}{kπ} \int_{(k-1)π}^{kπ} |\sin(u)| du = \frac{4}{π^2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k},$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Reprenons notre problème de convergence simple de (sommées partielles de) séries de Fourier  $(S_n(f))_{n \geq 1}$ . Soit  $E$  l'espace de Banach des fonctions  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$  continues, à valeurs complexes, de période  $2\pi$ , qu'on munit de la norme de la convergence uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [-π;π]} |f(x)| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|.$$

Soit  $F = \mathbf{C}$ . Par translation, on se ramène à se placer au point  $x = 0$ . On travaille avec la suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de formes linéaires dans  $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{C})$  définies par évaluation en 0 :

$$\varphi_n : f \mapsto S_n(f)(0) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) = \frac{1}{2π} \int_{-π}^π f(t) D_n(t) dt.$$

D'après la théorie de l'intégration, on sait que

$$\|\varphi_n\| = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} \frac{1}{2π} \int_{-π}^π f(t) D_n(t) dt = \|D_n\|_{L^1([-π;π])}.$$

Ainsi, d'après le lemme 1, on a :  $\sup_{n \geq 1} \|\varphi_n\| = +\infty$ . En lisant le théorème de Banach-Steinhaus à l'envers, on voit qu'il existe une fonction  $f \in E$  telle que

$$\sup_{n \geq 1} |\varphi_n(f)| = |S_n(f)(0)| = +\infty,$$

ce qui est ce qu'on avait annoncé. □

*Exercice 1.* — Il existe une notion de série de Fourier dans le cadre  $L^1$  : à toute fonction intégrable  $f : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbf{C}$  on associe une série de Fourier. Montrer qu'il existe  $f \in L^1([-\pi; \pi])$  telle que la suite des  $S_n(f)$  ne tende pas vers  $f$  en norme  $L^1$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Indication : on pourra montrer que l'application linéaire  $S_n : f \mapsto S_n(f)$  a pour norme  $\|D_n\|_{L^1([-\pi; \pi])}$  en tant qu'application de  $L^1([-\pi; \pi])$  dans lui-même.

Ainsi, la situation dans le cadre  $L^1$  est bien différente de celle dans le cadre  $L^2$ . Information sans démonstration : pour tout  $p \in ]1; +\infty[$  et toute  $f \in L^p([-\pi; \pi])$ , on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(f) - f\|_{L^p([-\pi; \pi])} = 0$ .

Rappelons aussi qu'en ce qui concerne les fonctions continues  $2\pi$ -périodiques, la situation est meilleure si l'on s'intéresse à la convergence en moyenne de Cesaro, i.e. si l'on remplace les sommes partielles de Fourier  $S_n(f)$  par les sommes partielles de Fejer :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_k(f),$$

ce qui revient à remplacer le noyau de Dirchlet, par une autre fonction (*noyau de Fejer*), positive ou nulle cette fois. On sait en effet que la suite  $(\sigma_n(f))_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[-\pi; \pi]$  (et sur  $\mathbf{R}$ ).

*Exercice 2.* — En supposant connu le théorème de Fejer, prouver que pour toute fonction  $f \in L^1([-\pi; \pi])$  on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sigma_n(f)\|_{L^1([-\pi; \pi])} = 0$ .

### § 5. APPLICATION À LA NON-CONVERGENCE UNIFORME DE L'INTERPOLATION DE LAGRANGE

Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ , le polynôme :

$$l_k^n(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{nx - j}{k - j}$$

est l'unique polynôme de degré  $n$  qui vaut 1 en  $\frac{k}{n}$  et 0 en les points  $\frac{j}{n}$  avec  $0 \leq j \leq n$  et  $j \neq k$ . À toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  on associe ses *polynômes d'interpolation de Lagrange*  $p_n(f)$  définis par

$$p_n(f) : x \mapsto \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) l_k^n(x)$$

pour tout  $n \geq 1$ . Ainsi le polynôme  $p_n(f)$  est l'unique polynôme de degré  $n$  qui prend les mêmes valeurs que  $f$  aux points  $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$ .

**THÉORÈME 1.** — *Il existe une fonction continue  $f : [0; 1] \rightarrow \mathbf{C}$  telle que la suite des polynômes d'interpolation de Lagrange  $(p_n(f))_{n \geq 1}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0; 1]$  quand  $n \rightarrow \infty$ .*

Commençons par deux lemmes.

*Lemme 1.* — Munissons  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de la convergence uniforme.

Alors l'application  $f \mapsto p_n(f)$  de  $E$  dans lui-même est de norme  $\|p_n\| = \sup_{x \in [0; 1]} \sum_{k=0}^n |l_k^n(x)|$ .

*Preuve.* Pour toute  $f \in E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  et tout  $x \in [0; 1]$ , on a :

$$|p_n(f)(x)| = \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) l_k^n(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n |f\left(\frac{k}{n}\right)| |l_k^n(x)| \leq \|f\|_\infty \sum_{k=0}^n |f\left(\frac{k}{n}\right)|,$$

donc

$$\|p_n(f)\|_\infty = \sup_{x \in [0; 1]} |p_n(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \sup_{x \in [0; 1]} \sum_{k=0}^n |f\left(\frac{k}{n}\right)|.$$

Ceci fournit déjà :  $\|p_n\| \leq \sup_{x \in [0; 1]} \sum_{k=0}^n |l_k^n(x)|$ , et il s'agit de prouver l'inégalité inverse.

Soit  $x_0$  un point de  $[0; 1]$  où la fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^n |l_k^n(x)|$  atteint son maximum sur  $[0; 1]$ .

Choisissons  $f_0$  une fonction continue sur  $[0; 1]$  telle que  $\|f_0\|_\infty = 1$ , et en outre telle que  $f_0\left(\frac{k}{n}\right) = \text{signe}(l_k^n(x_0))$  c'est-à-dire que  $f_0(x)$  vaut 1, -1 ou 0 suivant que  $l_k^n(x_0)$  est  $> 0$ ,  $< 0$  ou  $= 0$ . Alors :

$$\|p_n\| \geq \|p_n(f_0)\|_\infty \geq |p_n(f_0)(x_0)| = \sum_{k=0}^n |f_0(x_0)| = \sup_{x \in [0; 1]} \sum_{k=0}^n |f(x)|,$$

qui est la seconde inégalité recherchée. □

*Lemme 2.* — On a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n\| = +\infty$ .

*Preuve.* En posant  $M_n(x) = \sum_{k=0}^n |f(x)|$ , nous allons estimer  $M\left(\frac{1}{2n}\right)$  et prouver que cette suite tend vers  $+\infty$ ; il en résultera bien que

$$\|p_n\| = \sup_{x \in [0; 1]} M_n(x) \geq M\left(\frac{1}{2n}\right)$$

tend vers  $+\infty$ . On a :

$$\begin{aligned} |l_k^n\left(\frac{1}{2n}\right)| &= \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{|\frac{n}{2n} - j|}{|k - j|} = \frac{1}{2^n} \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{1 - 2j}{k - j} = \frac{1}{2^n} \frac{1}{|2k - 1|} \frac{\prod_{j=0}^n |1 - 2j|}{\prod_{j=0, j \neq k}^n |k - j|} \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{|2k - 1|} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n - 1)}{k!(n - k)!} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{|2k - 1|} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{n!}{k!(n - k)!}, \end{aligned}$$

donc

$$M_n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{|2k - 1|}.$$

Or :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{|2k - 1|} \geq \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{2k + 1} = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n C_n^k x^{2k} \right) dx = \int_0^1 (1 + x^2)^n dx \geq \int_0^1 (2x)^n dx = \frac{2^n}{n + 1}.$$

D'après la formule de Stirling, on sait que  $n! \sim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$ , donc cela fournit :

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{2^{2n} \cdot n^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ainsi :  $M_n\left(\frac{1}{2^n}\right) \geq \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2^n}{n+1}$ , qui équivaut quand  $n \rightarrow \infty$  à  $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ , lequel tend bien vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème 1.

*Preuve.* On applique le théorème de Banach-Steinhaus 1 avec  $E = F = \mathcal{C} = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  muni de la norme de la convergence uniforme, et  $\Phi$  l'ensemble des applications  $p_n$ . Puisque  $\sup_{n \geq 1} \|p_n\| = +\infty$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  telle que  $\sup_{n \geq 1} \|p_n(f)\|_\infty = +\infty$ . N'étant pas bornée dans  $\mathcal{C}$ , la suite  $(p_n(f))_{n \geq 1}$  ne peut converger dans  $\mathcal{C}$ .  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que quelle que soit la suite  $x = (x_n)_{n \geq 0} \in \ell^1(\mathbf{N})$ , la série  $\sum_{n \geq 0} a_n x_n$  converge. Montrer qu'alors la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  appartient à  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ . Indication : considérer la suite  $(\varphi_n)_{n \geq 0}$  de formes linéaires sur  $\ell^1(\mathbf{N})$  définie par  $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k x_k$  et lui appliquer le théorème de Banach-Steinhaus. Dans cet énoncé, peut-on remplacer  $\ell^1$  et  $\ell^\infty$  par  $\ell^p$  et  $\ell^q$  où  $p$  et  $q$  sont réels et tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  ?

## § 6. THÉORÈME DE BANACH DE L'APPLICATION OUVERTE

C'est de ce chapitre le théorème dont la démonstration est la plus délicate, même si l'énoncé est facile à comprendre :

THÉORÈME 1 (Banach, théorème de l'application ouverte). — *Soient E et F des espaces de Banach. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et surjective. Alors  $\varphi$  est ouverte, c'est-à-dire que l'image par  $\varphi$  de tout ouvert de E est un ouvert de F.*

Ce théorème heurte nos habitudes qui sont que, par une application continue, l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert ; il s'agit ici de l'image directe.

La linéarité de  $\varphi$  est une condition forte mais essentielle – s'en convaincre en dessinant un graphe judicieux d'une fonction réelle d'une variable réelle. Il est essentiel aussi que non seulement E, mais aussi F, soit complet. Par exemple, si  $E = \ell^1(\mathbf{N})$  muni de sa norme  $\|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n|$  et  $F = \ell^1(\mathbf{N})$  muni de la norme  $\|x\|_\infty = \max_{n \geq 0} |x_n|$  pour  $x = (x_n)_{n \geq 0}$ , alors l'application identique de E sur F est continue, surjective, et même bijective, mais sa réciproque  $\varphi^{-1}$  n'est pas continue : sinon, F serait complet comme E, ce qui n'est pas vu que F est dense et strictement inclus dans  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ .

Avant de passer à la démonstration, voyons l'intérêt de ce théorème à travers ses corollaires.

COROLLAIRE 1. — Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire continue et bijective. Alors  $\varphi^{-1}$  est une application linéaire continue de  $F$  sur  $E$ .

*Preuve.* En effet, si  $U$  est un ouvert de  $E$ , son image réciproque par  $\varphi^{-1}$  n'est autre que  $\varphi(U)$ , qui est un ouvert de  $F$  par le théorème de Banach 1 qui précède.  $\square$

COROLLAIRE 2 (théorème du graphe fermé). — Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach. Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire. Supposons que, chaque fois qu'une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  tend vers 0 dans  $E$  et que la suite image  $(\varphi(x_n))_{n \geq 0}$  converge dans  $F$ , disons vers  $y$ , alors la limite  $y$  vaut 0. Alors l'application  $\varphi$  est continue.

En appliquant l'hypothèse à la suite décalée des  $x_n - x$  (pour  $x \in E$ ), on voit qu'elle équivaut à la formulation en apparence plus générale suivante :

chaque fois qu'une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $E$ , disons vers  $x$ , et que la suite image  $(\varphi(x_n))_{n \geq 0}$  converge dans  $F$ , disons vers  $y$ , alors la limite  $y = \varphi(x)$ ,

qui équivaut encore au fait que

le graphe  $\text{gr}(\varphi)$  de  $\varphi$ , c'est-à-dire le sous-ensemble de  $E \times F$  :

$$\text{gr}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in E\},$$

est fermé dans  $E \times F$ .

Ainsi le corollaire 2 énonce que pour qu'une application linéaire entre espaces de Banach soit continue, il faut et il suffit que son graphe soit fermé (la partie « condition nécessaire » est facile, par exemple par le critère séquentiel de continuité).

Bien entendu, ceci ne serait pas vrai si  $\varphi$  n'était pas linéaire. Par exemple, pour  $E = F = \mathbf{R}$  et  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$  pour  $x \neq 0$  et  $\varphi(0) = 0$ , le graphe de  $\varphi$  est fermé sans que la fonction soit continue.

Passons à la preuve du corollaire.

*Preuve.* L'espace  $E \times F$ , normé par

$$(x, y) \mapsto \|(x, y)\| = \max\{\|x\|_E; \|y\|_F\},$$

est un espace de Banach (i.e., il est complet). Puisque  $\varphi$  est linéaire, on voit immédiatement que son graphe

$$\text{gr}(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) : x \in E\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $E \times F$ . Par hypothèse, il est fermé donc complet : c'est un espace de Banach pour la norme induite. L'application de projection

$$\theta : (x, \varphi(x)) \mapsto x$$

est une application linéaire, continue et bijective de  $\text{gr}(\varphi)$  sur  $E$ . Par le corollaire 1 son application réciproque  $\theta^{-1}$  est continue ; autrement dit,  $x \mapsto (x, \varphi(x))$  est continue. En composant cette application avec la seconde projection  $\text{pr}_F : E \times F \rightarrow F$ , on voit que  $\varphi = \text{pr}_F \circ \theta^{-1}$  est continue, ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $X$  un ensemble et soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach de fonctions définies sur  $X$ . On suppose que la norme  $\|\cdot\|$  vérifie :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| = 0 \implies \text{quel que soit } x \in X, \text{ on a : } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0.$$

Soit  $\varphi$  une fonction sur  $X$  telle que  $f \in E \implies \varphi f \in E$  (on dit que  $\varphi$  est un *multiplicateur* de  $E$ ). Montrer que l'application  $f \mapsto \varphi f$  est continue pour la norme de  $E$ .

Le corollaire 1 est un moyen puissant pour démontrer que des espaces sont distincts ; faisons-le comprendre à nouveau à propos d'un problème concernant les séries de Fourier. Si  $f \in L^1([-\pi; \pi], \mathbf{C})$ , soit  $(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$  la suite de ses coefficients de Fourier :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Rappelons que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0$  ; c'est le *lemme de Riemann-Lebesgue*. Le problème est le suivant :

**Problème :** Étant donnée une suite  $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$ , existe-t-il toujours une fonction  $f \in L^1([-\pi; \pi], \mathbf{C})$  telle qu'on ait  $c_n(f) = a_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

La réponse est négative. Pour le voir, notons  $c_0(\mathbf{Z})$  l'espace de Banach des suites  $(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  telles que  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} a_n = 0$ , muni de la norme sup :

$$\|(a_n)_{n \in \mathbf{Z}}\| = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|.$$

Appliquons le corollaire 1 avec  $E = L^1([-\pi; \pi], \mathbf{C})$ ,  $F = c_0(\mathbf{Z})$  et  $\varphi : f \mapsto (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ . Elle est linéaire, continue (car  $|c_n(f)| \leq \|f\|_1$ ) et injective (car une fonction dont les coefficients de Fourier sont tous nuls est nulle presque partout pour la mesure de Lebesgue, par la formule d'inversion de Fourier). Le problème demande si  $\varphi$  est surjective. Si elle l'était, le corollaire assurerait la continuité de  $\varphi^{-1} : c_0(\mathbf{Z}) \rightarrow L^1([-\pi; \pi], \mathbf{C})$ , i.e. l'existence d'une constante  $M > 0$  telle que

$$(*) \quad \|f\|_1 \leq M \|(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}\|_\infty$$

pour toute  $f \in L^1([-\pi; \pi], \mathbf{C})$ . Dans cette inégalité prenons pour  $f$  les noyaux de Dirichlet

$$D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx}.$$

Les  $c_n(D_N)$  valent tous 0 ou 1, donc  $\|(c_n(D_N))_{n \in \mathbf{Z}}\|_\infty = 1$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , alors qu'on a vu au lemme 1 que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|D_N\|_{L^1([-\pi; \pi])} = +\infty.$$

C'est évidemment en contradiction avec les inégalités (\*) pour les fonctions  $f = D_N$  avec  $n \geq 1$ .

*Exercice 2.* — Si  $f \in L^1(\mathbf{R}, dx)$ , sa transformée de Fourier

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-itx} dx$$

appartient à l'espace  $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  des fonctions continues sur  $\mathbf{R}$  de limite 0 en  $\pm\infty$ . Montrer qu'il existe des  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$  qui ne sont pas des transformées de fonctions dans  $L^1(\mathbf{R}, dx)$ .

Nous allons maintenant passer à la preuve (difficile) du théorème de Banach de l'application ouverte 1.

*Preuve.* Soit  $U$  (resp.  $V$ ) l'ensemble des  $x \in E$  (resp.  $y \in F$ ) tels que  $\|x\| < 1$  (resp.  $\|y\| < 1$ ). Si  $A \subset E$  (resp.  $A \subset F$ ) et si  $\lambda$  est un scalaire, on note  $\lambda A$  l'ensemble des  $\lambda x$  pour  $x \in A$ .

– Première étape : il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $y \in F$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in E$  tel que  $\|x\| \leq \frac{1}{\delta}\|y\|$  et  $\|y - \varphi(x)\| \leq \varepsilon$ .

L'application  $\varphi$  étant surjective, l'espace complet  $F$  est la réunion de la suite de fermés  $\overline{\varphi(kU)}$  où  $k$  parcourt les entiers  $\geq 1$ . D'après le théorème de Baire 1 l'un au moins de ces fermés est d'intérieur non vide. Donc il existe un entier  $k \geq 1$ , un point  $y_0$  dans  $F$  et un nombre réel  $\eta > 0$  tels que pour tout  $y \in F$  vérifiant  $\|y\| < \eta$ , on ait  $y_0 + y \in \overline{\varphi(kU)}$ . Posons  $\delta = \frac{\eta}{2k}$ . Par homothétie, on se ramène à vérifier l'assertion de la première étape pour les  $y$  d'une sphère, par exemple ceux vérifiant  $\|y\| = \eta$ . Pour un tel  $y$ , il existe des suites  $(x'_i)_{i \geq 1}$  et  $(x''_i)_{i \geq 1}$  telles que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x'_i) = y_0$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x''_i) = y_0 + y$ . Posons  $x_i = x'_i - x''_i$ . Alors  $\|x_i\| < 2k = \delta^{-1}\|y\|$  et  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(x_i) = y$ .

– Deuxième étape : pour tout  $\alpha > 0$ , on a :  $\delta V \subset \varphi((1 + \alpha)U)$ .

Soit  $y \in \delta V$ . D'après la première étape, il existe  $x_1 \in E$  tel que  $\|x_1\| < 1$  et  $\|y - \varphi(x_1)\| \leq \frac{\delta\alpha}{2}$ . Par hypothèse de récurrence, supposons que soient déjà choisis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  tels que

$$\|x_j\| < \frac{\alpha}{2^j} \quad \text{et} \quad \|y - \varphi(x_1) - \dots - \varphi(x_j)\| \leq \frac{\delta\alpha}{2^j}.$$

Alors, en utilisant la première étape, où  $y$  est remplacé par  $y - \varphi(x_1) - \dots - \varphi(x_n)$ , on obtient un  $x_{n+1} \in E$  tel que

$$\|x_{n+1}\| < \frac{\alpha}{2^{j-1}} \quad \text{et} \quad \|y - \varphi(x_1) - \dots - \varphi(x_{n+1})\| \leq \frac{\delta\alpha}{2^{n+1}}.$$

On obtient ainsi une suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  dans  $E$  et, en posant  $s_n = \sum_{k=1}^n x_k$ , on voit que la suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  est de Cauchy dans  $E$ , donc converge vers un  $x \in E$ . Puisque  $\|x_n\| < \frac{\alpha}{2^{n-1}}$ , on a  $\|x\| < 1 + \alpha$ . Enfin, par construction on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = y$ , et donc  $y = \varphi(x)$ . Ainsi :  $y \in \varphi((1 + \alpha)U)$ .

– Troisième étape : pour tout  $\alpha > 0$ , on a :  $\delta V \subset \varphi(U)$ .

En effet, d'après la deuxième étape, on a :  $\varphi(U) \supset \bigcup_{\alpha > 0} \frac{\delta}{1 + \alpha} V = \delta V$ .

– Quatrième étape : pour tout ouvert  $O$  de  $E$ , l'image  $\varphi(O)$  est ouverte dans  $F$ .

Soit  $y_0 \in \varphi(O)$  et soit  $x_0 \in E$  tel que  $\varphi(x_0) = y_0$ . Puisque  $O$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que la boule  $x_0 + rU$  soit contenue dans  $O$ . Alors, d'après la linéarité de  $\varphi$ , l'ensemble  $\varphi(O)$  contient  $\varphi(x_0 + rU) = y_0 + r\varphi(U)$ . Donc, d'après la troisième étape,  $\varphi(O)$  contient

la boule de centre  $y_0$  et de rayon  $r\delta$ . Comme  $y$  était quelconque, ceci prouve que  $\varphi(O)$  est un voisinage de tous ses points, donc est ouvert dans  $F$ .  $\square$

# Algèbres de Banach

La théorie que nous allons présenter est récente (1941) et presque toute entière due au mathématicien I. M. Gelfand. Dans un même moule, celui des algèbres de Banach, elle regroupe des algèbres aussi différentes que :

- l'algèbre  $\mathcal{C}(X)$  des fonctions continues sur un compact  $X$  ;
- des algèbres de convolution ;
- des algèbres de fonctions holomorphes ;
- des algèbres (non commutatives) d'opérateurs dans un espace de Banach.

Les étapes principales de la théorie sont (pour une algèbre de Banach  $A$ ) :

- l'étude du spectre d'un élément  $x \in A$ , le fait fondamental étant qu'il n'est jamais vide ;
- le théorème de Gelfand-Mazur ;
- l'holomorphie, sur l'ouvert complémentaire du spectre, de la fonction résolvante  $\lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1}$  ;
- l'étude de l'exponentiation dans  $A$ .

Si plus particulièrement, l'algèbre de Banach  $A$  est commutative, la théorie se poursuit avec :

- l'identification de l'espace des idéaux maximaux de  $A$  avec l'ensemble  $\widehat{A}$  des formes linéaires non nulles multiplicatives (ou *caractères*) de  $A$  ;
- la transformation de Gelfand de  $A$  dans  $\mathcal{C}(\widehat{A})$ , dont un cas particulier est la transformation de Fourier ;
- la re-démonstration, étonnamment simple, d'un théorème de Wiener (1932).

## § 1. NOTION D'ALGÈBRE DE BANACH

Nous commençons bien sûr par la notion centrale de cette partie.

**DÉFINITION 1.** — On appelle algèbre de Banach un espace de Banach  $A \neq \{0\}$  sur  $\mathbf{C}$  muni d'une multiplication  $(x, y) \mapsto xy$  de  $A \times A$  dans  $A$  telles que, pour cette multiplication et l'addition vectorielle,  $A$  soit un anneau, et telle que, quels que soient  $x \in A$ ,  $y \in A$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ , on ait :

$$\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y) \quad \text{et} \quad \|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

Si l'anneau  $A$  a un élément neutre  $e$  pour la multiplication, on exige de plus que  $\|e\| = 1$  et on dit alors que  $A$  est une algèbre de Banach avec unité. On dit que  $A$  est commutative si  $xy = yx$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $A$ .

*Exercice 1.* — Montrer que l'application multiplication d'une algèbre de Banach est continue.

La théorie axiomatisée dans un seul moule structurel des exemples concrets très divers. En voici quelques-uns.

*Exemple 1.* — L'algèbre  $A = \mathbf{C}$  des nombres complexes.

*Exemple 2.* — Soit  $X$  un espace compact non vide et  $A = \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  l'algèbre des fonctions continues à valeurs complexes sur  $X$ . Pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  donnée par  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ , et pour le produit (point par point) ordinaire donné par  $(fg)(x) = f(x)g(x)$  pour tout  $x \in X$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach commutative, qui a une unité, à savoir la fonction constante égale à 1.

*Exemple 3.* — Soit  $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$  et  $\bar{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ . On prend  $A = \mathcal{O}\mathcal{C}(\bar{U})$  l'algèbre des fonctions  $f = f(z)$  continues sur  $\bar{U}$  et holomorphes dans  $U$ . Pour la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$  donnée par  $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \bar{U}} |f(z)|$ , et pour le produit (point par point) ordinaire donné par  $(fg)(z) = f(z)g(z)$  pour tout  $z \in \bar{U}$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach commutative, qui a une unité, à savoir la fonction constante égale à 1.

*Exemple 4.* — Soit  $\mathcal{D}_m([0; 1])$  la sous-algèbre de  $\mathcal{C}([0; 1])$  constituée des fonctions  $f$  qui sont  $m$  fois dérivables. Pour la norme  $\|f\| = \sum_{j=0}^m \frac{1}{j!} \|f^{(j)}\|$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach commutative avec unité.

*Exemple 5.* — Soit  $A = L^1(\mathbf{R})$  l'algèbre des (classes de) fonctions intégrables au sens de Lebesgue sur la droite réelle. Pour la norme  $\|f\|_1 = \int_{\mathbf{R}} |f(x)| dx$ , et pour le produit de convolution  $*$  donné par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t) dt$$

pour toutes  $f, g \in A$  et tout  $x \in \mathbf{R}$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach commutative.

*Exemple 6.* — Soit  $A = \ell^1(\mathbf{Z})$  l'algèbre des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  de nombres complexes indexées par les entiers relatifs. Pour la norme  $\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbf{Z}} |x_n|$ , et pour le *produit de convolution*  $*$  donné par :

$$(x * y)_n = \sum_{p \in \mathbf{Z}} x_{n-p} y_p,$$

pour toutes suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  et  $y = (y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  dans  $A$  et tout indice  $n \in \mathbf{Z}$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach commutative. Elle admet une unité : la suite  $e_0$  qui vaut 1 en 0 et 0 ailleurs.

*Exemple 7.* — Soit  $E$  un espace de Banach non nul. On prend pour  $A$  l'algèbre  $\mathcal{L}(E, E)$  des applications linéaires continues (ou *opérateurs bornés*)  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$ . Pour la norme d'opérateur donnée par

$$\|\varphi\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|\varphi(x)\|_E,$$

et pour la multiplication donnée par la composition  $\circ$ , l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach, avec pour unité l'application identique  $\text{id}_E$  de  $E$ .

*Exemple 8.* — Munissons  $\mathbf{C}^n$  d'une norme vectorielle  $\|\cdot\|$ . Prenons  $A = M_n(\mathbf{C})$  l'algèbre des matrices  $M = [m_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$  de taille  $n \times n$  à coefficients complexes. Pour la norme

$$\|M\| = \sup_{x \in \mathbf{C}^n, \|x\|=1} \|Mx\|,$$

et pour le produit usuel des matrices, l'algèbre  $A$  est une algèbre de Banach, avec pour unité la matrice identité  $I_n$  de taille  $n \times n$ .

Toutes ces algèbres de Banach sont commutatives, sauf les deux derniers exemples. Elles sont toutes avec unité sauf  $A = L^1(\mathbf{R})$ .

*Exemple 9.* — Soit  $A$  une algèbre de Banach *sans* unité. On pose  $\tilde{A} = A \times \mathbf{C}$  avec la norme  $\|(x, \lambda)\| = \|x\| + |\lambda|$  et le produit

$$(x, \lambda)(y, \mu) = (xy + \lambda x + \mu y, \lambda\mu).$$

Alors  $\tilde{A}$  est une algèbre de Banach, avec unité égale à  $(0_A, 1)$  et dite *déduite de  $A$  par adjonction d'un élément neutre*.

*Exercice 2.* — Vérifier que tous les exemples ci-dessus fournissent bien des algèbres de Banach.

## § 2. ÉTUDE DU GROUPE DES INVERSIBLES

Notons dans toute la suite  $G$  le groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Banach  $A$ , supposée avec élément unité  $e$  dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire. Autrement dit,  $G$  est l'ensemble des  $x \in A$  tels qu'il existe  $y \in A$  pour lequel  $xy = yx = e$  (auquel cas on notera  $y = x^{-1}$  par unicité de l'inverse). L'ensemble  $G$  est un groupe pour

la multiplication dans  $A$ , car si  $x \in G$  et  $y \in G$  alors  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$  et en outre :  $(x^{-1})^{-1} = x$  et  $e^{-1} = e$ .

THÉORÈME 1. — Soit  $y \in A$  tel que  $\|y\| < 1$ . Alors  $e+y$  est inversible dans  $A$  et  $(e+y)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$  : de plus :

$$\|(e+y)^{-1} - e + y\| \leq \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|}.$$

Plus généralement, soit  $x$  inversible dans  $A$ . On pose  $\alpha = \frac{1}{\|x^{-1}\|}$ . Alors pour tout  $h \in A$  tel que  $\|h\| = \beta < \alpha$ , l'élément  $x+h$  est inversible dans  $A$  et on a :

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha - \beta)}.$$

*Preuve.* La série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$  converge absolument dans l'espace de Banach  $A$  car

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|(-1)^n y^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|y\|^n \quad \text{et} \quad \|y\| < 1.$$

En effet, l'axiome de sous-multiplicativité de la norme implique  $\|y^n\| \leq \|y\|^n$  par récurrence sur  $n$ . Posons

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n \quad \text{et} \quad s_N = \sum_{n=0}^N (-1)^n y^n$$

pour chaque entier  $n \geq 0$ . Alors

$$\begin{aligned} (e+y)s_N &= (e+y)(e - y + y^2 - y^3 + \cdots + (-1)^N y^N) \\ &= e + y - y + y^2 - y^2 + y^3 - y^3 + \cdots + (-1)^N y^N + (-1)^N y^{N+1} \\ &= e + (-1)^N y^{N+1} \\ &= s_N(e+y) \end{aligned}$$

tend vers  $(e+y)s = e = s(e+y)$  quand  $N \rightarrow \infty$ , et donc  $s = (e+y)^{-1}$ . De plus

$$(e+y)^{-1} - e + y = \sum_{n \geq 2} (-1)^n y^n = y^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k,$$

donc

$$\|(e+y)^{-1} - e + y\| \leq \|y^2\| \left\| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k y^k \right\| \leq \|y\|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \|y\|^k = \frac{\|y\|^2}{1 - \|y\|}.$$

Passons maintenant à l'énoncé général. On a :

$$\|x^{-1}h\| \leq \|x^{-1}\| \|h\| = \frac{\beta}{\alpha},$$

donc d'après ce qu'on vient de faire  $e + x^{-1}h$  est inversible. Par suite  $x+h = x(e + x^{-1}h)$  est inversible comme produit de deux inversibles et  $(x+h)^{-1} = (e + x^{-1}h)^{-1}x^{-1}$ . Faisons  $y = x^{-1}h$  dans l'inégalité qui précède :

$$\|(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h\| \leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1 - \|x^{-1}h\|}.$$

En multipliant par  $x^{-1}$  l'argument de la norme du membre de gauche, il vient par sous-multiplicativité :

$$\begin{aligned} \|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| &\leq \frac{\|x^{-1}\|\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|} \\ &\leq \frac{\|x^{-1}\|^3\|h\|^2}{1-\|x^{-1}\|\|h\|} \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^3(1-\frac{\beta}{\alpha})} \\ &= \frac{\beta^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration.  $\square$

**COROLLAIRE 1.** — *L'ensemble  $G$  des éléments inversibles de l'algèbre de Banach avec unité  $A$  est ouvert dans  $A$  et l'application inverse  $x \mapsto x^{-1}$  est une application continue. C'est même une application différentiable dans  $G$ , sa différentielle au point  $x \in G$  étant l'application linéaire de  $A$  dans  $A$  définie par  $h \mapsto -x^{-1}hx^{-1}$ .*

*Preuve.* L'énoncé général du théorème précédent dit que si  $x^{-1} \in G$ , et si  $\alpha = \|x^{-1}\|^{-1}$ , la boule ouverte de centre  $x^{-1}$  et de rayon  $\alpha$  est incluse dans  $G$ . De plus, l'inégalité de ce même énoncé précise que dès que  $\|h\| = \beta < \frac{\alpha}{2}$ , on a :

$$\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq \frac{2}{\alpha^3}\|h\|^2,$$

ce qui vérifie l'assertion sur la différentielle.  $\square$

On notera que l'assertion sur la différentielle est une généralisation du fait que la dérivée dans  $\mathbf{C}^\times$  de la fonction  $z \mapsto \frac{1}{z}$  est  $z \mapsto \frac{-1}{z^2}$ .

*Exercice 1.* — 1. Montrer que, dans  $M_n(\mathbf{C})$ , toute matrice est limite d'une suite de matrices inversibles; autrement dit, que  $G = GL_n(\mathbf{C})$  est dense dans  $A = M_n(\mathbf{C})$ .

On va voir que ce fait ne subsiste pas en dimension infinie.

2. Soit en effet  $\ell^2(\mathbf{N})$  l'espace des suites complexes  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  de carré intégrable, i.e. telles que  $\|x\| = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$ . On note  $A = \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}), \ell^2(\mathbf{N}))$ . Soit  $S$  l'opérateur de décalage, « shift » en bon français, défini par :

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (0, x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots).$$

– Remarquer que  $S$  est isométrique, mais non surjectif, donc n'est pas inversible dans l'algèbre de Banach  $A$ .

– Par l'absurde, montrer que  $S$  n'est pas limite dans  $A$  d'une suite  $(T_n)_{n \geq 0}$  d'opérateurs bornés inversibles. Indication : montrer que la suite  $(\|T_n\|)_{n \geq 0}$  n'est pas bornée et en déduire qu'il existerait une suite  $(U_n)_{n \geq 0}$  dans  $A$  telle que  $\|U_n\| = 1$  pour tout  $n \geq 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|SU_n\| = 0$ .

## § 3. SPECTRE D'UN ÉLÉMENT

On se donne une algèbre de Banach  $A$  comme précédemment. Soit  $x \in A$ .

DÉFINITION 1. — On appelle spectre de  $x$  (dans  $A$ ), et l'on note  $\text{sp}(x)$  ou  $\text{sp}_A(x)$ , l'ensemble des  $\lambda \in \mathbf{C}$  tels que  $x - \lambda e$  n'est pas inversible dans  $A$ .

Ainsi  $\text{sp}(x)$  est une partie de  $\mathbf{C}$ . Par exemple, le spectre d'une matrice  $M$  dans  $M_n(\mathbf{C})$  est l'ensemble (fini) de ses valeurs propres complexes. Le spectre d'une fonction  $f \in \mathcal{C}(X)$  est l'ensemble  $f(X)$  des valeurs prises par  $f$ .

PROPOSITION 1. — Pour tout  $x \in A$ , l'ensemble  $\text{sp}(x)$  est un compact de  $\mathbf{C}$ , contenu dans le disque centré à l'origine et de rayon  $\|x\|$ .

*Preuve.* Supposons  $|\lambda| > \|x\|$ . Alors  $\lambda \neq 0$  et  $x - \lambda e = -\lambda(e - \frac{x}{\lambda})$  est inversible dans  $A$  car  $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$ . Donc  $\lambda \notin \text{sp}(x)$ . Ceci prouve que  $\text{sp}(x)$  est contenu dans le disque  $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \|x\|\}$  : en particulier  $\text{sp}(x)$  est une partie bornée de  $\mathbf{C}$ . Par Borel-Lebesgue, il reste à voir que c'est une partie fermée de  $\mathbf{C}$ , c'est-à-dire que son complémentaire est ouvert. Soit  $\lambda_0 \notin \text{sp}(x)$ . Alors  $x - \lambda_0 e$  est inversible dans  $A$ , donc  $x - \lambda e$  aussi dès que  $|\lambda - \lambda_0|$  est assez petit, car  $G$  est ouvert (Théorème 1).  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $S$  l'opérateur de décalage défini dans l'Exercice 1. Montrer que le spectre de  $S$  dans  $A = \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}), \ell^2(\mathbf{N}))$  est exactement le disque unité fermé de  $\mathbf{C}$ .

*Exercice 2.* — Soit  $A = \ell^1(\mathbf{Z})$  l'algèbre de Banach de l'Exemple 6. Pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ , soit  $e_n$  l'élément de  $A$  qu'est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le  $n$ -ième, qui vaut 1.

(i) Vérifier la formule de covolution  $e_m * e_n = e_{m+n}$  pour tous  $m$  et  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ , puis que  $(e_n)^{-1} = e_{-n}$  et  $e_n = (e_1)^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbf{Z}$ .

(ii) Dans  $A = \ell^1(\mathbf{Z})$ , tout élément  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  vérifie :

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x_n e_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x_n (e_1)^n.$$

(iii) Montrer que le spectre de  $e_1$  dans  $A$  est le cercle unité de  $\mathbf{C}$ .

THÉORÈME 1. — Soit  $x \in A$ . Soit  $\varphi$  une forme linéaire continue de l'espace de Banach  $A$ . Alors la fonction  $f$  d'une variable complexe

$$\lambda \mapsto f(\lambda) = \varphi((x - \lambda e)^{-1})$$

est holomorphe dans l'ouvert  $\mathbf{C} - \text{sp}_A(x)$ . De plus, la fonction  $\lambda \mapsto \lambda f(\lambda)$  est bornée quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ .

*Preuve.* Soit  $\Omega$  l'ouvert  $\mathbf{C} - \text{sp}_A(x)$  et soit  $\lambda \in \Omega$  fixé. Pour  $\mu \in \mathbf{C}$ , assez proche de  $\lambda$  pour qu'on ait :

$$\mu \in \Omega \quad \text{et} \quad |\lambda - \mu| < \frac{1}{2} \|(x - \lambda e)^{-1}\|,$$

écrivons l'inégalité du cas général du Théorème 1, en y remplaçant  $x$  par  $x - \lambda e$  et  $h$  par  $(\lambda - \mu)e$ , et donc  $x + h$  par  $x - \mu e$ . On obtient :

$$\|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\| \leq C|\lambda - \mu|^2,$$

où  $C$  est une constante (pour  $x$  et  $\lambda$  fixés). Par conséquent :

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda, \mu \neq \lambda} \frac{(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}}{\mu - \lambda} = (x - \lambda e)^{-2}$$

dans l'espace de Banach  $A$ . En appliquant la forme linéaire continue  $\varphi$  à ce calcul de limite, on obtient :

$$\lim_{\mu \rightarrow \lambda, \mu \neq \lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = \varphi((x - \lambda e)^{-2}).$$

Ainsi  $f$  a une dérivée première continue dans  $\Omega$  : elle est holomorphe dans  $\Omega$ . En outre :

$$\lambda f(\lambda) = \varphi(\lambda(x - \lambda e)^{-1}) = \varphi\left(\left(\frac{x}{\lambda} - e\right)^{-1}\right)$$

tend vers  $\varphi(-e)$  quand  $|\lambda| \rightarrow \infty$ , donc est bornée.  $\square$

On peut en déduire le résultat fondamental suivant.

COROLLAIRE 1. — *Soit  $x \in A$ . Alors le spectre de  $x$  dans  $A$  n'est pas vide.*

*Preuve.* On procède par l'absurde, en supposant  $\text{sp}_A(x)$  vide. Alors  $f$  serait holomorphe sur  $\mathbf{C}$  tout entier (autrement dit,  $f$  serait une fonction *entière*) et bornée (car  $\lambda \mapsto \lambda f(\lambda)$  est bornée à l'infini). D'après le théorème de Liouville, ces deux propriétés imposent à  $f$  d'être constante sur  $\mathbf{C}$ , et même nulle (à nouveau car  $\lambda \mapsto \lambda f(\lambda)$  est bornée à l'infini). Or, soit  $\lambda_0$  fixé dans  $\mathbf{C}$ . Comme  $\text{sp}_A(x) = \emptyset$ , on dispose de l'inverse  $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ , qui est un vecteur non nul de  $A$ . Par Hahn-Banach, il existe  $\varphi \in A'$  telle que  $\varphi(\lambda(x - \lambda_0 e)^{-1}) \neq 0$ . Pour une telle forme linéaire continue  $\varphi$ , la fonction holomorphe associée comme ci-dessus serait non nulle, ce qui est une contradiction.  $\square$

COROLLAIRE 2 (Gelfand-Mazur). — *Si l'anneau  $A$  est un corps, alors  $A = \mathbf{C}e$  ; autrement dit  $A$  est isomorphe au corps des nombres complexes.*

On notera que  $A$  n'est pas supposée commutative au départ.

*Preuve.* Il s'agit de voir que pour tout  $x \in A$ , il existe  $\lambda \in \mathbf{C}$  tel que  $x = \lambda e$ . Sinon, on aurait  $(x - \lambda e) \neq 0$  pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$  et donc  $x - \lambda e$  serait inversible puisque  $A$  est supposé être un corps : contradiction avec le fait que  $\text{sp}_A(x) \neq \emptyset$ .  $\square$

Nous passons maintenant à quelques énoncés qui facilitent les calculs de spectre.

Déjà, pour tout  $x \in A$  et tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ , il est clair que :

$$\text{sp}_A(\lambda e) = \{\lambda\} \quad \text{et} \quad \text{sp}_A(x + \lambda e) = \text{sp}_A(x) + \lambda.$$

THÉORÈME 2 (Hilbert-Dirac). — *Soit  $P$  un polynôme à coefficients complexes. Alors*

$$\text{sp}_A(P(x)) = P(\text{sp}_A(x)).$$

Plus généralement, si  $Q$  est un second polynôme à coefficients complexes, tel que  $Q(x)$  est inversible dans  $A$ , alors en notant  $R$  la fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$  et  $R(x) = P(x)Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1}P(x)$ , on a :

$$0 \notin Q(\text{sp}_A(x)) \quad \text{et} \quad \text{sp}_A(R(x)) = R(\text{sp}_A(x)).$$

*Preuve.* Si  $P$  est constant c'est vrai car  $\text{sp}_A(\lambda e) = \{\lambda\}$ . On suppose désormais que  $P$  est non constant. Soit  $\mu \in \mathbf{C}$ . On écrit :

$$P(X) - \mu = \alpha_n(X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n),$$

où  $\alpha_n \in \mathbf{C}^\times$  et où les  $\lambda_i$  dépendent de  $\mu$ . L'image réciproque par  $P$  de  $\mu$  est  $P^{-1}(\{\mu\}) = \{\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n\}$ , et l'on a :  $P(x) - \mu = \alpha_n(x - \lambda_1 e)(x - \lambda_2 e) \dots (x - \lambda_n e)$ . Cette dernière égalité, et le fait que les facteurs commutent, permet de voir que  $P(x) - \mu$  est inversible si, et seulement si, chaque facteur  $x - \lambda_i e$  l'est. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mu \in \text{sp}_A(P(x)) &\iff \lambda_i \in \text{sp}_A(x) \text{ pour au moins un indice } i \in \{1; 2; \dots; n\} \\ &\iff \text{sp}_A(x) \cap P^{-1}(\{\mu\}) \neq \emptyset \\ &\iff \mu \in P(\text{sp}_A(x)), \end{aligned}$$

ce qui prouve la première assertion.

Passons maintenant au cas général. Remarquons d'abord que  $PQ = QP$ , et donc que  $P(x)Q(x) = Q(x)P(x)$ , ce qui permet d'écrire aussi  $P(x)Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1}P(x)$  en multipliant à gauche et à droite par  $Q(x)^{-1}$  l'égalité précédente. On note  $R(x) = P(x)Q(x)^{-1} = Q(x)^{-1}P(x)$ . Puisque  $Q(x)$  est inversible, on a bien sûr  $0 \notin \text{sp}_A(Q(x)) = Q(\text{sp}_A(x))$ . Il reste donc à prouver la dernière formule  $\text{sp}_A(R(x)) = R(\text{sp}_A(x))$ . Soit  $\mu \in \mathbf{C}$ . Posons  $R - \mu = S = \frac{P_1}{Q}$  où  $P_1 = P - \mu Q$ . Alors on a les équivalences logiques suivantes :

$$\begin{aligned} \mu \notin \text{sp}_A(R(x)) &\iff R(x) - \mu e \text{ est inversible} &\iff S(x) \text{ est inversible} \\ &\iff P_1(x) \text{ est inversible} &\iff 0 \notin \text{sp}_A(P_1(x)) \\ &\iff 0 \notin P_1(\text{sp}_A(x)) &\iff 0 \notin S(\text{sp}_A(x)) \\ &\iff 0 \notin R(\text{sp}_A(x)) - \mu &\iff \mu \notin R(\text{sp}_A(x)) \end{aligned}$$

ce qui prouve la dernière assertion. □

**COROLLAIRE 1.** — *Supposons  $x$  inversible et  $\|x\| = \|x^{-1}\| = 1$ . Alors tout  $\lambda \in \text{sp}_A(x)$  est de module 1.*

*Preuve.* En effet, en prenant  $R(X) = \frac{1}{X}$  dans le théorème qui précède, on obtient que  $\text{sp}_A(x^{-1}) = \text{sp}_A(x)^{-1}$ . Mais  $\text{sp}_A(x)$  est contenu dans le disque  $\{|\lambda| \leq 1\}$  car  $\|x\| = 1$ , et  $\frac{1}{\text{sp}_A(x)} = \text{sp}_A(x^{-1})$  est aussi contenu dans ce disque car  $\|x^{-1}\| = 1$ . □

**Exercice 3.** — (suite de l'Exercice 2). Soient  $c_0, c_1, \dots, c_k$  des nombres complexes tels que  $P(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + \dots + c_k\lambda^k$  soit non nul pour  $\lambda$  sur le cercle unité. Montrer que l'élément  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$  tel que  $x_i = c_i$  pour  $i \in \{0; 1; 2; \dots; k\}$  et  $x_i = 0$  ailleurs, est inversible dans  $\ell^1(\mathbf{Z})$ . Calculer l'inverse de  $x$  pour les choix  $c_0 = -24$ ,  $c_1 = 26$ ,  $c_2 = -9$  et  $c_3 = 1$  (avec  $k = 3$ ). Indication : on remarquera que le polynôme  $P(\lambda) = -24 + 26\lambda - 9\lambda^2 + \lambda^3$  a pour racine évidente 2, et on décomposera la fraction rationnelle  $\frac{1}{P(\lambda)}$  en éléments simples.

Voyons maintenant le comportement du spectre par *changement d'algèbre*.

PROPOSITION 2. — *Sous B une sous-algèbre fermée de A telle que  $e \in B$ . Alors :*

- (i) *on a  $\text{sp}_B(x) \supset \text{sp}_A(x)$ , mais :*
- (ii) *la frontière de  $\text{sp}_B(x)$  est contenue dans  $\text{sp}_A(x)$ ,*
- (iii) *et si  $\text{sp}_B(x)$  est d'intérieur vide (par exemple parce qu'il est réel), alors on a :*  
 $\text{sp}_B(x) = \text{sp}_A(x)$ .

*Preuve.* Le point (iii) est une conséquence immédiate de (i) et (ii), car alors l'ensemble  $\text{sp}_B(x)$  est égal à sa frontière. Le point (i) est évident car si  $x - \lambda e$  est inversible dans B, il l'est dans A.

Prouvons le point (ii). Soit  $\lambda_0 \in \text{Fr}(\text{sp}_B(x))$ . On a en particulier  $\lambda_0 \in \text{sp}_B(x)$  puisque les spectres sont des ensembles fermés. Il existe dans  $\mathbf{C}$  une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  de limite  $\lambda_0$  et telle qu'aucun  $\lambda_n$  ne soit dans  $\text{sp}_B(x)$ . Pour tout  $n \geq 1$ , l'inverse  $(x - \lambda_n e)^{-1}$  existe dans B, donc a fortiori dans A. Supposons que  $x - \lambda_0 e$  ait un inverse dans A ; alors par continuité des opérations dans A, la suite des éléments  $(x - \lambda_n e)^{-1}$  de B convergerait dans A vers  $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ . Puisque B est supposée fermée, cela impliquerait que  $(x - \lambda_0 e)^{-1} \in B$ , en contradiction avec  $\lambda_0 \in \text{sp}_B(x)$ .  $\square$

*Exercice 4.* — Soit  $A = \ell^1(\mathbf{Z})$  de l'Exemple 6, et soit

$$B = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in A : x_n = 0 \text{ pour } n < 0\}.$$

Montrer que B est une sous-algèbre fermée de A, contenant l'élément neutre  $e_0$ . On a déterminé  $\text{sp}_A(e_1)$  dans l'Exercice 2 ; déterminer  $\text{sp}_B(e_1)$ .

*Exercice 5.* — Soient  $U = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ ,  $\bar{U} = \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$  et  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ . On note  $A = \mathcal{C}(\mathbb{T})$  et B la sous-algèbre des fonctions de A qui se prolongent à  $\bar{U}$  et qui sont holomorphes sur U. Soit  $f$  la fonction identique sur  $\mathbb{T}$ , i.e.  $f(z) = z$ . Déterminer  $\text{sp}_A(f)$  et  $\text{sp}_B(f)$ .

*Exercice 6.* — Soit  $\lambda_0$  un point frontière de  $\text{sp}_A(x)$ . Montrer que quand  $\lambda \notin \text{sp}_A(x)$  tend vers  $\lambda_0$ , on a  $\lim \|(x - \lambda e)^{-1}\| = +\infty$ .

## § 4. FORMULE DU RAYON SPECTRAL

Rappel technique sur les limites de suites.

Soit  $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \sqcup \{+\infty\} \sqcup \{-\infty\}$  la droite achevée. Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $\bar{\mathbf{R}}$ . On pose :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} (\sup_{n \geq p} u_p) = \inf_{p \geq 0} \sup_{n \geq p} u_p$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{p \rightarrow \infty} (\inf_{n \geq p} u_p) = \sup_{p \geq 0} \inf_{n \geq p} u_p.$$

Soit  $l \in \bar{\mathbf{R}}$ . Les assertions suivantes sont alors équivalentes.

- (i) La suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  a une limite et cette limite est  $l$ .  
(ii) On a :  $\limsup_{n \rightarrow \infty} u_n \leq l \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} u_n$ .

Revenons maintenant aux algèbres de Banach. Soit  $A$  une telle algèbre avec unité  $e$ .

DÉFINITION 1. — Si  $x \in A$ , on pose :

$$\varrho(x) = \sup_{\lambda \in \text{sp}_A(x)} |\lambda|,$$

qu'on appelle le rayon spectral de  $x$  dans  $A$ .

C'est le rayon du plus petit disque fermé de  $\mathbf{C}$  centré à l'origine et contenant le compact  $\text{sp}_A(x)$ . On a vu à la Proposition 1 que

$$\varrho(x) \leq \|x\|,$$

et nous allons prouver la *formule du rayon spectral* :

THÉORÈME 1 (formule du rayon spectral). — On a :

$$\varrho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

On peut voir sur les Exemples 6, 7 et 8 que la formule n'est nullement évidente. La démonstration ci-après, dans le cas général, est assez délicate. Cependant dans le cas de l'algèbre des matrices  $M_n(\mathbf{C})$  une démonstration élémentaire est proposée plus loin en exercice.

*Preuve.* D'après le théorème 2, pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$ , on a  $\lambda^n \in \text{sp}_A(x^n)$ , donc  $|\lambda^n| \leq \|x^n\|$ . Ceci implique  $|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ , et donc :

$$\|\lambda\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

En passant au  $\sup_{\lambda \in \text{sp}_A(x)}$ , on obtient :  $\varrho(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ .

Désormais, on se donne  $\lambda > \|x\|$ . Puisque  $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$ , le Théorème 1 donne :

$$(*) \quad -(x - \lambda e)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}.$$

Soit  $\varphi \in A'$ . Posons  $f(\lambda) = \varphi((x - \lambda e)^{-1})$ ; cette fonction  $f$ , on l'a vu au Théorème 1, est holomorphe dans le complémentaire de  $\text{sp}_A(x)$ , donc a fortiori dans l'ensemble  $\{|\lambda| > \|x\|\}$ . Pour  $|\lambda| > \|x\|$ , en appliquant  $\varphi$  aux deux membres de l'égalité (\*), on obtient le développement en série de Laurent :

$$f(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x^n)}{\lambda^{n+1}}.$$

D'après la théorie des fonctions holomorphes, ce développement converge *même* pour  $|\lambda| > \varrho(x)$ , mieux que  $|\lambda| > \|x\|$ , puisque  $f$  est holomorphe dans  $\{|\lambda| > \varrho(x)\}$ . En particulier, si  $|\lambda| > \varrho(x)$ , alors pour toute  $\varphi \in A'$

$$\sup_{n \geq 0} |\varphi(\frac{x^n}{\lambda^n})| < +\infty,$$

donc d'après le théorème de Banach-Steinhaus appliqué à l'espace de Banach  $A'$  et à la famille de formes sur  $A'$

$$\varphi \mapsto \varphi(\frac{x^n}{\lambda^n}) \quad (n \geq 0),$$

on a :

$$\sup_{n \geq 0} \|\frac{x^n}{\lambda^n}\| < +\infty.$$

Ainsi :  $|\lambda| > \varrho(x)$  implique  $\|\frac{x^n}{\lambda^n}\| \leq C(\lambda)$  pour tout  $n \geq 0$ , où la constante  $C(\lambda)$  ne dépend que de  $\lambda$ . Par conséquent, pour tout  $\lambda$  tel que  $|\lambda| > \varrho(x)$ , on a :

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C(\lambda)^{\frac{1}{n}} |\lambda|$$

et donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|.$$

En passant au  $\inf_{|\lambda| > \varrho(x)}$ , on obtient :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \varrho(x),$$

ce qui, vu le rappel technique sur les suites, achève la démonstration.  $\square$

*Exercice 1.* — On propose ici une preuve élémentaire de la formule du rayon spectral dans le cas de dimension finie, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M^n\|^{\frac{1}{n}} = \text{le maximum des modules des valeurs propres de } M,$$

pour toute matrice  $M \in M_n(\mathbf{C})$ .

1. Remarquer qu'il suffit de prouver le résultat pour une norme particulière.
2. Montrer que, si  $M \in M_n(\mathbf{C})$  et  $\varepsilon > 0$  sont fixés, il existe une norme matricielle  $\|\cdot\|$  telle que

$$\|M\| \leq \varrho(M) + \varepsilon.$$

3. Conclure.

## § 5. CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE

Soit  $x \in A$  et soit  $\lambda \mapsto f(\lambda)$  une fonction holomorphe au voisinage de l'ensemble  $\text{sp}(x) = \text{sp}_A(x)$ . Dans ce paragraphe, on va construire un élément de  $A$ , noté  $f(x)$ , et justifier ce symbolisme. Mais ceci nécessite quelques préliminaires.

- Préliminaires sur l'intégrale vectorielle.

Soit  $A$  un espace de Banach sur  $\mathbf{C}$ , et soient  $A'$  et  $A''$  le dual et le bidual de cet espace, respectivement. Soit  $\gamma$  un arc de courbe de classe  $C^1$  par morceaux dans  $\mathbf{C}$ , et  $f : \gamma \rightarrow A$  une fonction définie et continue sur  $\gamma$ , à valeurs (vectorielles) dans  $A$ . Si  $\varphi \in A'$ , l'application  $\lambda \mapsto \langle f(\lambda) | \varphi \rangle$  est une fonction numérique définie et continue sur l'arc  $\gamma$ , donc son intégrale

$$\int_{\gamma} \langle f(\lambda) | \varphi \rangle d\lambda$$

est une notion bien connue. L'application

$$\varphi \mapsto \int_{\gamma} \langle f(\lambda) | \varphi \rangle d\lambda$$

est une forme linéaire en  $\varphi$ , continue sur  $A'$ . Donc il existe un élément et un seul  $\mathcal{S} \in A''$  tel que

$$\mathcal{S}(\varphi) = \int_{\gamma} \langle f(\lambda) | \varphi \rangle d\lambda$$

pour tout  $\varphi \in A'$ . En fait, cet élément est dans  $A$ , ce qui est mieux que  $A''$ ; nous admettrons ce fait, qui est une conséquence du théorème selon lequel l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte. On pose :

$$\mathcal{S} = \int_{\gamma} \vec{f}(\lambda) d\lambda.$$

Ainsi l'intégrale vectorielle  $\int_{\gamma} \vec{f}(\lambda) d\lambda$  est l'unique élément de  $A$  tel que

$$\left\langle \int_{\gamma} \vec{f}(\lambda) d\lambda \middle| \varphi \right\rangle = \int_{\gamma} \langle f(\lambda) | \varphi \rangle d\lambda$$

pour toute  $\varphi \in A'$ . On a l'inégalité :

$$\left\| \int_{\gamma} \vec{f}(\lambda) d\lambda \right\| \leq \int_{\gamma} \|f(\lambda)\|_A d\lambda.$$

- Préliminaires sur l'espace des fonctions holomorphes au voisinage d'un fermé de  $\mathbf{C}$

Soit  $F$  un ensemble fermé dans  $\mathbf{C}$ . Nous noterons  $\mathcal{H}(F)$  l'ensemble des fonctions  $f$ , à valeurs complexes, définies et holomorphes dans un ouvert  $U_f$  (dépendant de  $f$ ) qui contient  $F$ .

On vérifie facilement que si  $f$  et  $g$  sont dans  $\mathcal{H}(F)$  et  $\lambda \in \mathbf{C}$ , alors  $\lambda f$ ,  $f + g$ ,  $fg$  sont dans  $\mathcal{H}(F)$  – les deux affirmations au moyen de l'ouvert  $U_f \cap U_g$  – donc  $\mathcal{H}(F)$  est un espace vectoriel, et même une algèbre sur  $\mathbf{C}$ . Pour faire de l'analyse dans cet espace, on définit une notion de limite : soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $\mathcal{H}(F)$  et soit  $f \in \mathcal{H}(F)$ ; alors on dit que  $(f_n)_{n \geq 0}$  tend vers  $f$  dans  $\mathcal{H}(F)$  s'il existe un ouvert fixe  $U$  indépendant de  $n$  qui contient  $F$  et tel que les fonctions  $f_n$  et  $f$  sont définies et holomorphes dans  $U$  et la suite  $f_n$  converge uniformément vers  $f$  sur  $U$ .

- Préliminaires sur l'idée du calcul fonctionnel holomorphe

Soit  $A$  une algèbre de Banach avec élément neutre  $e$ . Soit  $x \in A$ . On sait déjà définir  $P(x)$ , élément de  $A$ , pour tout polynôme  $P$  à coefficients complexes ; si

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_n\lambda^n,$$

on pose :

$$P(x) = a_0e + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n.$$

On voit aussi comment définir  $f(x)$ , élément de  $A$ , pour certaines fonctions de variable complexe. Par exemple, pour

$$f(\lambda) = \exp(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^n}{n!} + \cdots,$$

on pose

$$f(x) = \exp(x) = e + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

en remarquant que la série converge absolument, donc converge, dans l'espace de Banach  $A$ , vu que :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x^n\|}{n!} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|x\|^n}{n!} = e^{\|x\|} < +\infty$ .

Nous étudierons systématiquement  $\exp(x)$  à la section 7.

Plus généralement, si  $f(\lambda)$  est une fonction *entière* (i.e. holomorphe sur  $\mathbf{C}$  tout entier), de la variable complexe  $\lambda$  ;

$$f(\lambda) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\lambda + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}\lambda^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\lambda^n + \cdots$$

on peut poser

$$f(x) = f(0)e + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

car cette série converge absolument, donc converge, dans  $A$ .

Soit  $f \in \mathcal{H}(\text{sp}(x))$  une fonction holomorphe au voisinage de l'ensemble compact  $\text{sp}(x)$ . On va définir un élément de  $A$  qu'on notera  $f(x)$  et qui englobera les exemples précédents. L'idée est de partir de la *formule intégrale de Cauchy* :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z} dz$$

et de poser

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda.$$

**THÉORÈME 1.** — Soit  $A$  une algèbre de Banach avec unité  $e$ . Soit  $x \in A$  un élément donné de cette algèbre, et  $\text{sp}(x)$  son spectre dans  $A$ .

Pour toute fonction  $f \in \mathcal{H}(\text{sp}(x))$ , donc holomorphe dans un ouvert  $U_f$  contenant  $\text{sp}(x)$ , et pour toute courbe fermée  $\gamma$  de classe  $C^1$  par morceaux, contenue dans  $U_f$ , entourant l'ensemble  $\text{sp}(x)$  (i.e. d'indice 1 par rapport à chaque point de  $\text{sp}(x)$ ), définissons un

élément  $f(x)$  de  $A$  par l'intégrale vectorielle :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda.$$

Alors, les assertions suivantes sont satisfaites.

(i) L'élément  $f(x)$  de  $A$  ainsi défini ne dépend pas du choix de lacet  $\gamma$  comme ci-dessus.

(ii) L'application  $f \mapsto f(x)$  est un homomorphisme continu de l'algèbre  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$  dans l'algèbre de Banach  $A$ .

(iii) On a :  $\text{sp}(f(x)) = f(\text{sp}(x))$ , ce qui généralise le Théorème de Hilbert-Dirac.

*Preuve.* Prouvons le point (i). À deux courbes  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  satisfaisant les hypothèses portant sur  $\gamma$  ci-dessus, correspondent a priori deux éléments de  $A$ , que nous noterons  $f_{\gamma_1}(x)$  et  $f_{\gamma_2}(x)$ , respectivement. D'après le Théorème 1, pour toute  $\varphi \in A'$ , la fonction

$$\lambda \mapsto \langle (x - \lambda e)^{-1}, \varphi \rangle f(\lambda)$$

est holomorphe dans l'ouvert  $V_f = U_f \cap (\mathbf{C} - \text{sp}(x))$ . D'après le Théorème de Cauchy, son intégrale le long de  $\gamma_1$  est égale à son intégrale le long de  $\gamma_2$  car on peut déformer continûment  $\gamma_1$  en  $\gamma_2$  en restant dans  $V_f$ . Donc, pour toute  $\varphi \in A'$ , on a :

$$\langle f_{\gamma_1}(x) | \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \langle (\lambda e - x)^{-1} | \varphi \rangle f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \langle (\lambda e - x)^{-1} | \varphi \rangle f(\lambda) d\lambda = \langle f_{\gamma_2}(x) | \varphi \rangle,$$

ce qui implique que  $f_{\gamma_1}(x) = f_{\gamma_2}(x)$  par Hahn-Banach.

Prouvons le point (ii), c'est-à-dire la continuité de la flèche proposée, ainsi que sa compatibilité aux lois multiplicatives et aux combinaisons linéaires.

Tout d'abord 1 et  $\lambda$  sont holomorphes dans  $\mathbf{C}$  tout entier. On peut prendre pour  $\gamma$  un cercle de rayon assez grand pour que, si  $\lambda \in \gamma$ , on ait :

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \dots + \lambda^{-n-1} x^n + \dots$$

où la série converge absolument dans  $A$ . Alors, en utilisant les formules

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\lambda^k} = 0 \quad \text{si } k \neq 0 \quad \text{et vaut } 1 \text{ si } k = 1,$$

on voit que pour  $f(\lambda) = 1$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \dots + \lambda^{-n-1} x^n + \dots) d\lambda = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) e = e,$$

et pour  $f(\lambda) = \lambda$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \dots + \lambda^{-n-1} x^n + \dots) d\lambda = \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\lambda} \right) x = x,$$

La linéarité de l'application est évidente ; travaillons sur la multiplicativité et donnons-nous  $f_1$  et  $f_2$  dans  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$ . On a :

$$f_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda) d\lambda \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_2(\lambda) d\lambda,$$

où l'on peut supposer que  $\gamma_2$  contient  $\gamma_1$  en son intérieur. Alors

$$\begin{aligned} f_1(x)f_2(x) &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} \int_{\gamma_2}^{\vec{\gamma}_2} (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} f_1(\lambda) f_2(\mu) \, d\lambda d\mu \\ &= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} \int_{\gamma_2}^{\vec{\gamma}_2} \frac{f_1(\lambda) f_2(\mu)}{\mu - \lambda} ((\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}) \, d\lambda d\mu \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda) \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}^{\vec{\gamma}_2} \frac{f_2(\mu)}{\mu - \lambda} \, d\mu \right) \, d\lambda \\ &\quad + \frac{1}{4\pi^2} \int_{\gamma_2}^{\vec{\gamma}_2} (\mu e - x)^{-1} f_2(\mu) \left( \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} \frac{f_1(\lambda)}{\mu - \lambda} \, d\lambda \right) \, d\mu. \end{aligned}$$

Or, d'après la formule intégrale de Cauchy, puisque  $\lambda$  est à l'intérieur de  $\gamma_2$  et  $\mu$  à l'intérieur de  $\gamma_1$ , on a :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2}^{\vec{\gamma}_2} \frac{f_2(\mu)}{\mu - \lambda} \, d\mu = f_2(\lambda) \quad \text{et} \quad \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} \frac{f_1(\lambda)}{\mu - \lambda} \, d\lambda = 0,$$

donc

$$f_1(x)f_2(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1}^{\vec{\gamma}_1} (\lambda e - x)^{-1} (f_1 f_2)(\lambda) \, d\lambda = (f_1 f_2)(x).$$

Pour la continuité, on vérifie le critère séquentiel pour la notion de convergence dans  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$  décrite ci-dessus. On a :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f_n(x)\|_A &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \|(\lambda e - x)^{-1}\| \cdot |f(\lambda) - f_n(\lambda)| \, d\lambda \\ &\leq \sup_{\lambda \in U} |f(\lambda) - f_n(\lambda)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \|(\lambda e - x)^{-1}\| \, d\lambda \\ &= C \sup_{\lambda \in U} |f(\lambda) - f_n(\lambda)|, \end{aligned}$$

qui tend bien vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ .

Prouvons le point (iii).

Montrons que  $\mu \notin f(\text{sp}(x))$  implique que  $\mu \notin \text{sp}(f(x))$ . En effet, si  $\mu \notin f(\text{sp}(x))$ , la fonction  $\lambda \mapsto f(\lambda) - \mu$  ne s'annule pas sur  $\text{sp}(x)$ ; par compacité, il existe un ouvert  $U \supset \text{sp}(x)$  sur lequel cette fonction ne s'annule pas. Par conséquent, la fonction

$$\lambda \mapsto g(\lambda) = \frac{1}{f(\lambda) - \mu}$$

est définie et holomorphe dans  $U$ , donc appartient à  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$ . Par calcul fonctionnel holomorphe, i.e. par le point (ii), on a :

$$g(x) \cdot (f(x) - \mu e) = e,$$

ce qui prouve que  $f(x) - \mu e$  est inversible, donc que  $\mu \notin \text{sp}(f(x))$ .

Montrons que  $\mu \in \text{sp}(x)$  implique que  $f(\mu) \in \text{sp}(f(x))$ . On a :

$$\begin{aligned} f(\mu)e - f(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}^{\vec{\gamma}} (\lambda e - x)^{-1} (f(\mu) - f(\lambda)) \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}^{\vec{\gamma}} (\lambda e - x)^{-1} (\mu - \lambda) \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma}^{\vec{\gamma}} (\lambda e - x)^{-1} (\mu - \lambda) h(\lambda) \, d\lambda \\ &= (\mu e - x) h(x) \end{aligned}$$

par calcul fonctionnel holomorphe, avec la fonction  $h$  définie par

$$\lambda \mapsto h(\lambda) = \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \quad \text{si } \lambda \neq \mu \quad \text{et} \quad h(\mu) = f'(\mu),$$

qui est bien une fonction de  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$ . Vu que

$$f(\mu)e - f(x) = (\mu e - x)h(x),$$

l'élément  $f(\mu)e - f(x)$  n'est pas inversible puisque  $(\mu e - x)$  ne l'est pas.  $\square$

*Remarque 1.* — 1. Soient  $x \in A$  et  $f_1, f_2 \in \mathcal{H}(\text{sp}(x))$ . Alors les éléments  $f_1(x)$  et  $f_2(x)$  commutent dans  $A$  puisque  $f_1 f_2 = f_2 f_1$ .

2. D'après le point (iii) du Théorème, pour que  $f(x)$  soit inversible dans  $A$ , il faut et il suffit que la fonction  $\lambda \mapsto f(\lambda)$  ne soit jamais nulle sur  $\text{sp}(x)$ .

3. D'après le point (ii) du Théorème, si on prend pour  $f$  un polynôme  $P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ , alors le  $f(x) \in A$  que lui fait correspondre le calcul fonctionnel holomorphe :

$$P(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} P(\lambda) d\lambda$$

n'est autre que  $P(x) = a_0e + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Plus généralement, soit  $x \in A$ , et soit  $f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n + \dots$  une série entière de rayon de convergence  $R > \|x\|$ . Alors  $f \in \mathcal{H}(\text{sp}(x))$  et si  $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} f(\lambda) d\lambda$  est l'élément de  $A$  que lui fait correspondre le calcul fonctionnel holomorphe, on a la formule :

$$(*) \quad f(x) = a_0e + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

En effet, la série converge absolument dans  $\{\|x\| < R\}$ , donc le second membre a un sens ; si on pose

$$f_n(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n,$$

les  $f_n$  convergent vers  $f(\lambda)$  uniformément dans  $U = \{|\lambda| < r \text{ avec } r = \frac{R + \|x\|}{2}\}$ , donc on a  $U \supset \text{sp}(x)$ . Par conséquent les

$$f_n(x) = a_0e + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

converge dans  $A$  vers  $f(x)$ , d'où (\*) d'après le (ii) du théorème qui précède. Par exemple

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} e^{\lambda} d\lambda$$

si  $\gamma$  est un cercle de rayon assez grand pour englober  $\text{sp}(x)$  en son intérieur : les deux définitions de l'exponentielle coïncident.

*Exercice 1.* — Commencer par relire l'exercice 3. En déduire que si  $x$  est un élément d'une algèbre de Banach avec neutre  $e$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( e + \frac{x}{n} \right)^n = \exp(x).$$

## § 6. THÉORÈME DE SHILOV SUR LA DÉCOMPOSITION DES OPÉRATEURS

Le calcul fonctionnel holomorphe est particulièrement utile en théorie des opérateurs ; si  $T$  est un opérateur, il permet de construire de nouveaux opérateurs  $f(T)$  pour toute fonction  $f$  holomorphe au voisinage du spectre de  $T$ . Voici un exemple frappant d'application, dû à G. Shilov : si le spectre de  $T$  se casse en deux morceaux, alors l'espace est somme directe de deux sous-espaces fermés stables par  $T$  ; c'est l'idée de base qui permet ensuite de réduire, et si possible de diagonaliser, l'opérateur  $T$ .

THÉORÈME 1. — *Soit  $X$  un espace de Banach sur  $\mathbf{C}$ . Notons  $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X, X)$  l'algèbre de Banach des opérateurs dans  $X$  (i.e. des opérateurs bornés de  $X$  dans  $X$ ). Soit  $T \in \mathcal{L}(X)$  et*

$$\operatorname{sp}(T) = \operatorname{sp}_{\mathcal{L}(X)}(T) = \{\lambda \in \mathbf{C} : T - \lambda \operatorname{id}_X \text{ n'est pas inversible dans } \mathcal{L}(X)\}.$$

*Supposons que  $\operatorname{sp}(T) = S_1 \sqcup S_2$ , où  $S_1$  et  $S_2$  sont des compacts disjoints dans  $\mathbf{C}$ . Alors il existe deux sous-espaces vectoriels fermés  $X_1$  et  $X_2$  de  $X$ , stables par  $T$ , tels que  $X = X_1 \oplus X_2$ , et tels que*

$$\operatorname{sp}_{\mathcal{L}(X_1)}(T|_{X_1}) = S_1 \quad \text{et} \quad \operatorname{sp}_{\mathcal{L}(X_2)}(T|_{X_2}) = S_2,$$

où  $T|_{X_i}$  désigne la restriction de  $T$  à  $X_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ .

*Preuve.* L'idée est de définir  $X_1$  et  $X_2$  par leurs projecteurs  $E_1$  et  $E_2$ , eux-mêmes obtenus par calcul fonctionnel holomorphe à partir de fonctions  $e_1$  et  $e_2$  indicatrices d'ensembles, car les fonctions indicatrices partagent avec les projecteurs la propriété algébrique d'être idempotent (i.e. d'être égal à son carré). Agrandissons  $S_1$  et  $S_2$  en deux ouverts  $U_1$  et  $U_2$ , respectivement, tels que  $U_1 \cap U_2$  soit encore vide ; c'est possible car  $S_1$  et  $S_2$  étant compacts, on a :

$$d(S_1, S_2) = \inf\{|\lambda_1 - \lambda_2| : \lambda_1 \in S_1, \lambda_2 \in S_2\} > 0.$$

Soit  $U = U_1 \sqcup U_2$ . La fonction  $e_1$  définie par  $e_1(\lambda) = 1$  sur  $U_1$  et 0 sur  $U_2$  est holomorphe dans  $U$  donc sur  $\operatorname{sp}(T)$ . Le calcul fonctionnel holomorphe lui fait correspondre un opérateur  $E_1 = e_1(T) \in \mathcal{L}(X)$ . De même, la fonction  $e_2$  définie par  $e_2(\lambda) = 1$  sur  $U_2$  et 0 sur  $U_1$  est holomorphe dans  $U$  donc sur  $\operatorname{sp}(T)$ , et le calcul fonctionnel holomorphe lui fait correspondre un opérateur  $E_2 = e_2(T) \in \mathcal{L}(X)$ . Il est clair que les fonctions  $e_1$  et  $e_2$  satisfont les identités

$$e_1 + e_2 = 1; \quad e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0; \quad e_1^2 = e_1; \quad e_2^2 = e_2.$$

Par l'homomorphisme du calcul fonctionnel holomorphe, on a donc dans  $\mathcal{L}(X)$  les relations :

$$E_1 + E_2 = \operatorname{id}_X; \quad E_1 E_2 = E_2 E_1 = 0; \quad E_1^2 = E_1; \quad E_2^2 = E_2.$$

Soient  $X_1 = \{x \in X : E_1 x = x\}$  et  $X_2 = \{x \in X : E_2 x = x\}$  les sous-espaces propres de valeur propre 1 associés aux opérateurs  $E_1$  et  $E_2$  : ce sont évidemment des sous-espaces fermés de  $X$ . On a  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$  car si  $x$  est dans cette intersection, on peut écrire  $x = E_1 x = E_1(E_2 x) = (E_1 E_2)x = 0$ . On a  $X = X_1 + X_2$  car pour tout  $x \in X$  on peut écrire :  $x = \operatorname{id}_X x = (E_1 + E_2)x = E_1 x + E_2 x$ . Ainsi  $X = X_1 \oplus X_2$ . Enfin, montrons que  $X_1$  et  $X_2$  sont stables par  $T$ . Si  $x \in X_i$ , alors  $x = E_i x$ , donc  $Tx = (TE_i)x = (E_i T)x = E_i(Tx)$

et donc  $Tx \in E_1$  (on rappelle que les éléments  $f(T)$  commutent entre eux). On peut donc parler des restrictions  $T|_{X_i}$ . Introduisons aussi

$$T_1 = TE_1 = E_1T \quad \text{et} \quad T_2 = TE_2 = E_2T ;$$

ce sont des éléments de  $\mathcal{L}(X)$ . L'opérateur  $T_1$  coïncide avec  $T|_{X_1}$  sur  $X_1$  et vaut 0 sur  $X_2$ . D'autre part

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\vec{\gamma}=\gamma_1 \sqcup \gamma_2} \lambda e_1(\lambda) (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda,$$

donc, vu que  $e_1(\lambda) = 0$  sur  $\gamma_2$  et vaut 1 sur  $\gamma_1$ ,

$$T_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \lambda (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda,$$

puis, quel que soit  $\mu$  fixé dans  $\mathbf{C}$ ,

$$T_1 - \mu E_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - \mu) (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda.$$

Supposons  $\mu$  *extérieure* à la courbe  $\gamma_1$  ; par calcul fonctionnel holomorphe définissons l'opérateur dans  $X$

$$Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{(\lambda - \mu)} (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda.$$

On a clairement  $Q_\mu = E_1 Q_\mu = Q_\mu E_1$ , donc  $X_1$  est stable par  $Q_\mu$ . De plus

$$(T_1 - \mu E_1) Q_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - \mu) \frac{1}{(\lambda - \mu)} (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} e_1(\lambda) (\lambda \text{id}_X - T)^{-1} d\lambda = E_1.$$

En restreignant l'égalité  $(T_1 - \mu E_1) Q_\mu = E_1$  aux vecteurs de  $X_1$ , on voit que l'on a prouvé que  $(T - \mu \text{id}_X)|_{X_1}$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X_1)$ , ayant pour inverse  $Q_\mu|_{X_1}$  ; ceci est valable quel que soit  $\mu \notin S_1$ , car on peut choisir  $\gamma_1$  laissant  $\mu$  à l'extérieur. Ainsi est prouvé que

$$\text{sp}_{\mathcal{L}(X_1)}(T|_{X_1}) \subset S_1 \quad \text{et} \quad \text{sp}_{\mathcal{L}(X_2)}(T|_{X_2}) \subset S_2.$$

Reste à voir que, par exemple, tout  $\lambda_0 \in S_1$  est un point du spectre dans  $\mathcal{L}(X_1)$  de  $T|_{X_1}$ . On vient de voir que  $(T - \lambda_0 \text{id}_X)|_{X_2}$  est inversible dans  $\mathcal{L}(X_2)$ , car  $\lambda_0$  est extérieur à  $\gamma_2$ . Donc il existe  $Q_2 \in \mathcal{L}(X_2)$  tel que

$$(T - \lambda_0 \text{id}_X) Q_2 y = y \quad \text{pour tout} \quad y \in X_2.$$

Si, par l'absurde,  $(T - \lambda_0 \text{id}_X)|_{X_1}$  était inversible, il existerait un opérateur  $Q_1 \in \mathcal{L}(X_1)$  tel que

$$(T - \lambda_0 \text{id}_X) Q_1 y = y \quad \text{pour tout} \quad y \in X_1.$$

En posant  $Q = Q_1$  sur  $X_1$  et  $Q = Q_2$  sur  $X_2$ , on obtiendrait un opérateur  $Q \in \mathcal{L}(X)$  tel que  $(T - \lambda_0 \text{id}_X) Q = \text{id}_X$  dans  $X$  tout entier. C'est absurde, car  $\lambda_0 \in S_1$ , donc  $\lambda_0 \in \text{sp}_{\mathcal{L}(X)}(T)$ .  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $A$  une algèbre de Banach avec unité. Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $\Omega = \{x \in A : \text{sp}_A(x) \subset U\}$ . Montrer que  $\Omega$  est ouvert dans  $A$ , et que si  $f$  est une fonction holomorphe dans  $U$ , alors l'application  $x \mapsto f(x)$  de  $\Omega$  dans l'espace de Banach  $A$  est différentiable.

## § 7. FONCTION EXPONENTIELLE

C'est l'occasion de reprendre ce thème très classique dans un contexte nouveau. Plus qu'une partie de cours ce pourrait être un travail dirigé. Aussi le lecteur est invité à essayer de trouver et de rédiger par lui-même, avant de les lire dans le texte, les démonstrations des énoncés ci-après.

Soit  $A$  une algèbre de Banach avec unité  $e$ . Pour tout  $x \in A$ , on pose :

$$\exp(x) = e + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Nous savons déjà que la série converge (absolument) dans  $A$ , que dans  $A$  on a la formule

$$\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( e + \frac{x}{n} \right)^n,$$

et que, si  $\gamma$  est un cercle de rayon  $> \|x\|$  (ou même seulement de rayon assez grand pour englober l'ensemble  $\text{sp}(x)$  dans son intérieur), on a :

$$\exp(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} e^{\lambda} d\lambda.$$

PROPOSITION 1. — *L'application  $x \mapsto \exp(x)$  de  $A$  dans  $A$  est continue.*

*Preuve.* Si  $\|x - x_0\| \leq 1$  et si  $N$  est un entier  $> 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \|\exp(x) - \exp(x_0)\| &= \left\| \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (x^n - x_0^n) \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x^n - x_0^n) + \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n!} (x^n - x_0^n) \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x^n - x_0^n) \right\| + 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\|x_0\| + 1)^n \end{aligned}$$

On fixe  $N$  de sorte que  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\|x_0\| + 1)^n \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , ce qui est possible car c'est le reste d'une série numérique convergente. Pour finir, par continuité des fonctions polynômes on utilise que

$$\left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} (x^n - x_0^n) \right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

dès que  $\|x - x_0\|$  est assez petit. □

PROPOSITION 2. — *Si  $x \in A$  et  $y \in A$  commutent (i.e.  $xy = yx$ ), alors on a :  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ .*

*Preuve.* Puisque que  $x$  et  $y$  commutent, on a, pour tout entier  $n \geq 0$ , la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{p+q=n} \binom{n}{p} x^p y^q = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} x^p y^q.$$

Le théorème sur la multiplication de Cauchy de deux séries absolument convergentes est valable dans  $A$  (même démonstration que pour les séries dans  $\mathbf{C}$ , en remplaçant les modules par des normes) ; d'après ce théorème, si on pose :

$$\exp(x) = \sum_{p \geq 0} \frac{x^p}{p!} = \sum_{p \geq 0} u_p \quad \text{et} \quad \exp(y) = \sum_{q \geq 0} \frac{y^q}{q!} = \sum_{q \geq 0} v_q,$$

alors

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

où l'on a :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \frac{1}{n!} \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} x^p y^q = \frac{1}{n!} (x+y)^n$$

pour tout  $n \geq 0$ . □

*Exercice 1.* — Soient  $A \in M_2(\mathbf{C})$ ,  $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Calculer  $\exp(x)$ ,  $\exp(y)$ ,  $\exp(x+y)$  et constater que  $\exp(x) \exp(y) \neq \exp(x+y)$ .

Un substitut à la Proposition 2, quand  $x$  et  $y$  ne commutent pas, est la :

PROPOSITION 3. — Pour tous  $x$  et  $y$  dans  $A$ , on a la formule :

$$\exp(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(\frac{y}{n}\right) \right)^n.$$

*Preuve.* Pour  $n > k$ , posons :

$$u_n = \left( e + \frac{x+y}{n} \right)^n = \sum_{p=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{(x+y)^p}{p!},$$

$$s_{n,k} = \sum_{p=0}^k \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{(x+y)^p}{p!}$$

et

$$r_{n,k} = \sum_{p=k+1}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{(x+y)^p}{p!}.$$

D'autre part,

$$z_n = \exp\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(\frac{y}{n}\right) = e + \frac{1}{n}(x+y) + \frac{1}{n^2} w_n,$$

où  $w_n$  reste borné quand  $n$  varie. Donc, pour  $n > k$ , on a :

$$(z_n)^n = \left( e + \frac{1}{n}(x+y) + \frac{w_n}{n} \right)^n = \sum_{p=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{\left(x+y + \frac{w_n}{n}\right)^p}{p!},$$

$$\sigma_{n,k} = \sum_{p=0}^k \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{\left(x+y + \frac{w_n}{n}\right)^p}{p!}$$

et

$$\varrho_{n,k} = \sum_{p=k+1}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-p+1)}{n^p} \frac{\left(x+y + \frac{w_n}{n}\right)^p}{p!}.$$

On peut fixer un rang  $k$  assez grand pour que pour tout  $n > k$  on ait :

$$(1) \quad \|r_{n,k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et

$$(2) \quad \|\varrho_{n,k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

car d'une part, quel que soit  $p$ , on a  $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n^p} \leq 1$  et, d'autre part,  $\|x + y + \frac{w_n}{n}\|$  est borné par une constante  $C$  indépendante de  $n$ , vu que  $(w_n)_{n \geq 0}$  est bornée ; par conséquent,

$$\|r_{n,k}\| \leq \sum_{p>k} \frac{(x+y)^p}{p!} \quad \text{et} \quad \|\varrho_{n,k}\| \leq \sum_{p>k} \frac{C^p}{p!}$$

sont  $\leq \frac{\varepsilon}{3}$  pour  $k$  assez grand, au titre de restes de séries absolument convergentes.

L'indice  $k$  étant désormais fixé, choisissons  $N > k$  tel que pour tout  $n > N$  on ait :

$$(3) \quad \|s_{n,k} - \sigma_{n,k}\| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

C'est possible car, à  $k$  fixé pour les  $p$  en nombre fini tels que  $0 \leq p \leq k$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{n^p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} w_n = 0,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)(x+y)^p - (x+y + \frac{1}{n}w_n)^p}{n^p p!} = 0.$$

La combinaison de (1), (2) et (3) montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - (z_n)^n) = 0$ , et comme on sait depuis l'Exercice 1 que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \exp(x+y)$ , on obtient que les deux membres de l'égalité dans l'énoncé valent tous les deux  $\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n)^n$ .  $\square$

Il est bon de relire pour la suite l'Exercice 15 du Chapitre II. Si  $x \in A$  vérifie  $\|x - e\| < 1$ , on pose

$$\log(x) = \sum_{m \geq 1} -\frac{(e-x)^m}{m},$$

ce qui a un sens et définit un élément de  $A$ , car la série est absolument convergente, vu que

$$\sum_{m \geq 1} \left\| -\frac{(e-x)^m}{m} \right\| \leq \sum_{m \geq 1} \frac{\|e-x\|^m}{m} = -\log(1 - \|e-x\|) < +\infty.$$

D'après le calcul fonctionnel holomorphe on a aussi, pour  $\alpha$  assez petit :

$$\log(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda-x|=\alpha} (\lambda e - x)^{-1} \log(\lambda) d\lambda$$

où  $\log$  est la détermination principale du logarithme.

PROPOSITION 4. — Soit  $x \in A$  tel que  $\|x - e\| < 1$ . Alors  $\exp(\log(x)) = x$ .

*Preuve.* Soit  $U$  le disque  $\{|z - 1| < 1\}$  dans  $\mathbf{C}$ . Pour  $z \in U$  et  $n > 1$  entier posons :

$$f_n(z) = \sum_{m=1}^n -\frac{(1-z)^m}{m}.$$

D'après la théorie des séries entières,  $(f_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\log(z)$  uniformément sur tout compact de  $U$ . Par continuité de l'exponentielle,  $(e^{f_n})_{n \geq 1}$  converge vers  $e^{\log(z)} = z$  uniformément sur tout compact de  $U$ . Posons

$$f_n(x) = \sum_{m=1}^n -\frac{(e-x)^m}{m}.$$

Par définition de  $\log(x)$ , la suite  $f_n(x)$  tend vers  $\log(x)$  dans  $A$  quand  $n \rightarrow \infty$ , donc par continuité la suite des  $e^{f_n(x)}$  tend vers  $e^{\log(x)}$  dans  $A$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Mais, d'autre part,  $\exp(f_n(x))$  n'est autre que l'image dans  $A$ , par le calcul fonctionnel holomorphe, de la fonction  $e^{f_n(z)}$  : la vérification rigoureuse de ceci consiste à se convaincre d'abord que, à  $k$  fixé, la fonction  $e^{z^k}$  donne  $\exp(x^k)$  dans le calcul fonctionnel holomorphe, ce qui est clair sur la série exponentielle. Mais, par ailleurs,  $e^{f_n(z)}$  tend vers  $z$  dans l'espace  $\mathcal{H}(\text{sp}(x))$ . Donc  $\exp(f_n(x))$  tend dans  $A$  d'une part vers  $x$  et, d'autre part comme on l'a vu, vers  $\exp(\log(x))$ . Ainsi  $\exp(\log(x)) = x$ .  $\square$

Soit  $\exp A = \{x \in A : \text{il existe } y \in A \text{ tel que } x = \exp(y)\}$  l'image de  $A$  dans  $A$  par l'application exponentielle. Nous allons comparer  $\exp A$  au groupe des inversibles  $G = A^\times$ . D'abord une évidence :  $\exp A \subset G$ , car  $e = \exp(0)$  et, d'après la Proposition 2, pour tout  $x \in A$  :

$$\exp(x) \exp(-x) = \exp(-x) \exp(x) = \exp(0) = e,$$

prouvant que  $\exp(x)$  est inversible dans  $A$  avec  $\exp(x)^{-1} = \exp(-x)$ .

PROPOSITION 5. — *Le sous-ensemble  $\exp A$  est une partie connexe de  $G$ .*

*Preuve.* Le sous-ensemble  $\exp A$  est même connexe par arcs, car pour tout  $x = \exp(y)$ , le chemin continu  $t \mapsto \exp(ty)$  ( $0 \leq t \leq 1$ ) relie  $e$  à  $x$ .  $\square$

Ici, ouvrons une parenthèse pour un :

- Rappel sur la connexité.

Un espace métrique est dit *connexe* s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides. Une partie  $C$  d'un espace métrique  $E$  est dite *connexe* si le sous-espace métrique  $C$  de  $E$  est connexe, c'est-à-dire si les hypothèses :

$$U_1 \text{ et } U_2 \text{ ouverts de } E, \quad U_1 \cap C \neq \emptyset, \quad U_2 \cap C \neq \emptyset \quad \text{et} \quad C \subset U_1 \cup U_2$$

entraînent que  $C \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ .

Si  $C$  est connexe, alors  $\overline{C}$  est connexe, et toute image continue de  $C$  est connexe. Si  $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  est une famille de parties connexes de  $E$  telle que  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$ , alors  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$  est connexe.

Dans  $E$  normé, toute partie convexe est connexe.

Soit  $x \in E$ . La *composante connexe de  $x$  dans  $E$* , notée  $C_x$ , est la réunion des parties connexes de  $E$  qui contiennent  $x$ ; c'est donc la plus grande partie connexe de  $E$  qui contienne  $x$ ; elle est fermée dans  $E$ . Si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$ , ou bien  $C_x = C_y$  ou bien  $C_x \cap C_y = \emptyset$ . La relation  $x \sim y$  si et seulement si  $C_x = C_y$  est une relation d'équivalence dont les classes s'appellent *composantes connexes* de  $E$ .

Supposons maintenant que  $E$  (qu'on notera plutôt  $G$ ) soit un *groupe topologique*, ce qui signifie que sont continues les applications  $(x, y) \mapsto xy$  de  $G \times G$  dans  $G$  et  $x \mapsto x^{-1}$  de  $G$  dans  $G$ . C'est le cas pour le groupe  $G$  des inversibles d'une algèbre de Banach  $A$ .

PROPOSITION 6. — *La composante connexe  $G_o$  de l'élément neutre  $e$  dans un groupe topologique  $G$  est un sous-groupe distingué fermé de  $G$ .*

*Preuve.* Si  $x \in G_o$ , alors  $x^{-1}G_o$  est connexe, comme image continue (par la multiplication à droite par  $x^{-1}$ ) du connexe  $G_o$ , et contient  $e$ , donc  $x^{-1}G_o \subset G_o$  pour tout  $x \in G_o$ . Par conséquent,  $G_o$  est un sous-groupe de  $G$ ; il est fermé comme toute composante connexe. Si  $a \in G$ , alors  $a^{-1}G_o a$  est connexe, comme image continue (par la conjugaison par  $a^{-1}$ ) du connexe  $G_o$ , et contient  $e$ , donc  $a^{-1}G_o a \subset G_o$  pour tout  $a \in G$ . Ainsi  $G_o$  est-il distingué dans  $G$ .  $\square$

THÉORÈME 1. — *Soit  $A$  une algèbre de Banach avec unité, notée  $e$ . Soit  $G$  le groupe de ses éléments inversibles. Soit  $G_o$  la composante connexe de  $e$  dans  $G$ . Alors les assertions suivantes sont satisfaites.*

- (i) *Le sous-groupe  $G_o$  est engendré par  $\exp A$ ;*
- (ii) *Si  $A$  est commutative, alors  $G_o = \exp A$ .*

*Preuve.* Posons  $V = \exp A$ . D'après la Proposition 5,  $V$  est contenue dans  $G_o$ . Le sous-groupe de  $G_o$  engendré par  $V$  n'est autre que

$$V^\infty = \bigcup_{n \geq 0} V^n$$

où  $V^n$  est l'ensemble des produits de  $n$  éléments de  $V$ ; ceci découle du fait que  $V$  est symétrique (i.e.  $V^{-1} = V$ ). Bref,  $\langle V \rangle$  est l'ensemble des produits finis d'éléments de  $V$ .

On a vu à la Proposition 4 que  $V$  contient la boule ouverte de centre  $e$  et de rayon 1 (tout élément de cette boule est l'exponentielle de son logarithme), donc  $e$  est un point intérieur à  $V$ , donc intérieur à  $V^\infty$ . Par translation, chaque  $x \in V^\infty$  est intérieur à  $V^\infty$ ; par conséquent le sous-groupe  $V^\infty$  est ouvert dans  $G_o$ ; du coup il est aussi fermé dans  $G_o$  (car c'est le complémentaire dans  $G_o$  des classes à gauche de  $G_o$  modulo  $V^\infty$ , autres que  $V^\infty$  elle-même). Puisque  $G_o$  est connexe et que  $V^\infty \neq \emptyset$ , on a :  $V^\infty = G_o$ . Ceci prouve le point (i). En ce qui concerne (ii), si  $A$  est commutative  $\exp A$  est déjà un groupe, d'après la Proposition 2, et donc  $G_o = \exp A$ .  $\square$

*Exemple 1.* — Sachant que le groupe  $GL_n(\mathbf{C})$  des matrices  $n \times n$  complexes inversibles est connexe, on obtient que toute matrice  $n \times n$  complexe de déterminant  $\neq 0$  est produit d'un nombre fini de matrices exponentielles.

*Exercice 2.* — 1. Soit  $x \in A$  tel que  $x^n = e$  pour un entier  $n > 0$  au moins. Montrer que  $\text{sp}(x)$  est fini, et que  $x \in G_o$ .

2. Supposons  $A$  commutative. Soit  $x \in G$  tel que  $x^n \in G_o$  pour un entier  $n > 0$  au moins. Montrer qu'alors  $x \in G_o$ . En déduire que si  $A$  est commutative, ou bien  $G = G_o$  ou bien  $G/G_o$  est sans torsion (et c'est alors un groupe infini).

## § 8. TRANSFORMATION DE GELFAND

Dans tout ce paragraphe,  $A$  désigne une algèbre de Banach commutative avec unité, notée  $e$ . En particulier,  $A$  est un anneau commutatif; à ce titre,  $A$  a des idéaux, et en particulier des idéaux maximaux. Nous allons étudier l'ensemble  $\mathcal{M}_A$  des idéaux maximaux de  $A$ .

Mais d'autre part  $A$  est un espace de Banach, pour lequel on connaît déjà l'importance du dual  $A'$ , ensemble des formes linéaires continues sur  $A$ ; là encore, si on veut tenir compte de l'existence d'un produit sur  $A$ , on est amené à faire jouer un rôle privilégié aux  $f \in A'$ , non identiquement nulles, qui sont de plus *multiplicatives*, c'est-à-dire telles que  $f(xy) = f(x)f(y)$  pour tous  $x$  et  $y$  dans  $A$ . Ces formes multiplicatives continues sont appelés les *caractères* de  $A$ . Nous allons étudier l'ensemble  $\hat{A}$  des caractères de  $A$ .

Il y a une bijection naturelle entre  $\mathcal{M}_A$  et  $\hat{A}$ , chaque idéal maximal étant le noyau d'un caractère; réciproquement, le noyau de tout caractère est un idéal maximal de  $A$ .

Rappelons qu'un *idéal*  $I$  de  $A$  est un sous-espace vectoriel de  $A$  tel que  $x \in I$  et  $y \in A$  entraîne  $xy \in I$ . Un idéal  $I$  est dit *propre* si  $I$  est différent de  $A$  tout entier. Un idéal  $M$  est dit *maximal* s'il est propre et si tout idéal propre qui le contient est égal à  $M$ . Il revient au même de dire que  $A/M$  est un corps (par définition un corps n'est pas l'anneau nul). Tout idéal propre  $I$  est contenu dans au moins un idéal maximal (théorème de Krull – cf l'Appendice sur le Lemme de Zorn). Soit  $I$  un idéal propre fermé de l'algèbre de Banach  $A$ . Alors l'anneau et espace vectoriel  $A/I$ , ensemble des classes  $\bar{x} = x + I$ , où  $x \in A$ , avec les opérations évidentes, et la norme

$$\|\bar{x}\| = \inf_{y \in \bar{x}} \|y\|,$$

est une algèbre de Banach, avec  $\bar{e}$  comme unité.

Soit  $G$  l'ensemble des inversibles de  $A$ . Si  $x \in G$ , alors  $x$  n'est dans aucun idéal propre car  $xx^{-1} = e$  appartiendrait à cet idéal, et donc on aurait  $y = ye \in I$  pour tout  $y \in A$ . D'autre part, si  $x \notin G$ , alors l'idéal  $xA$  engendré par  $x$  est propre car  $e \notin xA$ . En conséquence, la réunion des idéaux maximaux de  $A$  coïncide avec le complémentaire de l'ensemble  $G$  des inversibles de  $A$ .

PROPOSITION 1. — *Soit  $M$  un idéal maximal de  $A$ . Alors  $M$  est fermé dans  $A$  et le corps  $M/A$  est le corps des nombres complexes.*

*Preuve.* On vient de voir que  $M \cap G$  est vide. Puisque  $G$  est ouvert,  $\overline{M} \cap G$  est encore vide, donc  $\overline{M}$  est un idéal propre qui contient  $M$ : on a donc  $\overline{M} = M$ , ce qui prouve que  $M$  est fermé. Le quotient  $A/M$  est une algèbre de Banach dont l'anneau est un corps puisque  $M$  est maximal; d'après le théorème de Gelfand-Mazur, ce corps est le corps des nombres complexes.  $\square$

DÉFINITION 1. — *Un caractère de  $A$  est une fonction  $\chi : A \rightarrow \mathbf{C}$  qui possède les propriétés suivantes.*

- (i) *La fonction  $\chi$  n'est pas identiquement nulle.*

- (ii) La fonction  $\chi$  est une forme linéaire sur  $A$ .
- (iii) La fonction  $\chi$  est multiplicative.

De cette définition, il résulte que :

- (iv) On a  $\chi(e) = 1$ .

En effet, si  $\chi(a) \neq 0$ , alors  $\chi(a) = \chi(ae) = \chi(a)\chi(e)$ .

DÉFINITION 2. — On appelle spectre de Gelfand de  $A$ , et l'on note  $\widehat{A}$ , l'ensemble des caractères de  $A$ .

On note  $\mathcal{M}_A$  l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ .

PROPOSITION 2. — L'application  $\chi \mapsto \text{Ker}(\chi)$  établit une bijection de  $\widehat{A}$  sur  $\mathcal{M}_A$ .

*Preuve.* Soit  $\chi \in \widehat{A}$ . D'après (ii) et (iii) c'est un homomorphisme d'algèbres, qui est surjectif car  $\chi(\lambda e) = \lambda\chi(e) = \lambda$  pour tout nombre complexe  $\lambda$ . Ainsi,  $A/\text{Ker}(\chi)$  est isomorphe à  $\mathbf{C}$ , qui est un corps; donc l'idéal  $\text{Ker}(\chi)$  est maximal, et  $\chi \mapsto \text{Ker}(\chi)$  est bien une application de  $\widehat{A}$  sur  $\mathcal{M}_A$ . Cette application est surjective, car si  $M \in \mathcal{M}_A$ , alors l'homomorphisme quotient associé  $\chi : A \rightarrow A/M \simeq \mathbf{C}$  appartient à  $\widehat{A}$ , et  $\text{Ker}(\chi) = M$ . Cette application est injective, car pour  $\chi, \chi' \in \widehat{A}$  distinctes, il existe  $a \in A$  tel que  $\chi(a) \neq \chi'(a)$ . Alors  $y = a - \chi(a)e$  appartient à  $\text{Ker}(\chi)$  mais pas à  $\text{Ker}(\chi')$ . Donc  $\chi \neq \chi'$  entraîne  $\text{Ker}(\chi) \neq \text{Ker}(\chi')$ .  $\square$

THÉORÈME 1. — Soit  $A$  une algèbre de Banach commutative avec élément unité, noté  $e$ . Soit  $\widehat{A}$  son spectre de Gelfand, ensemble des caractères de  $A$ .

(i) Soit  $\chi \in \widehat{A}$ . Alors la forme linéaire  $\chi$  sur  $A$  est continue et de norme 1. Ainsi,  $\widehat{A}$  est-il une partie de la sphère unité du dual  $A'$  de  $A$ .

(ii) Soit  $x \in A$ . Alors

$$\text{sp}_A(x) = \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\}.$$

(iii) Soit  $x \in A$ . Pour que  $x$  soit inversible, il faut et il suffit qu'on ait  $\chi(x) \neq 0$  pour tout  $\chi \in \widehat{A}$ .

*Preuve.* On a :  $\chi(x - \chi(x)e) = \chi(x) - \chi(x)1 = 0$ , donc  $x - \chi(x)e$  ne peut être inversible puisqu'il est dans un idéal maximal  $M = \text{Ker}(\chi)$  de  $A$ , donc dans le complémentaire de  $G$ . Ceci prouve que  $\text{sp}_A(x) \supset \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\}$ . Il en résulte que, pour  $x \in A$ , on a  $|\chi(x)| \leq \|x\|$ ; autrement dit chaque caractère  $\chi$  est une forme linéaire continue de norme  $\leq 1$ , et en fait de norme exactement 1 puisque  $\chi(e) = 1$ . On vient donc de prouver (i) et une moitié de (ii).

Montrons (iii) par la suite d'équivalences logiques :

$$\begin{aligned} x \in G &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{M \in \mathcal{M}_A} M \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } \chi \in \widehat{A} \text{ on a } x \notin \text{Ker}(\chi) \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } \chi \in \widehat{A} \text{ on a } \chi(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Il reste à prouver que

$$\text{sp}_A(x) \subset \{\chi(x) : \chi \in \widehat{A}\}.$$

Si  $\lambda \in \text{sp}_A(x)$ , alors  $x - \lambda e$  n'est pas inversible, donc, d'après le point (iii) qu'on vient de prouver il existe  $\chi \in \widehat{A}$  tel que  $\chi(x - \lambda e) = 0$ , soit tel que  $\lambda = \chi(x)$ .  $\square$

Arrêtons-nous un peu sur le cas particulier des algèbres de fonctions complexes continues sur un compact  $X$ .

Soit  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X)$  l'algèbre de Banach des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace compact  $X$ , munie de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de la convergence uniforme. Pour tout  $x_0 \in X$  fixé, l'évaluation en  $x_0$  :

$$\chi_{x_0} : f \mapsto f(x_0)$$

est évidemment un caractère de  $\mathcal{C}$  ; l'idéal maximal correspondant est

$$M_{x_0} = \text{Ker}(\chi_{x_0}) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x_0) = 0\}.$$

Montrons qu'il n'y a pas d'autres idéaux maximaux dans  $\mathcal{C}(X)$  que les  $M_x$  quand  $x$  parcourt  $X$ . Autrement dit que  $X$  s'identifie au spectre de Gelfand de  $\mathcal{C}(X)$ . Ceci résulte du

*Lemme 1.* — Soit  $I$  un idéal propre de  $\mathcal{C}(X)$ . Alors il existe au moins un point  $x_0 \in X$  tel que toutes les fonctions  $f \in I$  s'annulent en ce point  $x_0$ .

*Preuve.* Supposons le contraire afin d'aboutir à une contradiction. Alors pour tout  $y \in X$  il existe  $f_y \in I$  non nulle en  $y$  et donc par continuité non nulle sur un ouvert  $U_y$  autour de  $y$ . On pose  $g_y = |f_y| = f_y \bar{f}_y$  : c'est une fonction de  $I$  car  $f_y \in I$  et  $I$  est un idéal. Ainsi, pour tout  $y \in X$  il existe une fonction de  $I$  qui est  $\geq 0$  sur  $X$  tout entier et  $> 0$  sur un ouvert  $U_y$  de  $X$  contenant  $y$ . Par compacité on en déduit une suite finie  $y_1, y_2, \dots, y_p \in X$  telle que  $X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \dots \cup U_{y_p}$ . La fonction  $g = g_{y_1} + g_{y_2} + \dots + g_{y_p}$  serait dans  $I$  et  $> 0$  sur  $X$  tout entier, donc inversible : c'est exclu car  $I$  est propre dans  $\mathcal{C}(X)$ .  $\square$

Si  $M$  est un idéal maximal de  $\mathcal{C}(X)$ , donc propre, pour le point  $x_0$  venant du lemme appliqué à  $I = M$  on aura  $M \subset M_{x_0}$ , et donc l'égalité par maximalité de  $M$ .

*Exercice 1.* — On va déterminer tous les idéaux fermés de  $\mathcal{C}(X)$ . Soit  $E$  un fermé de  $X$ . On introduit les idéaux :

$$I_E = \{f \in \mathcal{C}(X) : f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in E\}$$

et

$$J_E = \{f \in \mathcal{C}(X) : \text{il existe un ouvert } U_f \supset E \text{ tel que } f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in U_f\}.$$

1. Montrer que  $J_E$  est l'adhérence de  $I_E$  dans  $\mathcal{C}(X)$ . Indication : penser au Théorème d'Urysohn en considérant les fermés  $Y_1 = \{x : |f(x)| \geq \frac{2}{n}\}$  et  $Y_2 = \{x : |f(x)| < \frac{1}{n}\}$ .

2. Soit  $I$  un idéal propre de  $\mathcal{C}(X)$  et soit

$$E = \{x \in X : f(x) = 0 \text{ pour toute } f \in I\}.$$

Montrer que

$$J_E \subset I \subset I_E.$$

Indication : si  $f \in J_E$ , soit  $Y$  le complémentaire de  $U_f$  dans  $X$ . Montrer qu'il existe une  $g \in I$  qui est strictement positive sur  $Y$ , puis en prolongeant  $\frac{1}{g}$  de  $Y$  à  $X$  par le Théorème d'Urysohn, montrer qu'il existe une  $u \in I$  qui est identiquement égale à 1 sur  $Y$ .

3. En déduire que les idéaux fermés de  $\mathcal{C}(X)$  sont exactement les idéaux  $I_E$  comme ci-dessus, quand  $E$  parcourt l'ensemble des fermés de  $X$ .

4. Tout idéal fermé de  $\mathcal{C}(X)$  est l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent.

*Exercice 2.* — Soit  $A = \mathcal{D}_m([0; 1])$  l'algèbre de Banach définie dans l'Exercice 4. Montrer que les idéaux maximaux de  $A$  sont, ici encore, les noyaux des évaluations aux points de  $[0; 1]$ , mais qu'il y a plusieurs idéaux fermés distincts à être contenus dans un seul idéal maximal donné.

Reprenons la théorie générale des algèbres de Banach commutatives. On ne fait pas de l'ensemble  $\widehat{A}$ , spectre de Gelfand de  $A$ , un espace métrique, mais constatant que c'est une partie de la boule unité du dual  $A'$ , on munit  $A'$  de la topologie faible de dualité avec  $A$  : par définition, on dit que les  $\chi_i \in \widehat{A}$  tendent vers  $\chi$  quand  $i \rightarrow \infty$  si  $\lim_{i \rightarrow \infty} \chi_i(a) = \chi(a)$  pour tout  $a \in A$ . L'ensemble  $\widehat{A}$  devient alors, pour cette notion de limite, un espace topologique (non métrique en général) compact.

À tout  $x \in A$ , on va attacher une fonction continue sur le compact  $\widehat{A}$ , la transformée de Gelfand de  $x$ . L'extrême simplicité apparente de la définition pourrait en masquer la profondeur :

**DÉFINITION 3.** — *Pour tout  $x \in A$  donné, la fonction  $\mathcal{G}x$  définie sur  $\widehat{A}$ , à valeurs complexes, par la formule :*

$$\mathcal{G}x(\chi) = \chi(x),$$

*pour tout  $\chi \in \widehat{A}$ , s'appelle la transformée de Gelfand de  $x$ .*

Chaque fonction  $\mathcal{G}x$  est continue, car si des  $\chi_i \in \widehat{A}$  tendent vers  $\chi$  dans  $\widehat{A}$ , alors pour  $x \in A$  fixé, les nombres  $\chi_i(x)$  tendent vers le nombre  $\chi(x)$ , c'est-à-dire  $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{G}x(\chi_i) = \mathcal{G}x(\chi)$ .

De plus, d'après le Théorème 1, on a les relations :

$$\|\mathcal{G}x\|_\infty = \sup_{\chi \in \widehat{A}} |\mathcal{G}x(\chi)| = \sup_{\chi \in \widehat{A}} |\chi(x)| = \varrho(x) \leq \|x\|$$

et

$$\text{sp}(x) = \{\mathcal{G}x(\chi) : \chi \in \widehat{A}\}.$$

Le spectre de  $x$  est donc l'ensemble des valeurs prises par la transformée de Gelfand  $\mathcal{G}x$ . Il en résulte le

**THÉORÈME 2.** — *Pour que  $x$  soit inversible dans  $A$ , il faut et il suffit que sa transformée de Gelfand  $\mathcal{G}x$  ne s'annule pas dans  $\widehat{A}$ .*

Tout ce que nous avons vu montre aussi que la transformée de Gelfand  $x \mapsto \mathcal{G}x$  est un homomorphisme continu de l'algèbre de Banach  $A$  dans l'algèbre de Banach  $\mathcal{C}(\widehat{A})$  normée par  $\|\cdot\|_\infty$ . En particulier, on a la formule fondamentale :

$$\mathcal{G}(xy) = (\mathcal{G}x)(\mathcal{G}y),$$

qui généralise le fait que la transformation de Fourier transforme le produit de convolution en le produit ponctuel ordinaire. En effet, on a :

$$\mathcal{G}(xy) = \chi(xy) = \chi(x)\chi(y) = \mathcal{G}x\mathcal{G}y.$$

Si  $x$  est inversible dans  $A$ , on a  $\mathcal{G}(x^{-1}) = \frac{1}{\mathcal{G}x}$ .

On remarquera que  $\mathcal{G}$  n'est pas toujours injective :

*Exercice 3.* — Les quatre ensembles suivants sont égaux.

- (i) Le noyau de  $\mathcal{G}$  dans  $A$ .
- (ii) L'intersection des idéaux maximaux de  $A$ .
- (iii) L'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\text{sp}(x) = \{0\}$ .
- (iv) L'ensemble des  $x \in A$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$ .

Cette partie s'appelle le *radical* de  $A$ . Donner un exemple d'algèbre de Banach  $A$  avec un radical non trivial.

*Exercice 4.* — Montrer que  $\mathcal{G}(A)$  est en général distincte de  $\mathcal{C}(\widehat{A})$ , mais qu'elle sépare toujours  $\widehat{A}$ .

*Exercice 5.* — Montrer que  $\mathcal{G}$  est une isométrie de  $A$  dans  $\mathcal{C}(\widehat{A})$  si et seulement si  $\|x^2\| = \|x\|^2$  pour tout  $x \in A$ .

Dans le cas de l'algèbre de Banach  $A = \mathcal{C}(X)$ , où  $\widehat{A} \simeq X$ , la transformée de Gelfand fait correspondre à l'élément  $f \in \mathcal{C}(X)$  la fonction  $f$  elle-même, ce qui ne présente aucun intérêt. Vu l'Exercice 2, il en est de même pour l'algèbre  $A = \mathcal{D}_m([0; 1])$ . En revanche, la profondeur et l'efficacité de la théorie vont apparaître dans son application à l'algèbre de convolution  $\ell^1(\mathbf{Z})$ .

## § 9. THÉORÈME DE WIENER

Reprenons l'algèbre  $\ell^1(\mathbf{Z})$  munie du produit de convolution. C'est l'algèbre des suites  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  de nombres complexes, telles que  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |x_n| < +\infty$ , munie du produit de convolution :

$$x * y = (x * y)_n \quad \text{où} \quad (x * y)_n = \sum_{p \in \mathbf{Z}} x_{n-p} y_p \quad \text{pour tout } n \in \mathbf{Z}$$

Dans des exercices précédents, nous avons commencé à étudier cette algèbre de Banach commutative ; résumons ce que nous en savons déjà.

Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on définit une suite  $e_k$  par  $(e_k)_n = 1$  si  $n = k$  et 0 sinon. Alors on a  $e_h * e_k = e_{h+k}$  pour tous  $h, k \in \mathbf{Z}$ , donc  $(e_1)^n = e_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$  et  $e_0$  est l'élément neutre de  $A$ .

Si  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$ , la série  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n e_n = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n (e_1)^n$  converge (absolument) vers  $x$  dans l'espace de Banach  $\ell^1(\mathbf{Z})$ , c'est-à-dire :

$$x = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N x_n (e_1)^n$$

au sens de la norme  $\ell^1$  ci-dessus. De plus, nous savons que le spectre de l'élément  $e_1$  dans  $\ell^1(\mathbf{Z})$  est le cercle unité du plan complexe :

$$\text{sp}(e_1) = \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| = 1\} = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbf{R}\}.$$

On va voir que le spectre de Gelfand de  $\ell^1(\mathbf{Z})$  s'identifie à  $\mathbb{T}$ .

Pour tout  $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$  et toute  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$ , posons :

$$\chi_{e^{i\theta}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\theta},$$

ce qui a un sens, car la série converge (absolument) dans  $\mathbf{C}$ . Il est clair que  $x \mapsto \chi_{e^{i\theta}}(x)$  est une forme linéaire non nulle sur  $\ell^1(\mathbf{Z})$ , car  $\chi_{e^{i\theta}}(e_0) = 1$ . Vérifions que c'est un caractère, c'est-à-dire qu'elle est multiplicative sur  $\mathbf{A}$ . Si  $x \in \mathbf{A}$  et  $y \in \mathbf{A}$ , on a :

$$\begin{aligned} \chi_{e^{i\theta}}(x)\chi_{e^{i\theta}}(y) &= \left( \sum_{p=-\infty}^{\infty} x_p e^{ip\theta} \right) \left( \sum_{q=-\infty}^{\infty} y_q e^{iq\theta} \right) = \sum_{p,q \in \mathbf{Z}} x_p y_q e^{i(p+q)\theta} \\ &= \sum_{n \in \mathbf{Z}} \left( \sum_{p+q=n} x_p y_q \right) e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (x * y)_n e^{in\theta}, \end{aligned}$$

ce qui vaut encore  $\chi_{e^{i\theta}}(x * y)$ ; dans les calculs qui précèdent, on a pu regrouper les termes selon les  $n = p + q$ , vu le théorème sur la multiplication de Cauchy des séries absolument convergentes.

Ainsi tout  $\chi_{e^{i\theta}}$  est un caractère de  $\ell^1(\mathbf{Z})$ ; montrons qu'il n'y en a pas d'autres. Soit  $\chi \in \widehat{\mathbf{A}}$ . Cherchons  $e^{i\theta}$  tel que  $\chi = \chi_{e^{i\theta}}$ . La valeur candidate de  $e^{i\theta}$  se trouve au moyen de  $e_1$ . Plus précisément, puisque  $e_{-1} = (e_1)^{-1}$  on a  $\chi(e_1)\chi(e_{-1}) = 1$  avec  $|\chi(e_1)| \leq 1$  et  $|\chi(e_{-1})| \leq 1$  car  $\|e_1\| = \|e_{-1}\| = 1$ , et donc  $|\chi(e_1)| = 1$  (ce qui résulte aussi du fait que  $\text{sp}(e_1) = \mathbb{T}$ ). On peut donc écrire  $\chi(e_1) = e^{i\theta}$  puis, par multiplicativité :  $\chi(e_{-1}) = e^{-i\theta}$  et  $\chi(e_n) = e^{in\theta}$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . On peut maintenant comparer  $\chi$  et  $\chi_{e^{i\theta}}$  : ces deux caractères coïncident sur chaque  $e_n$  ( $n \in \mathbf{Z}$ ), donc par linéarité sur toutes les combinaisons linéaires finies  $\sum_{n=-N}^N x_n (e_1)^n$ ; donc par passage à la limite quand  $N \rightarrow \infty$ , on a :  $\chi(x) = \chi_{e^{i\theta}}(x)$  pour tout  $x \in \ell^1(\mathbf{Z})$ . En résumé :

PROPOSITION 1. — *Les caractères de l'algèbre de Banach  $\mathbf{A} = \ell^1(\mathbf{Z})$  sont exactement les :*

$$x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \mapsto \chi_{e^{i\theta}}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\theta}.$$

On peut donc identifier le spectre de Gelfand  $\widehat{\mathbf{A}}$  avec le cercle unité  $\mathbb{T} = \{e^{i\theta}\}_{\theta \in \mathbf{R}}$  de  $\mathbf{C}$ , par  $\chi_{e^{i\theta}} \leftrightarrow e^{i\theta}$ . Après cette identification, la transformée de Gelfand  $\mathcal{G}x$  d'un élément  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$  est la fonction continue sur  $\mathbb{T}$  définie par :

$$\mathcal{G}x(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\theta}.$$

COROLLAIRE 1. — *Pour que  $x = (x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$  soit inversible dans  $\ell^1(\mathbf{Z})$  il faut et il suffit que pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ , on ait :  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{in\theta} \neq 0$ .*

Ce corollaire peut être reformulé plus classiquement, sous la forme d'un théorème initialement dû à N. Wiener.

THÉORÈME 1 (Wiener). — *Soit  $t \mapsto f(t)$  une fonction continue de variable réelle, de période  $2\pi$  et à valeurs complexes. Soient*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$$

*ses coefficients de Fourier ( $n \in \mathbf{N}$ ). On fait les deux hypothèses suivantes.*

- (i) La fonction  $f$  ne s'annule pas.
- (ii) La série de Fourier de  $f$  est absolument convergente :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

Alors, en posant  $g(t) = \frac{1}{f(t)}$ , on a :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(g)| < +\infty.$$

Autrement dit, si une fonction continue  $f$  sur  $\mathbb{T}$  ne s'annule pas – ce qui permet de considérer la fonction inverse  $\frac{1}{f}$  – et si  $f$  est dans la classe (très particulière) des fonctions à série de Fourier absolument convergente, alors  $\frac{1}{f}$  est elle aussi dans cette classe.

Cet énoncé, découvert par Norbert Wiener en 1932, et démontré par de longs calculs de convolution, fut redémontré comme ci-dessus en quelques lignes par Israël Gelfand comme application de sa théorie des algèbres de Banach.

*Preuve.* Soit  $x \in \ell^1(\mathbf{Z})$  telle que  $x_n = c_n(f)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ . Alors  $x$  satisfait à l'hypothèse du Corollaire, car  $f(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} x_n e^{in\theta}$  n'est jamais nulle. Donc  $x$  est inversible dans  $\ell^1(\mathbf{Z})$ ; soit  $y = (y_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  son inverse. Posons  $g(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} y_n e^{in\theta}$ . Puisque  $x * y = e_0$ , par transformation de Gelfand on a :  $g(\theta)f(\theta) = 1$  pour tout  $\theta$ , donc  $g = \frac{1}{f}$ . Mais les coefficients de Fourier de  $g$  sont les  $y_n$ ; donc  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(g)| < +\infty$ .  $\square$

*Exercice 1.* — Soit  $A$  l'algèbre des sommes de séries de Taylor absolument convergentes  $f = f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , munie de la norme  $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ .

1. Montrer que les caractères de  $A$  sont exactement les  $\chi_{z_0} : f \mapsto f(z_0)$  où  $z_0 \in \mathbf{C}$  avec  $|z_0| \leq 1$ . Ceci permet d'identifier  $\widehat{A}$  au disque unité fermé de rayon 1 de  $\mathbf{C}$ .

2. Montrer que si  $f \in A$  n'est jamais nulle sur ce disque, alors il existe des nombres complexes  $b_n$  tels que

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

3. Soient  $f_1, f_2, \dots, f_p$  des fonctions appartenant à  $A$  et n'ayant aucun zéro commun dans  $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ . Montrer qu'il existe  $g_1, g_2, \dots, g_p$  telles que  $\sum_{i=1}^p f_i g_i = 1$ .

*Exercice 2.* — Soit  $A = \mathcal{O}\mathcal{C}(\overline{U})$  l'algèbre de l'Exemple 3. On pose  $e_1(z) = z$ .

1. Montrer que tout  $f \in A$  est limite en norme de  $A$  de polynômes en  $e_1$ .

2. Montrer que les seuls caractères de  $A$  sont les évaluations aux points de  $\overline{U}$ .

3. Soient  $f_1, f_2, \dots, f_p$  des fonctions appartenant à  $A$  et n'ayant aucun zéro commun dans  $\overline{U}$ . Montrer qu'il existe  $g_1, g_2, \dots, g_p$  telles que  $\sum_{i=1}^p f_i g_i = 1$ .

4. Montrer que cette algèbre est strictement plus grande que celle de l'Exercice 6.

*Exercice 3.* — Soit  $A$  une algèbre de Banach possédant un élément  $a$  (appelé *générateur*) tel que l'ensemble des  $P(a)$ , où  $P \in \mathbf{C}[X]$ , soit dense dans  $A$ . Montrer que dans ce cas  $\chi \mapsto \chi(a)$  établit une bijection de  $\widehat{A}$  sur  $\text{sp}_A(a)$ . Reconsidérer les Exercices 6 et 2 dans cette perspective.

*Exercice 4.* — Soit  $X$  un espace compact. Soit  $A$  une sous-algèbre de  $\mathcal{C}(X)$ . On fait les hypothèses suivantes

- (i)  $A$  sépare  $X$  ;
- (ii)  $1 \in A$  ;
- (iii)  $A$  est auto-adjointe, i.e.  $f \in A \Rightarrow \bar{f} \in A$  ;
- (iv) si  $f$  ne s'annule jamais sur  $A$ , alors  $\frac{1}{f} \in A$ .

Montrer qu'alors les seuls homomorphismes non identiquement nuls de l'algèbre  $A$  dans le corps  $\mathbf{C}$  sont les homomorphismes d'évaluation  $\chi_x : f \mapsto f(x)$ , où  $x$  parcourt  $X$ . En particulier, si  $A$  est une algèbre de Banach, son spectre de Gelfand s'identifie à  $X$ .

Vis-à-vis du calcul fonctionnel holomorphe, la transformation de Gelfand se comporte comme on peut l'espérer.

PROPOSITION 2. — Soit  $x \in A$ . Soit  $F$  une fonction holomorphe au voisinage de  $\text{sp}(x)$  et soit  $F(x)$  l'élément qui correspond à  $F$  dans le calcul fonctionnel holomorphe. Alors

$$\mathcal{G}F(x) = F \circ \mathcal{G}x.$$

*Preuve.* C'est un calcul. Pour tout  $\chi \in \widehat{A}$ , on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}F(x)(\chi) &= \chi(F(x)) &= \left\langle \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda e - x)^{-1} F(\lambda) d\lambda \middle| \chi \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \langle (\lambda e - x)^{-1} | \chi \rangle F(\lambda) d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (\lambda z - \chi(x))^{-1} F(\lambda) d\lambda \\ &= F(\chi(x)) &= F(\mathcal{G}x(\chi)), \end{aligned}$$

qui est bien  $(F \circ \mathcal{G}x)(\chi)$ . □

On en déduit une généralisation du Théorème de Wiener :

THÉORÈME 2 (Wiener-Lévy). — Soit  $f = f(t)$  une fonction continue de variable réelle et de période  $2\pi$ , dont la série de Fourier de  $f$  est absolument convergente :

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

Soit  $F$  une fonction holomorphe au voisinage de l'ensemble  $f(\mathbb{T})$  des valeurs prises par  $f$ . Alors la fonction

$$(F \circ f) : t \mapsto F(f(t))$$

est encore une fonction  $2\pi$ -périodique à série de Fourier de  $f$  absolument convergente.

Évidemment, pour  $F(z) = \frac{1}{z}$  on retrouve le Théorème de Wiener.

*Preuve.* Sur  $\mathbb{T} \simeq \widehat{\ell^1(\mathbf{Z})}$ , on a :

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(f) e^{in\theta} = \mathcal{G}x(\chi_{e^{i\theta}})$$

où  $x = (c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$  appartient à  $\ell^1(\mathbf{Z})$  par hypothèse. Le spectre de  $x$  est l'ensemble  $f(\mathbb{T})$  des valeurs prises par  $\mathcal{G}x = f$ , donc  $F$  est holomorphe au voisinage de  $\text{sp}(x)$  ; on peut donc

appliquer la Proposition 2 :

$$(*) \quad (F \circ f)(\theta) = \mathcal{G}F(x)(\chi_{e^{i\theta}}) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} d_n e^{in\theta}$$

avec  $F(x) = (d_n)_{n \in \mathbf{Z}} \in \ell^1(\mathbf{Z})$ , donc  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)| < +\infty$ . Mais, d'après (\*), on a  $d_n = c_n(F \circ f)$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .  $\square$

*Exercice 5.* — Énoncer et démontrer un théorème de type Wiener-Lévy pour l'algèbre de l'Exercice 6.

- Transformation de Fourier comme transformation de Gelfand

On cite ici des résultats sans les démontrer.

L'algèbre de Banach commutative la plus importante est peut-être l'algèbre de convolution  $L^1(\mathbf{R})$  pour la norme  $\|\cdot\|_1$  et le produit

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathbf{R}} f_1(x-t)f_2(t) dt.$$

Or cette algèbre n'a pas d'élément neutre (un tel élément neutre ne pourrait être que la mesure de Dirac, qui n'est pas une fonction), donc ce qui précède ne s'applique pas directement à  $L^1(\mathbf{R})$ .

Soit  $\tilde{\mathbf{A}}$  l'algèbre déduite de  $L^1(\mathbf{R})$  par adjonction d'un élément neutre, définie dans l'Exemple 9. Pour tout  $t \in \mathbf{R}$  et tout  $(f, \lambda) \in \tilde{\mathbf{A}} = L^1(\mathbf{R}) \times \mathbf{C}$ , la formule :

$$\chi_t(f, \lambda) = \int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-ixt} dx = \mathcal{F}f(t),$$

qui donne la transformée de Fourier de  $f \in L^1(\mathbf{R})$ , définit évidemment un caractère de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , car  $\mathcal{F}(f_1 * f_2) = \mathcal{F}(f_1)\mathcal{F}(f_2)$ . On montre qu'il n'y a pas d'autre caractère de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , excepté  $\chi_\infty$  défini par  $\chi_\infty(f, \lambda) = \lambda$ .

Ainsi le spectre de Gelfand de  $\tilde{\mathbf{A}}$  s'identifie à  $\mathbf{R} \sqcup \{\infty\}$ . Dans cette identification, la restriction à  $\mathbf{R}$  de la transformée de Gelfand de  $(f, \lambda)$  n'est autre que la transformée de Fourier de la fonction  $f$ . Un théorème de type Wiener est le suivant : soient  $a < b$  des nombres réels et soit  $f \in L^1(\mathbf{R})$  telle que  $\mathcal{F}f(t)$  ne soit nulle pour aucun  $t \in [a; b]$ . Alors il existe  $g \in L^1(\mathbf{R})$  telle que  $\mathcal{F}g(t) = \frac{1}{\mathcal{F}f(t)}$  pour tout  $t \in [a; b]$ .

On retrouvera toutes ces idées dans un contexte un peu moins difficile en résolvant l'exercice qui suit.

*Exemple 1.* — L'algèbre de Banach  $L^1(\mathbb{T})$  des fonctions intégrables de période  $2\pi$ , avec le produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f_1(\theta - \varphi)f_2(\varphi) d\varphi.$$

est une algèbre de Banach sans élément unité. Soit  $\tilde{A}$  l'algèbre obtenue en lui adjoignant un élément unité. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbf{Z}$

$$(f, \lambda) \mapsto c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta$$

est un caractère de  $\tilde{A}$ , et qu'il n'y a pas d'autre caractère de  $\tilde{A}$  hormis  $c_\infty$  défini par  $c_\infty(f, \lambda) = \lambda$ . Ainsi le spectre de Gelfand de  $\tilde{A}$  s'identifie-t-il à  $\mathbf{Z} \sqcup \{\infty\}$ . En utilisant la mesure de Dirac, pouvez-vous énoncer un théorème de type Wiener dans cette situation ?



# Théorie spectrale des opérateurs compacts

Dans le chapitre sur les algèbres de Banach, nous avons étudié le spectre en général. Nous allons approfondir cette notion dans le cas d'un opérateur  $T$  dans un espace de Banach. Une partie de  $\text{sp}(T)$  est formée de *valeurs propres* de  $T$ . Si  $E$  est de dimension finie,  $\text{sp}(T)$  est tout entier formé de valeurs propres de  $T$  : c'est l'ensemble (fini) des racines du polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $T$ .

Si  $E$  est de dimension quelconque, finie ou infinie, l'opérateur  $T$  est dit *compact* si, pour toute suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  bornée dans  $E$ , on peut extraire de la suite  $(Tf_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy dans  $E$ . Alors  $T$  a des propriétés spectrales remarquables : tout  $\lambda \in \text{sp}(T)$  non nul est en fait une valeur propre de  $T$  ; ces valeurs propres sont en nombre fini ou forment un ensemble dénombrable  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$  ; leurs sous-espaces propres sont de dimension finie.

Les opérateurs intégraux  $f \mapsto Tf$  dans  $\mathcal{C}([a; b])$ , dits *de Fredholm* et définis par :

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

sont les exemples les plus intéressants d'opérateurs compacts. Leur théorie spectrale permet de résoudre les équations intégrales associées (alternative de Fredholm, équations de Volterra, d'Abel). À cette théorie se rattache naturellement celle de Sturm-Liouville.

## § 1. VALEURS SPECTRALES ET VALEURS PROPRES

Dans ce chapitre,  $E$  désigne un espace de Banach sur  $\mathbf{C}$ . On note simplement  $\mathcal{L}(E)$  l'algèbre de Banach  $\mathcal{L}(E, E)$  des opérateurs bornés  $T$  dans  $E$ , c'est-à-dire des applications

linéaires continues  $E \rightarrow E$ , avec la norme :

$$\|T\| = \sup_{f \in E, \|f\| \leq 1} \|Tf\|.$$

Cette algèbre, non commutative dès que  $\dim E \geq 2$ , a un élément neutre, l'opérateur identique  $\text{id}_E$ .

DÉFINITION 1. — Soit  $T$  un opérateur dans  $E$  et soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

(i) On dit que  $\lambda$  est une valeur spectrale de  $T$ , ou que  $T$  appartient au spectre  $\text{sp}(T)$  de  $T$ , si — conformément à la théorie des algèbres de Banach — l'opérateur  $T - \lambda \text{id}_E$  n'est pas inversible dans  $\mathcal{L}(E)$ ; autrement dit, s'il n'existe pas d'opérateur borné  $S \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $(T - \lambda \text{id}_E) \circ S = S \circ (T - \lambda \text{id}_E) = \text{id}_E$ .

(ii) On dit que  $\lambda$  est valeur propre de  $T$  si  $T - \lambda \text{id}_E$  n'est pas injectif dans  $E$ ; autrement dit, s'il existe  $f \in E - \{0\}$  tel que  $Tf = \lambda f$ . De tels vecteurs  $f$  sont appelés des vecteurs propres de  $T$  pour la valeur propre  $\lambda$ .

(iii) On dit que  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de  $T$  s'il existe une constante  $c > 0$  et une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  dans  $E$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} Tf_n - \lambda f_n = 0$ , mais avec  $\|f_n\| \geq c$  pour tout  $n \geq 0$ .

Si  $E$  est un espace de fonctions, on parle de *fonction propre* plutôt que de vecteur propre. Dans tous les cas, on omet souvent de préciser la valeur propre pour un vecteur propre.

Rappel : la partie précédente a permis de voir dans un contexte plus général :

(i) que  $\text{sp}(T)$  est un sous-ensemble compact et non vide de  $\mathbf{C}$ , contenu dans le disque  $\{\lambda \in \mathbf{C} : |\lambda| \leq \|T\|\}$ ;

(ii) que la fonction  $\lambda \mapsto \langle (T - \lambda \text{id}_E)^{-1}, \varphi \rangle$  est, pour toute forme linéaire continue  $\varphi$  sur  $\mathcal{L}(E)$ , holomorphe dans l'ouvert de  $\mathbf{C}$  complémentaire de  $\text{sp}(T)$ ;

(iii) qu'on a la formule du rayon spectral :

$$\sup_{\lambda \in \text{sp}(T)} |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T\|^{n \frac{1}{n}};$$

(iv) que, si pour  $F$  holomorphe au voisinage de  $\text{sp}(T)$ , on définit l'opérateur  $F(T)$  dans  $E$  par :

$$F(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (T - \lambda \text{id}_E)^{-1} F(\lambda) d\lambda,$$

alors  $F \mapsto F(T)$  est un homomorphisme d'algèbres de  $\mathcal{H}(\text{sp}(T))$  dans  $\mathcal{L}(E)$  (calcul fonctionnel holomorphe);

(v) et que  $\text{sp}(F(T)) = F(\text{sp}(T))$  (théorème de Hilbert-Dirac).

Ce qui apparaît en plus dans  $\mathcal{L}(E)$ , c'est la notion de valeur propre.

PROPOSITION 1. — Soit  $T$  un opérateur dans  $E$  et soit  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

(i) Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ , alors  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de  $T$ .

(ii) Si  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de  $T$ , alors  $\lambda$  est une valeur spectrale de  $T$ .

(iii) Si  $\lambda$  appartient à la frontière de  $\text{sp}(T)$ , alors  $\lambda$  est une valeur propre généralisée de  $T$ .

*Preuve.* Les points (i) et (ii) sont évidents, mais ça va mieux en l'écrivant.

Prouvons le point (iii). Soit  $\lambda$  un point frontière du compact  $\text{sp}(T)$ . Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  une suite qui tend vers  $\lambda$  mais avec  $\lambda_n \notin \text{sp}(T)$  pour tout  $n \geq 0$ . Ainsi chaque opérateur  $T - \lambda_n \text{id}_E$  est inversible dans  $E$ , alors que  $T - \lambda \text{id}_E$  ne l'est pas. Puisque  $T - \lambda \text{id}_E = T - \lambda_n \text{id}_E + (\lambda_n - \lambda) \text{id}_E$ , on en déduit que

$$|\lambda - \lambda_n| \geq \frac{1}{\| (T - \lambda_n \text{id}_E)^{-1} \|},$$

sinon  $T - \lambda \text{id}_E$  serait inversible, au titre d'élément suffisamment proche de l'inversible  $T - \lambda_n \text{id}_E$  (cf Théorème 1). Ceci prouve que  $\| (T - \lambda_n \text{id}_E)^{-1} \|$  tend vers  $+\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Posons

$$S_n = \frac{(T - \lambda_n \text{id}_E)^{-1}}{\| (T - \lambda_n \text{id}_E)^{-1} \|}.$$

On a  $\|S_n\| = 1$ , donc il existe des  $g_n \in E$  tels que  $\|g_n\| = 1$  et  $\frac{1}{2} \leq \|S_n g_n\| \leq 1$  pour tout  $n \geq 0$ . Posons  $f_n = S_n g_n$ . Alors  $\|f_n\| \geq \frac{1}{2} = c > 0$  et

$$\begin{aligned} (T - \lambda \text{id}_E) f_n &= (T - \lambda_n \text{id}_E) f_n + (\lambda_n - \lambda) f_n \\ &= (T - \lambda_n \text{id}_E) S_n g_n + (\lambda_n - \lambda) f_n \\ &= \frac{1}{\| (T - \lambda_n \text{id}_E)^{-1} \|} g_n + (\lambda_n - \lambda) f_n \end{aligned}$$

tend vers 0 car  $\|f_n\| \leq \|g_n\| \leq 1$ . □

*Exercice 1.* — Soit  $S$  l'opérateur de décalage défini et étudié dans l'exercice 1. On sait que le spectre de  $S$  est le disque unité fermé de  $\mathbb{C}$ . Montrer que  $S$  n'a pas de valeur propre et que le cercle unité est l'ensemble des valeurs propres généralisées de  $S$ .

## § 2. NOTION D'OPÉRATEUR COMPACT

Soit  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$  et soit  $T \in \mathcal{L}(E)$ .

**DÉFINITION 1.** — On dit que  $T$  est un opérateur compact dans  $E$  si quelle que soit la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  bornée dans  $E$  on peut extraire de  $(T f_n)_{n \geq 0}$  une sous-suite convergente ;

Autrement dit,  $T$  est un opérateur compact dans  $E$  si l'image par  $T$  de la boule unité de  $E$  est d'adhérence compacte.

On notera  $\mathcal{K}(E)$  l'ensemble des opérateurs compacts dans  $E$ . Tout opérateur de rang fini, c'est-à-dire de la forme :

$$f \mapsto T(f) = \alpha_1(f)g_1 + \alpha_2(f)g_2 + \cdots + \alpha_n(f)g_n,$$

où  $g_1, g_2, \dots, g_n$  sont des vecteurs donnés dans  $E$  et  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont des formes linéaires continues données sur  $E$ , est compact.

Ceci provient du fait que  $T(E)$  est un espace vectoriel de dimension finie, donc l'image par  $T$  de la boule unité de  $E$  est une partie bornée d'un espace normé de dimension finie : cette image a une adhérence compacte par le théorème de Borel-Lebesgue.

À partir des opérateurs de rang fini, on peut fabriquer beaucoup d'opérateurs compacts au moyen du résultat suivant.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $T \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $(T_n)_{n \geq 0}$  une suite d'opérateurs compacts dans  $E$ , telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T - T_n\| = 0$ . Alors  $T$  est un opérateur compact.

*Preuve.* On va utiliser le procédé diagonal. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite dans  $E$  telle que  $\|f_n\| \leq 1$  pour tout  $n$ . On va montrer que la suite  $(Tf_n)_{n \geq 0}$  admet une sous-suite de Cauchy dans  $E$ .

Puisque  $T_1$  est un opérateur compact, on peut extraire de  $(f_n)_{n \geq 0}$  une sous-suite  $(f_n^1)_{n \geq 0}$  telle que la suite  $(T_1 f_n^1)_{n \geq 0}$  soit de Cauchy. Puis,  $T_2$  étant compact, on peut extraire de la suite  $(f_n^1)_{n \geq 0}$  une sous-suite  $(f_n^2)_{n \geq 0}$  telle que  $(T_2 f_n^2)_{n \geq 0}$  soit de Cauchy, etc. Par récurrence, on construit pour tout entier  $m \geq 1$  une suite  $(f_n^m)_{n \geq 0}$  extraite de  $(f_n^{m-1})_{n \geq 0}$  et telle que la suite  $(T_m f_n^m)_{n \geq 0}$  soit de Cauchy.

Considérons la suite diagonale  $(f_n^n)_{n \geq 0}$  : elle est extraite de la suite initiale  $(f_n)_{n \geq 0}$ , et pour tout  $m \geq 1$  fixé, la suite  $(T_m f_n^n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy. Pour  $\varepsilon > 0$  donné, fixons un indice  $m$  tel que  $\|T - T_m\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ . Quels que soient les indices  $q \geq p$ , on a :

$$T(f_q^q) - T(f_p^p) = (T - T_m)(f_q^q - f_p^p) + T_m(f_q^q) - T_m(f_p^p),$$

donc

$$\|T(f_q^q) - T(f_p^p)\| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} + \|T_m(f_q^q) - T_m(f_p^p)\| \leq \varepsilon$$

dès que  $q \geq p \geq N_\varepsilon$ , vu que la suite  $(T_m f_n^n)_{n \geq 0}$  est de Cauchy.  $\square$

Remarquons que  $\text{id}_E$  est compact si, et seulement si,  $E$  est de dimension finie, car d'après le théorème de F. Riesz, la finitude de la dimension est la condition nécessaire et suffisante pour que la boule unité de  $E$  soit compacte.

Remarquons aussi que  $\mathcal{L}\mathcal{K}(E)$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(E)$  : si  $T$  est compact et si  $S \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $ST$  et  $TS$  sont des opérateurs compacts ; car l'image par  $S$  de la boule unité de  $E$  est bornée, et l'image par  $S$  d'un compact est un compact.

Des deux remarques précédentes, il résulte que dans un espace  $E$  de dimension infinie, un opérateur compact n'est jamais inversible ; dans ce cas,  $0$  est toujours dans le spectre de l'opérateur.

Mais les opérateurs compacts les plus importants en Analyse sont les opérateurs intégraux que nous allons définir maintenant.

Soit  $K = K(x, y)$  une fonction continue donnée, à valeurs complexes, sur le carré  $[a; b] \times [a; b]$  de  $\mathbf{R}^2$ . Dans l'espace de Banach  $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  des fonctions continues sur  $[a; b]$ , à valeurs complexes, muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_\infty$ , l'opérateur de Fredholm de

noyau  $K$ , à savoir  $f \mapsto Tf$ , où

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy,$$

est compact. En effet, l'ensemble des fonctions  $Tf$ , où  $\|f\|_\infty \leq 1$ , est équicontinu, car :

$$|Tf(x) - Tf(y)| \leq (b-a) \sup_{y \in [a; b]} |K(x, y) - K(x', y)| \leq \varepsilon$$

dès que  $|x - x'| \leq \eta$ , vu l'uniforme continuité de  $K$  dans le carré  $[a; b] \times [a; b]$ . Donc l'image par  $T$  de la boule unité  $\{\|f\|_\infty \leq 1\}$  est d'adhérence compacte dans  $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , par le Théorème d'Ascoli.

Dans le même espace  $E = \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  est aussi compact l'opérateur de Volterra, à savoir  $f \mapsto Sf$  défini par :

$$Sf(x) = \int_a^x K(x, y)f(y) dy \quad (a \leq x \leq b)$$

comme on le voit aussi par le Théorème d'Ascoli.

*Exercice 1.* — Soit  $1 \leq p \leq +\infty$ . On prend pour  $E$  l'espace  $\ell^p(\mathbf{Z})$  (voir l'Appendice sur les espaces de suites). Soit  $(a_n)_{n \geq 1}$  une suite bornée de nombres complexes donnée. Dans l'espace de Banach  $\ell^p$  soit  $x \mapsto y = Tx$  l'opérateur défini par  $y_n = a_n x_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Montrer que  $T$  est compact si et seulement si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . Indications : on prouvera d'abord que  $\|T\| = \sup_n |a_n|$ ; si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , on fera apparaître  $T$  comme limite d'opérateurs de rang fini.

### § 3. PROPRIÉTÉS SPECTRALES DES OPÉRATEURS COMPACTS

Dans un espace  $E$  de dimension finie, l'Algèbre linéaire nous a appris qu'un opérateur injectif est automatiquement bijectif, donc n'a pas d'autres valeurs spectrales que les valeurs propres, et que ces valeurs propres sont en nombre fini, étant les racines du polynôme caractéristique.

Dans un espace  $E$  de dimension quelconque, nous allons voir que les opérateurs compacts ont des propriétés spectrales très particulières, qui généralisent celles des opérateurs en dimension finie.

*Lemme 1.* — Soit  $T \in \mathcal{L}\mathcal{H}(E)$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre généralisée non nulle de  $T$ . Alors  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ .

*Preuve.* Par hypothèse il existe une suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  telle que  $\|f_n\| \geq c > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (Tf_n - \lambda f_n) = 0$ . En divisant  $f_n$  par  $\|f_n\|$  on se ramène à  $\|f_n\| = 1$  pour tout  $n$ . De la suite  $(Tf_n)_{n \geq 0}$  on peut extraire une suite convergente :  $\lim_{k \rightarrow \infty} Tf_{n_k} = g$ . Évidemment  $(\lambda f_{n_k})_{k \geq 0}$  tend vers  $\lambda g$ . On a :

$$\|g\| = |\lambda| \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k}\| = |\lambda| \neq 0,$$

donc  $g \neq 0$ . Enfin, par continuité de  $T$  on a :

$$Tg = \lim_{k \rightarrow \infty} T(\lambda f_{n_k}) = \lambda \lim_{k \rightarrow \infty} T(f_{n_k}) = \lambda g,$$

ce qui prouve que  $\lambda$  est une valeur propre de  $T$ . □

*Lemme 2.* — Soit  $T \in \mathcal{L}\mathcal{K}(E)$ . Alors pour tout nombre réel  $c > 0$ , l'opérateur  $T$  n'a qu'un nombre fini de valeurs propres distinctes de module  $> c$ .

*Preuve.* On raisonne par l'absurde, en se donnant une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 0}$  de valeurs propres distinctes telles que  $|\lambda_n| > c > 0$  pour tout  $n$  et où  $c$  ne dépend pas de  $n$ . Soit  $(e_n)_{n \geq 0}$  une suite de vecteurs propres associés :  $Te_n = \lambda_n e_n$  et  $e_n \neq 0$  pour tout  $n \geq 0$ . Les vecteurs  $e_n$  forment une famille libre car les valeurs propres sont deux à deux distinctes. Soit  $L_n$  le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs  $e_1$  à  $e_n$ . Le vecteur  $e_n$  n'appartient pas à  $L_{n-1}$  et par ailleurs, par le lemme de Riesz, il existe  $h_n \in L_n$  tel que  $\|h_n\| = 1$  et  $\|h_n - f\| \geq \frac{1}{2}$  pour tout  $f \in L_{n-1}$ . Il existe  $\alpha \in \mathbf{C}$  et  $f_0 \in L_{n-1}$  tels que  $h_n = f_0 + \alpha e_n$ . On a :

$$Th_n = Tf_0 + \alpha Te_n = Tf_0 + \lambda_n \alpha e_n = Tf_0 + \lambda_n(h_n - f_0) = (T - \lambda_n)f_0 = \lambda_n(h_n - f_n),$$

où  $f_n \in L_{n-1}$ . Donc, pour  $m < n$ , on a :

$$Th_n - Th_m = \lambda_n(h_n - f),$$

où  $f \in L_{n-1}$ . Par suite  $\|Th_n - Th_m\| = |\lambda_n| \cdot \|h_n - f\| \geq \frac{c}{2}$  pour tout  $n > m$ , ce qui évidemment interdit à toute suite extraite de  $(Th_n)_{n \geq 0}$  d'être de Cauchy, contrairement à l'hypothèse suivant laquelle l'opérateur  $T$  est compact. □

*Lemme 3.* — Soit  $T \in \mathcal{L}\mathcal{K}(E)$ . Soit  $\lambda \in \text{sp}(T) - \{0\}$ . Alors  $\lambda$  est valeur propre de  $T$ .

*Preuve.* D'après la Proposition 1 (iii) et le Lemme 1, c'est déjà vrai pour tout  $\lambda \neq 0$  point frontière de  $\text{sp}(T)$ . De plus, la Proposition 1 (iii) et le Lemme 2 impliquent qu'étant donné  $c > 0$ , il n'y a qu'un nombre fini de points frontière de  $\text{sp}(T)$  de module  $> c$ . Raisonnons par l'absurde, et supposons que  $\text{sp}(T)$  contienne un point intérieur  $\lambda \neq 0$ . Posons  $c = |\lambda|$ , et soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les points frontière de  $\text{sp}(T)$  de module  $> c$ . Par  $\lambda$  menons une demi-droite extérieure au disque centré en 0 de rayon  $c$ , et qui évite les  $\lambda_i$ . Puisque  $\lambda$  est intérieur à  $\text{sp}(T)$ , qui est compact, cette demi-droite devrait couper la frontière de  $\text{sp}(T)$ , ce qui est impossible car cela fournirait un point frontière de module  $> c$  supplémentaire. □

Les lemmes ont déjà prouvé l'essentiel du résultat qui suit.

**THÉORÈME 1.** — Soit  $T$  un opérateur compact dans un espace de Banach. Alors toute valeur spectrale non nulle, i.e. tout  $\lambda \neq 0$  tel que  $T - \lambda \text{id}_E$  est non inversible, est en fait une valeur propre de  $T$ , et le sous-espace propre associé

$$V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_E)$$

est de dimension finie. De plus, l'ensemble de ces valeurs propres est au plus dénombrable et 0 en est le seul point d'accumulation possible.

*Preuve.* Il reste seulement à prouver que  $\dim V_\lambda < +\infty$ . Or,  $V_\lambda$  est stable par  $T$ , et donc  $T|_{V_\lambda}$  est un opérateur à la fois compact et inversible (car homothétie de rapport  $\lambda \neq 0$ ) de  $V_\lambda$ . On a vu, grâce au théorème de Riesz, que ceci impose  $\dim V_\lambda < +\infty$ . □

*Exercice 1.* — Dans l'exercice 2, quelles sont les valeurs propres des  $T$ ? Quels sont les vecteurs propres correspondants?

*Exercice 2.* — Montrer que dans  $\mathcal{C}([0; \frac{\pi}{2}], \mathbf{C})$ , l'opérateur de Fredholm  $f \mapsto Tf$  où

$$Tf(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)f(y) dy,$$

est de rang 2. Quelles sont les valeurs propres non nulles de  $T$  et les vecteurs propres associés?

#### § 4. ALTERNATIVE DE FREDHOLM

C'est l'analogie de ce qui se passe en Algèbre linéaire de dimension finie. Rappelons ce qu'on appelle dans ce cas l'*alternative de Cramer*. Soit  $A$  une matrice complexe  $n \times n$ . Alors :

- ou bien : quel que soit  $\vec{b} \in \mathbf{C}^n$  l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  a une solution et une seule;
- ou bien : l'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  a une solution non nulle.

En effet, on est dans le premier cas si et seulement si  $\det A \neq 0$ ; dans le second si et seulement si  $\det A = 0$ . Et il faut bien que l'un des deux ait lieu.

PROPOSITION 1 (alternative Fredholm). — Soit  $T$  un opérateur compact dans un espace de Banach  $E$  sur  $\mathbf{C}$ . Alors :

- ou bien : quel que soit  $g \in E$  l'équation  $(\text{id}_E - \mu T)f = g$  a une solution  $f$  et une seule dans  $E$ ;
- ou bien : l'équation  $(\text{id}_E - \mu T)f = 0$  a une solution  $f$  non nulle.

L'intérêt de l'énoncé est que le second terme de l'alternative de Fredholm est plus facile à discuter que le premier.

*Preuve.* Si  $\mu = 0$ , on est trivialement dans le premier cas, et pas dans le second. Désormais on suppose que  $\mu \neq 0$ , on pose  $\lambda = \frac{1}{\mu}$  et on étudie l'équation

$$(T - \lambda \text{id}_E)f = -\lambda g$$

d'inconnue  $f$ , qui est équivalente à la précédente. On est nécessairement dans l'un des deux cas suivants (qui s'excluent mutuellement) :

- ou bien  $\lambda \notin \text{sp}(T)$ , donc  $T - \lambda \text{id}_E$  est inversible, et on est dans le premier cas de l'alternative;
- ou bien  $\lambda \in \text{sp}(T)$ , donc par le Théorème 1  $\lambda$  est valeur propre de  $T$ , et on est dans le second cas de l'alternative.

Ceci prouve l'énoncé cherché. □

Reprenons les exemples des opérateurs intégraux.

PROPOSITION 2. — Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur  $[a; b] \times [a; b]$  et soit  $\mu \in \mathbf{C}$ . Alors :

– ou bien l'équation intégrale

$$f(x) = \mu \int_a^b K(x, y)f(y) dy + g(x)$$

a, quel que soit  $g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , une solution  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  et une seule ;

– ou bien l'équation homogène associée

$$f(x) = \mu \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

a une solution non identiquement nulle. □

Le second cas ne peut se produire que pour un ensemble fini, ou au plus dénombrable, de valeurs  $\mu \in \mathbf{C}$  (qui dans ce dernier cas tendent vers l'infini). Ces valeurs exceptionnelles de  $\mu$  sont souvent des valeurs physiquement intéressantes (phénomènes de résonance).

Exercice 1. — Pour toute fonction  $g \in \mathcal{C}([0; \pi], \mathbf{C})$ , l'équation intégrale

$$f(x) - \int_0^\pi \sin(x + y)f(y) dy = g(x)$$

a une solution et une seule.

Pour l'équation de Volterra, la dichotomie devient drastique : le second cas n'a jamais lieu ! On a d'abord le lemme suivant :

Lemme 1. — Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur  $[a; b] \times [a; b]$  et soit  $f \mapsto Sf$  l'opérateur de Volterra  $S : \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  défini par

$$Sf(x) = \int_a^x K(x, y)f(y) dy.$$

Alors  $\lambda = 0$  est la seule valeur propre possible de  $S$ . On a donc :  $\text{sp}(S) = \{0\}$ .

PROPOSITION 3. — Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur  $[a; b] \times [a; b]$ . Alors, quelle que soit  $g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , l'équation de Volterra :

$$f(x) - \int_a^x K(x, y)f(y) dy = g(x)$$

a une solution  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  et une seule.

En effet, le Lemme ci-dessus indique que, dans la Proposition 2 avec  $\mu = 1$ , seul le premier volet de l'alternative se présente. □

Preuve du Lemme. Soient  $\lambda \neq 0$  et  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  tels que  $Sf(x) = \lambda f(x)$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $f$  n'est pas la fonction nulle. Puisque  $Sf(a) = \int_a^a K(x, y)f(y) dy = 0$ , on a  $f(a) = 0$ . On se ramène au cas où  $f$  n'est pas identiquement nulle au voisinage de  $a$ , quitte à changer  $a$  en le repoussant à droite jusqu'à cela se produise. Posons :

$$m(\delta) = \sup_{a \leq x \leq a+\delta} |f(x)|.$$

Le nombre  $m(\delta)$  est non nul pour tout  $\delta > 0$ , et tend vers 0 quand  $\delta > 0$  tend vers 0. De plus, il existe  $x_\delta \in [a; a + \delta]$  tel que  $|f(x_\delta)| = m(\delta)$ . Alors

$$\begin{aligned} |\lambda|m(\delta) = |\lambda f(x_\delta)| &= |Sf(x_\delta)| = \left| \int_a^{x_\delta} K(x, y)f(y) dy \right| \\ &\leq \int_a^{x_\delta} |K(x, y)||f(y)| dy \leq C\delta m(\delta), \end{aligned}$$

où  $C = \sup_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|$ . Mais cette inégalité  $|\lambda|m(\delta) \leq C\delta m(\delta)$ , c'est-à-dire  $|\lambda| \leq C\delta$ , est absurde dès que  $\delta > 0$  est assez petit, vu que  $\lambda \neq 0$ .  $\square$

*Exercice 2.* — Exprimer par une quadrature l'unique solution  $f$  de l'équation de Volterra :

$$f(x) - \int_0^x f(y) dy = g(x).$$

En déduire explicitement  $f$  quand  $g(x) = 1$ , quand  $g(x) = e^x$ .

*Exercice 3.* — Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  et

$$K(x, y) = \min\{x; y\}.$$

Si  $f \in E$ , on pose :

$$g(x) = Tf(x) = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy = \int_0^x f(y) dy + x \int_x^1 f(y) dy.$$

(i) Montrer que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $[0; 1]$ , que  $g''(x) = -f(x)$ , et que  $g(0) = 0$  et  $g'(1) = 0$ .

(ii) Soit  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  des  $g \in E$  de classe  $C^2$  telles que  $g(0) = 0$  et  $g'(1) = 0$ . Montrer que  $T$  établit une bijection de  $E$  sur  $F$ . Préciser l'application  $T^{-1} : F \rightarrow E$ .

(iii) Dans  $E$ , soit le produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} dx.$$

Montrer que  $(Tf|g) = (f|Tg)$ . En déduire que les valeurs propres de  $T$  sont réelles.

(iv) Vérifier que  $T$  n'a pas de valeur propre  $\leq 0$ . Montrer que les valeurs propres de  $T$  sont les nombres  $\lambda_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-2}$  pour  $n$  entier  $\geq 0$ . Déterminer le sous-espace vectoriel  $V_{\lambda_n} = \text{Ker}(T - \lambda_n \text{id}_E)$ .

## § 5. CAS D'UN OPÉRATEUR COMPACT AUTO-ADJOINT

Dans ce paragraphe,  $E$  est un espace de Hilbert sur  $\mathbf{C}$  dont le produit scalaire est noté  $(\cdot|\cdot)$  et la norme associée  $\|\cdot\|$ ; on a  $\|f\| = \sqrt{(f|f)}$  pour tout  $f \in E$ .

Rappelons qu'un opérateur borné  $T \in \mathcal{L}(E)$  est dit *auto-adjoint*, ou *hermitien*, si quels que soient  $f_1$  et  $f_2$  dans  $E$  on a :

$$(Tf_1|f_2) = (f_1|Tf_2).$$

Les faits suivants sur les opérateurs auto-adjoints sont standard. Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint.

- (i) Toutes les valeurs propres de  $T$  sont réelles.
- (ii) Deux vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
- (iii) Si  $V$  est un sous-espace vectoriel  $T$ -stable, alors son orthogonal  $T^\perp$  l'est aussi.

*Exercice 1.* — Redémontrer ces faits.

Nous y ajouterons les propriétés suivantes.

PROPOSITION 1. — Soit  $T$  un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert  $E$ . Alors :

$$\| \|T^2\| \| = \| \|T\| \|^2 \quad \text{et} \quad \| \|T\| \| = \sup_{\lambda \in \text{sp}(T)} |\lambda|.$$

Donc si  $T \neq 0$ , alors  $\text{sp}(T) \neq \{0\}$ . En particulier, si  $T$  est auto-adjoint compact et non nul, alors  $T$  a des valeurs propres  $\neq 0$ .

*Preuve.* Pour tout  $f$  avec  $\|f\| \leq 1$ , on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\|^2 = (Tf|Tf) = (T^2f|f) \leq \|T^2f\| \cdot \|f\| \leq \|T^2f\|,$$

donc

$$\| \|T\| \|^2 = \sup_{\|f\| \leq 1} \|Tf\|^2 \leq \sup_{\|f\| \leq 1} \|T^2f\| = \| \|T^2\| \|.$$

L'inégalité en sens contraire est banale.

Ainsi, on a :

$$\| \|T\| \| = \| \|T^2\| \|^{\frac{1}{2}} = \| \|T^4\| \|^{\frac{1}{4}} = \dots = \| \|T^{2^n}\| \|^{\frac{1}{2^n}}$$

pour tout  $n$  ; or, quand  $n \rightarrow \infty$ , par la formule du rayon spectrale on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \| \|T^{2^n}\| \|^{\frac{1}{2^n}} = \sup_{\lambda \in \text{sp}(T)} |\lambda|$ . Ceci fournit bien  $\| \|T\| \| = \sup_{\lambda \in \text{sp}(T)} |\lambda|$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

THÉORÈME 1. — Soit  $T$  un opérateur non nul, auto-adjoint et compact dans un espace de Hilbert  $E$ . Soit  $(\lambda_n)_{1 \leq n < p}$  la suite finie ou infinie (avec alors  $p = \infty$ ) des valeurs propres (nécessairement réelles) non nulles de  $T$ , chacune comptée autant de fois que sa multiplicité, i.e.  $\dim V_\lambda$  avec  $V_\lambda = \text{Ker}(T - \lambda \text{id}_E)$ . Soit  $(e_n)_{1 \leq n < p}$  une famille orthonormée de vecteurs de  $E$ , avec  $Te_n = \lambda_n e_n$  pour tout  $n$ . Alors :

- (i) Pour tout  $f \in E$ , on a la formule :

$$Tf = \sum_{1 \leq n < p} \lambda_n (f|e_n) e_n$$

où, si  $p = \infty$ , la série converge en norme dans  $E$ .

- (ii) Soit  $\mu$  un nombre complexe distinct de tous les inverses  $\frac{1}{\lambda_n}$ . Alors, pour tout  $g \in E$ , l'équation

$$f - \mu \cdot T(f) = g$$

a une solution  $f \in E$  et une seule, qui est donnée par la formule :

$$f = g + \mu \sum_{1 \leq n < p} \frac{\lambda_n}{1 - \mu \lambda_n} (g|e_n) e_n$$

où, si  $p = \infty$ , la série converge en norme dans  $E$ .

*Preuve.* Soit  $V$  le sous-espace de Hilbert de  $E$  engendré par les  $e_n$  : il est  $T$ -stable, donc  $V^\perp$  l'est également. On a  $E = V \oplus V^\perp$  et la restriction  $T|_{V^\perp}$  est un opérateur auto-adjoint compact de  $V^\perp$ , sans valeur propre  $\neq 0$  par construction de  $V$ . La Proposition 1 impose donc  $T|_{V^\perp} = 0$ .

Soit  $f \in E$ . Les  $e_n$  formant une base orthonormée de  $V$ , on a une décomposition

$$f = \sum_{1 \leq n < p} (f|e_n)e_n + g$$

avec  $g \in V^\perp$ . En appliquant  $T$  aux deux membres, et en remarquant que  $Tg = 0$ , on obtient la formule annoncée, ce qui finit de prouver (i).

Le début de (ii) n'est autre que l'alternative de Fredholm. Pour prouver la formule donnant  $f$ , remarquons d'abord que si  $p = \infty$ , la série du second membre converge dans  $E$  car la suite  $(\lambda_n)_{1 \leq n < p}$  tend vers 0 ; ainsi pour  $n \geq n_0$ , on a :

$$\sum_{n \geq n_0} \left| \frac{\lambda_n}{1 - \mu\lambda_n} \right|^2 |(g|e_n)|^2 \leq \sum_{n \geq n_0} |(g|e_n)|^2 \leq \|g\|^2.$$

Posons

$$f = g + \mu \sum_{1 \leq n < p} \frac{\lambda_n}{1 - \mu\lambda_n} (g|e_n)e_n.$$

Alors

$$Tf = Tg + \mu \sum_{1 \leq n < p} \frac{\lambda_n^2}{1 - \mu\lambda_n} (g|e_n)e_n$$

Mais d'après (i), on a :

$$Tg = \sum_{1 \leq n < p} \lambda_n (g|e_n)e_n,$$

donc

$$Tf = \sum_{1 \leq n < p} \left( \lambda_n + \frac{\mu\lambda_n^2}{1 - \mu\lambda_n} \right) (g|e_n)e_n,$$

et finalement

$$f - \mu \cdot T(f) = g + \sum_{1 \leq n < p} \left( \frac{\lambda_n\mu}{1 - \mu\lambda_n} - \mu\lambda_n - \frac{\mu^2\lambda_n^2}{1 - \mu\lambda_n} \right) (g|e_n)e_n,$$

qui vaut bien  $g$ . □

*Exercice 2.* — Réciproquement, soit  $E$  un espace de Hilbert ; soit  $(e_n)_{n \geq 1}$  une suite ortho-normée dans  $E$  et soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels qui tend vers 0. Pour tout  $f \in E$  on pose :

$$Tf = \sum_{n \geq 1} \lambda_n (f|e_n)e_n.$$

Montrer que cette série converge dans  $E$ , et que l'opérateur  $T$  dans  $E$  ainsi défini est auto-adjoint compact.

Une classe d'opérateurs auto-adjoints compacts est donnée par les opérateurs à noyau symétrique.

*Exemple 1.* — Soient  $a < b$  des nombres réels. Soit  $E = L^2([a; b], \mathbf{C})$  l'espace de Hilbert des (classes de) fonctions de carré sommable sur  $[a; b]$  avec le produit scalaire

$$(f_1 | f_2) = \int_a^b f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

et la norme

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)}.$$

On sait que  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  est dense dans  $E$  et que, si  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , on a :

$$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty.$$

Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur  $[a; b] \times [a; b]$ . On pose

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

pour toute  $f \in L^2([a; b], \mathbf{C})$ . Il est clair que  $Tf \in L^2([a; b], \mathbf{C})$ , et même  $Tf \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  par continuité sous le signe somme. Nous savons déjà que  $T : \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  est un opérateur compact pour  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  de la convergence uniforme.

Voyons que  $T : L^2([a; b], \mathbf{C}) \rightarrow L^2([a; b], \mathbf{C})$  est un opérateur compact pour la norme  $\|\cdot\|_2$ . L'ensemble  $\mathcal{H} = \{Tf : f \in L^2([a; b], \mathbf{C}), \|f\|_2 \leq 1\}$  est contenu dans  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ ; de plus,  $\mathcal{H}$  est :

– équilibré, car

$$|Tf(x)| = \left| \int_a^b K(x, y)f(y) dy \right| \leq \sup_x \left( \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} = M,$$

par Cauchy-Schwarz.

– équicontinu, car par continuité uniforme de  $K$ , on a :

$$|Tf(x) - Tf(x')| \leq \int_a^b |K(x, y) - K(x', y)| \cdot |f(y)| dy \leq \varepsilon \int_a^b |f(y)| dy \leq \varepsilon \sqrt{b-a}$$

dès que  $|x - x'| \leq \eta_\varepsilon$ . D'après le Théorème d'Ascoli, si  $(g_n)_{n \geq 1}$  est une suite dans  $\mathcal{H}$ , on peut en extraire une suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ , donc a fortiori de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_2$  car on a vu que  $\|\cdot\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|\cdot\|_\infty$ .

*Remarque 1.* — Les fonctions propres de  $T$  dans  $L^2([a; b], \mathbf{C})$ , pour une valeur propre  $\neq 0$ , sont déjà dans  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , car on peut écrire  $f = \frac{1}{\lambda} Tf$  et  $Tf \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ . Ainsi, il n'apparaît pas de nouvelle valeur propre quand on étend  $T$  de  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  à  $L^2([a; b], \mathbf{C})$ .

Revenons maintenant aux opérateurs auto-adjoints.

PROPOSITION 2. — Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur le carré  $[a; b] \times [a; b]$ , et soit  $T$  l'opérateur compact dans l'espace sde Hilbert  $L^2([a; b], \mathbf{C})$  donné par la formule :

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

pour toute  $f \in L^2([a; b], \mathbf{C})$ . Alors, pour que  $T$  soit auto-adjoint dans  $L^2([a; b], \mathbf{C})$ , il faut et suffit que  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$  pour tous  $x, y \in [a; b]$ .

Dans ce cas, on dit que le noyau  $K$  est *symétrique*.

*Preuve.* En effet, pour  $f$  et  $g$  dans  $L^2([a; b], \mathbf{C})$ , par Fubini on a :

$$\begin{aligned} (Tf|g) - (f|Tg) &= \int_a^b \int_a^b K(x, y) f(y) \overline{g(x)} \, dx dy - \int_a^b \int_a^b f(y) \overline{K(y, x) g(x)} \, dx dy \\ &= \int_{[a; b] \times [a; b]} \left( K(x, y) - \overline{K(y, x)} \right) f(y) \overline{g(x)} \, dx dy \end{aligned}$$

Mais il faut se rappeler qu'une des conséquences du théorème de Stone-Weierstrass est que les fonctions de la forme  $(x, y) \mapsto f(x) \overline{g(y)}$ , avec  $f$  et  $g$  continues sur  $[a; b]$ , sont uniformément denses dans  $\mathcal{C}([a; b] \times [a; b], \mathbf{C})$ , donc par Cauchy-Schwarz denses aussi pour  $\|\cdot\|_2$  dans  $\mathcal{C}([a; b] \times [a; b], \mathbf{C})$ , lequel est dense pour la norme  $L^2$  dans  $L^2([a; b] \times [a; b], \mathbf{C})$ . Ceci implique l'équivalence cherchée.  $\square$

*Exercice 3.* — Sur les noyaux de Hilbert-Schmidt. Soit  $K = K(x, y)$  une fonction mesurable de  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$  telle que :

$$\|K\|_2 = \left( \iint_{\mathbf{R}^2} |K(x, y)|^2 \, dx dy \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Montrer que la formule :

$$Tf(x) = \int_{\mathbf{R}} K(x, y) f(y) \, dy$$

définit dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}, dx)$  un opérateur borné de norme  $\|T\| \leq \|K\|_2$ , que cet opérateur est compact, et qu'il est auto-adjoint si et seulement si  $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$  presque partout.

Indication : d'après la théorie de la mesure, il existe une suite  $(K_n(x, y))_{n \geq 1}$  de fonctions continues à support compact dans  $\mathbf{R}^2$ , telle que  $\|K - K_n\|_{L^2(\mathbf{R}^2, dx)}$  tende vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . Chaque fonction  $K_n$  est nulle en dehors d'un carré  $[a_n; b_n] \times [a_n; b_n]$ . Pour  $f \in L^2(\mathbf{R}, dx)$  poser

$$T_n f(x) = \int_{a_n}^{b_n} K_n(x, y) f(y) \, dy,$$

et montrer que chaque  $T_n$  est un opérateur compact.

*Exercice 4.* — Déterminer les valeurs propres de l'opérateur de Fredholm  $T$  dans  $\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  défini par :

$$Tf(x) = \int_0^1 e^{|x-y|} f(y) \, dy.$$

Montrer que  $\sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|Tf\|_2 \leq 1,426$ .

*Exercice 5.* — On reprend l'exercice 3 en supposant en outre que le noyau  $K$  est symétrique. Soit  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  la suite finie ou infinie des valeurs propres non nulles de  $T$ , comptées autant de fois que leurs multiplicités. Soit  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  une famille orthonormée de fonctions propres de  $T$ , avec  $T\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$  pour tout  $n \geq 1$ . Prouver la formule :

$$K(x, y) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)},$$

où la série converge dans l'espace de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}^2, dx dy)$ .

## § 6. NOYAUX DE FREDHOLM ITÉRÉS ET NOYAU RÉSOUVANT

On peut dans certains cas résoudre l'équation de Fredholm par approximations successives. Soit  $K = K(x, y)$  un noyau continu sur le carré  $[a; b] \times [a; b]$ , et soit  $T$  l'opérateur de Fredholm de noyau  $K$  sur  $\mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  donné par la formule :

$$Tf(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

pour toute  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ . Par Fubini, son carré  $T^2$  est encore un opérateur de Fredholm, de noyau :  $K_2(x, y) = \int_a^b K(x, z)K(z, y) dz$ . Et plus généralement, les puissances  $T^n$  sont des opérateurs de Fredholm, donnés par les noyaux itérés  $K_n$  définis par  $K_1 = K$  et

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, z)K_{n-1}(z, y) dz.$$

*Exercice 1.* — Prouver les formules :

$$K_{m+n}(x, y) = \int_a^b K_m(x, z)K_n(z, y) dz \quad \text{et} \quad K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b K(x, z)K_{n-2}(z, t)K(t, y) dz dt.$$

THÉORÈME 1 (E. Schmidt). — *Faisons l'hypothèse que :*

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 dx dy < 1.$$

Alors la série, dite de Neumann, associée au noyau  $K$  :

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y)$$

converge uniformément en  $(x, y)$  sur le carré  $[a; b] \times [a; b]$  et, pour toute  $g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$ , la formule :

$$f(x) = g(x) + \int_a^b R(x, y)g(y) dy$$

fournit l'unique solution  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  de l'équation de Fredholm

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)f(y) dy + g(x).$$

*Preuve.* Si  $N(x, y)$  est un noyau, on notera pour abrégé :

$$\|N\|_2 = \left( \int_a^b \int_a^b |N(x, y)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, par hypothèse  $\|K\|_2 < 1$ .

Montrons d'abord que l'équation de Fredholm ci-dessus a une solution et une seule. Grâce à l'alternative de Fredholm (cf Proposition 2), il suffit de s'assurer que  $f(x) =$

$\int_a^b K(x, y)f(y) dy$  implique que  $f$  est identiquement nulle. Or, d'après Cauchy-Schwarz, on a sous cette hypothèse :

$$|f(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y)|^2 dy,$$

et en intégrant en  $x$ , il vient :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \cdot (1 - (\|K\|_2)^2) \leq 0,$$

ce qui exige que  $\int_a^b |f(x)|^2 dx = 0$ , et finalement que  $f$  soit la fonction nulle.

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la formule de récurrence définissant les  $K_n$ , il vient :

$$|K_n(x, y)|^2 \leq \int_a^b |K(x, z)|^2 dz \cdot \int_a^b |K_{n-1}(z, y)|^2 dz,$$

puis en intégrant les deux membres en  $x$  et en  $y$ , on obtient :

$$(\|K_n\|_2)^2 \leq (\|K\|_2)^2 \cdot (\|K_{n-1}\|_2)^2,$$

d'où l'inégalité

$$\|K_n\|_2 \leq (\|K\|_2)^n.$$

De même, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à la seconde formule de l'Exercice 1, on a :

$$|K_n(x, y)|^2 \leq \left( \int_a^b \int_a^b |K_{n-2}(z, t)|^2 dz dt \right) \cdot \left( \int_a^b \int_a^b |K(x, z) \cdot K(t, y)|^2 dz dt \right).$$

La deuxième intégrale à droite est continue en  $(x, y)$ , donc bornée. En utilisant  $\|K_n\|_2 \leq (\|K\|_2)^n$ , on voit donc que pour tous  $x$  et  $y$  dans  $[a; b]$ , on a :

$$|K_n(x, y)| \leq C(\|K\|_2)^n.$$

Par suite la série de Neumann associée à  $K(x, y)$  :

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, y),$$

vu l'hypothèse du théorème, converge normalement, donc absolument, sur  $[a; b] \times [a; b]$ . Par la définition de la série de Neumann et intégration terme à terme, on voit qu'on a aussi :

$$R(x, y) = K(x, y) + \int_a^b K(x, z)R(z, y) dz.$$

Montrons enfin que la solution proposée dans l'énoncé résout bien le problème de Fredholm considéré. On a :

$$\begin{aligned} f(x) - \int_a^b K(x, y)f(y) dy &= g(x) + \int_a^b R(x, y)g(y)dy - \int_a^b K(x, y) \left( g(y) + \int_a^b R(y, z)g(z)dz \right) dy \\ &= g(x) + \int_a^b \left( R(x, y) - K(x, y) - \int_a^b K(x, z)R(z, y) dz \right) g(y) dy \\ &= g(x), \end{aligned}$$

par la relation entre  $R$  et  $K$  obtenue juste auparavant. □

Exercice 2. — Pour  $0 \leq x \leq 2\pi$  et  $0 \leq y \leq 2\pi$ , on pose :

$$K(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\sin(px) \sin((p+1)y)}{p^2}.$$

(i) Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$K_n(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} \pi^{n-1} \frac{\sin(px) \sin((p+1)y)}{p^2(p+1)^2 \dots (p+n-1)^2}.$$

(ii) En déduire que la série de Neumann associée  $\frac{1}{\lambda}K$  :

$$R_\lambda(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} K_n(x, y)$$

converge uniformément quel que soit  $\lambda \neq 0$ , et que l'opérateur de Fredholm de noyau  $K$  n'a aucune valeur propre non nulle.

Appliquons une méthode analogue pour intégrer l'équation de Volterra. Soit  $S$  l'opérateur de Volterra de noyau  $K$ , défini par :

$$Sf(x) = \int_a^x K(x, y)f(y) dy.$$

Les itérés  $S^n$  sont des opérateurs de Volterra dont les noyaux sont cette fois les  $K^{(n)}(x, y)$  où  $K^{(1)} = K$  et pour  $n \geq 2$  :

$$K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, z)K^{(n-1)}(z, y) dz.$$

En posant

$$M = \sup_{a \leq x, y \leq b} |K(x, y)|,$$

on vérifie par récurrence que

$$|K^{(n)}(x, y)| \leq M^n \frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

En effet, c'est vrai pour  $n = 1$ , et d'après la relation de récurrence qui précède, on a :

$$\begin{aligned} |K^{(n)}(x, y)| &\leq |x-y|M \int_y^x |K^{(n-1)}(z, y)| dz \\ &\leq |x-y|M^n \int_y^x \frac{|z-y|^{n-2}}{(n-2)!} dz \\ &\leq M^n \frac{|x-y|^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|K^{(n)}(x, y)| \leq \frac{M^n(b-a)^{n-1}}{(n-1)!},$$

et la série

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(x, y)$$

converge normalement, donc uniformément, en  $(x, y)$ . En terminant comme dans la preuve précédente, on a prouvé *cette fois sans hypothèse sur la norme  $\|\cdot\|_2$*  de  $K$  le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *L'unique solution de l'équation de Volterra*

$$f(x) = \int_a^x K(x, y)f(y) dy + g(x)$$

*est donnée par la formule :*

$$f(x) = g(x) + \int_a^x R(x, y)g(y) dy,$$

*où le noyau résolvant R est donné par la somme de série uniformément convergente :*

$$R(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} K^{(n)}(x, y)$$

*dans laquelle  $K^{(1)} = K$  et*

$$K^{(n)}(x, y) = \int_y^x K(x, z)K^{(n-1)}(z, y) dz$$

*pour  $n \geq 2$ .* □

On notera la réciprocité entre les noyaux K et R : le noyau résolvant  $R(x, y)$  du noyau de Volterra n'est autre que  $-K(x, y)$ .

*Exercice 3.* — Appliquer le théorème qui précède pour résoudre l'équation

$$f(x) = \int_0^x (y - x)f(y) dy + x,$$

puis retrouver la solution par une méthode élémentaire directe.

## § 7. ÉQUATION INTÉGRALE D'ABEL

Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  l'espace de Banach des fonctions  $f$  à valeurs complexes définies et continues sur  $[0; 1]$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$  de la convergence uniforme :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Soit  $\alpha$  un paramètre réel donné tel que  $0 < \alpha < 1$ . Pour toute fonction  $f \in E$  et tout  $x \in [0; 1]$ , on pose :

$$\mathbb{T}f(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^{\alpha}} dy = \int_0^x \frac{f(x-y)}{y^{\alpha}} dy.$$

DÉFINITION 1. — *L'opérateur  $\mathbb{T}$  s'appelle l'opérateur intégral d'Abel de paramètre  $\alpha$ .*

L'intégrale ci-dessus a un sens ; elle est même absolument convergente car :

$$\int_0^x \frac{|f(y)|}{(x-y)^{\alpha}} dy = \int_0^x \frac{|f(x-y)|}{y^{\alpha}} dy \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|f\|_{\infty} < +\infty.$$

De plus, la fonction  $x \mapsto Tf(x)$  est continue sur  $[0; 1]$  car pour  $\varepsilon > 0$  donné, par continuité uniforme de  $f$  et par continuité de  $x \mapsto x^{1-\alpha}$ , on a :

$$|f(x' - y) - f(x - y)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |(x')^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}| \leq \varepsilon$$

dès que  $|x - x'| \leq \eta_\varepsilon$ , et donc, si par exemple  $x' \geq x$ , on a :

$$\begin{aligned} |Tf(x') - Tf(x)| &\leq \int_0^x \frac{|f(x'-y) - f(x-y)|}{y^\alpha} dy + \int_x^{x'} \frac{|f(x'-y)|}{y^\alpha} dy \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha} + \frac{\|f\|_\infty}{1-\alpha} ((x')^{1-\alpha} - x^{1-\alpha}) \\ &\leq \frac{1+\|f\|_\infty}{1-\alpha} \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi,  $T$  envoie bien  $E$  dans  $E$ . De plus,  $T$  est un opérateur borné de norme  $\leq \frac{1}{1-\alpha}$  d'après l'inégalité utilisée pour vérifier la convergence absolue de l'intégrale définissant  $Tf(x)$ . En fait, on a exactement :

$$\|T\| = \frac{1}{1-\alpha}$$

car cette valeur est atteinte pour la fonction constante égale à 1. L'opérateur  $T$  est presque du type Volterra au sens précédent, mais le noyau est ici singulier. Ceci nous oblige à faire une démonstration pour prouver que  $T$  est un opérateur compact.

Pour cela considérons, pour  $0 < a < 1$ , l'opérateur  $T_a$  dans  $E$  défini par :

$$T_a f(x) = \int_a^x \frac{f(x-y)}{y^\alpha} dy$$

si  $x \geq a$ , et  $T_a f(x) = 0$  sinon. On a :

$$(T - T_a)f(x) = \int_0^a \frac{f(x-y)}{y^\alpha} dy \quad \text{si } x \geq a$$

et  $(T - T_a)f(x) = 0$  si  $0 \leq x \leq a$ . Ceci implique que

$$|(T - T_a)f(x)| \leq \|f\|_\infty \frac{a^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

d'où

$$\lim_{a>0, a \rightarrow 0} \|T - T_a\| = 0.$$

Par le Théorème 1, il suffit donc de prouver que les opérateurs  $T_a$  sont compacts. Pour cela, on regarde les images de la boule unité  $\{\|\cdot\|_\infty \leq 1\}$  par ces opérateurs, précisément :

$$\mathcal{H}_a = \{T_a f : f \in E \text{ avec } \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Les valeurs de toutes les fonctions de tous les  $\mathcal{H}_a$  sont uniformément bornées par ce qui précède. Pour appliquer Ascoli et conclure, il suffit donc de vérifier l'équicontinuité de chaque famille  $\mathcal{H}_a$ . Pour  $a$  donné, l'équicontinuité en  $x \in [0; a[$  est évidente car toutes les fonctions de  $\mathcal{H}_a$  sont identiquement nulles au voisinage de  $x$ ; idem pour l'équicontinuité à gauche en  $a$ . Pour vérifier l'équicontinuité à droite en  $a$ , on calcule :

$$|T_a f(x) - T_a f(a)| = |T_a f(x)| = \left| \int_a^x \frac{f(x-y)}{y^\alpha} dy \right| \leq \frac{|x-a|}{a^\alpha}.$$

Si maintenant  $a < x \leq x' \leq 1$ , on a puisque  $\|f\|_\infty \leq 1$  :

$$\begin{aligned}
|T_a f(x) - T_a f(a)| &= \left| \int_a^{x'} \frac{f(x'-y)}{y^\alpha} dy - \int_a^x \frac{f(x-y)}{y^\alpha} dy \right| \\
&= \left| \int_0^{x'-a} \frac{f(y)}{(x'-y)^\alpha} dy - \int_0^{x-a} \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy \right| \\
&\leq \left| \int_{x-a}^{x'-a} \frac{f(y)}{(x'-y)^\alpha} dy \right| + \left| \int_0^{x-a} \left( \frac{1}{(x'-y)^\alpha} - \frac{1}{(x-y)^\alpha} \right) f(y) dy \right| \\
&\leq \int_{x-a}^{x'-a} \frac{f(y)}{(x'-y)^\alpha} dy + \int_0^{x-a} \left( \frac{1}{(x'-y)^\alpha} - \frac{1}{(x-y)^\alpha} \right) f(y) dy \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \left( (x' - x + a)^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} + (x')^{1-\alpha} - a^{1-\alpha} - (x)^{1-\alpha} + (x' - x + a)^{1-\alpha} \right) \\
&\leq (2(x' - x + a)^{1-\alpha} - 2a^{1-\alpha} + (x')^{1-\alpha} - (x)^{1-\alpha}) \\
&\leq C(x' - x),
\end{aligned}$$

où la constante  $C$  dépend de  $a$  et de  $\alpha$  mais pas de  $x$ . Ceci prouve l'équicontinuité de  $\mathcal{H}_a$ .

*Lemme 1.* — Pour tout entier  $n \geq 1$ , toute  $f \in E$  et tout  $x \in [0, 1]$ , on a :

$$|T^n f(x)| \leq \frac{x^{n\beta} (\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \cdot \|f\|_\infty,$$

où l'on a posé  $\beta = 1 - \alpha$ .

*Preuve.* On fait une récurrence sur  $n \geq 1$ . Pour  $n = 1$ , cela résulte immédiatement de

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x \frac{|f(y)|}{(x-y)^\alpha} dy = \int_0^x \frac{|f(x-y)|}{y^\alpha} dy \leq \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \|f\|_\infty.$$

Pour l'hérédité, on calcule :

$$|T^{n+1}f(x)| = |(T \circ T^n)f(x)| \leq \int_0^x \frac{|T^n f(y)|}{(x-y)^\alpha} dy \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \cdot \|f\|_\infty \int_0^x \frac{y^{n\beta}}{(x-y)^\alpha} dy,$$

donc, par le changement de variable  $y = sx$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
|T^{n+1}f(x)| &\leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \cdot \|f\|_\infty \frac{x^{n\beta} x}{x^\alpha} \int_0^1 s^{n\beta} (1-s)^{-\alpha} ds \\
&= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} B(n\beta + 1, \beta) \|f\|_\infty \\
&= x^{(n+1)\beta} \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)} \frac{\Gamma(1+n\beta)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1+(n+1)\beta)} \|f\|_\infty,
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité cherchée pour prouver la récurrence. □

Il résulte du Lemme que :

$$\|T^n\| \leq \frac{(\Gamma(\beta))^n}{\Gamma(1+n\beta)}.$$

D'après la formule de Stirling,  $\Gamma(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$  plus vite que toute  $k^x$  où  $k > 0$  est donné. Donc pour tout  $\mu \in \mathbf{C}$  donné, la série d'opérateurs  $\sum_{n \geq 1} \mu^n T^n$  converge absolument dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(E)$ . Il en résulte immédiatement que pour tout  $\mu \in \mathbf{C}$ , l'opérateur  $\text{id}_E - \mu T$  est inversible dans  $\mathcal{L}(E)$ , et

$$(\text{id}_E - \mu T)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n T^n.$$

Ainsi, comme les opérateurs de Volterra classiques, l'opérateur d'Abel  $T$  n'a d'après l'alternative de Fredholm, aucune valeur propre  $\neq 0$ .

Nous allons enfin prouver la *formule d'inversion d'Abel*.

THÉORÈME 1 (formule d'inversion d'Abel). — Si  $f \in \mathbb{E}$  et si

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{(x-y)^\alpha} dy,$$

alors

$$f(y) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx.$$

*Preuve.* L'idée est d'utiliser le Théorème d'approximation de Weierstrass afin de réduire la preuve de la formule à une vérification sur les monômes.

Prouvons donc la formule pour  $f(x) = x^k$  où  $k$  est un entier  $\geq 0$ . Dans ce cas :

$$g(x) = \int_0^x (x-y)^{-\alpha} y^k dy = x^{1-\alpha+k} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} s^k ds = \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(2-\alpha+k)} x^{1-\alpha+k}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(2-\alpha+k)} \int_0^y (y-x)^{\alpha-1} x^{1-\alpha+k} dx \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(2-\alpha+k)} y^{\alpha-1+1-\alpha+k+1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{1-\alpha+k} ds \\ &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}{\Gamma(2-\alpha+k)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha+k)}{\Gamma(k+2)} y^{k+1} \\ &= \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} \frac{y^{k+1}}{k+1}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx = \frac{d}{dy} \left( \frac{y^{k+1}}{k+1} \right) = y^k = f(y).$$

Ceci prouve la formule d'inversion d'Abel pour les monômes et donc, par combinaison linéaire, pour les fonctions polynomiales.

Faisons maintenant usage du Théorème d'approximation de Weierstrass pour conclure en toute généralité. Soit  $f \in \mathbb{E}$  une fonction continue quelconque. On dispose d'une suite  $(p_n)_{n \geq 1}$  de fonctions polynomiales telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - p_n\|_\infty = 0.$$

Soit  $F$  (resp.  $P_n$ ) la primitive de  $f$  (resp.  $p_n$ ) qui s'annule en 0. On a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - P_n\|_\infty = 0.$$

Soit  $g = Tf$  et  $g_n = Tp_n$ . Puisque l'opérateur  $T$  est borné, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g - g_n\|_\infty = 0.$$

La transformation d'Abel de paramètre  $1-\alpha$  étant elle aussi continue, on voit que :

$$\int_0^y \frac{g_n(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx \text{ converge vers } \int_0^y \frac{g(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx$$

uniformément en  $y \in [0; 1]$ . Mais d'après la formule déjà prouvée pour les fonctions polynomiales, on a :

$$\int_0^y \frac{g_n(x)}{(y-x)^{1-\alpha}} dx = P_n(y) \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$$

pour tout  $n \geq 1$ . Les fonctions données par le second membre forment une suite qui tend vers  $F(y) \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$  uniformément en  $y$ , ce qui prouve la formule d'inversion d'Abel en toute généralité.  $\square$

Noter que la formule d'inversion d'Abel implique que  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ , et donc que  $T$  n'a pas de valeur propre du tout.

## § 8. ÉQUATIONS DE STURM-LIOUVILLE

On sait qu'une équation différentielle du deuxième ordre

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

où les fonctions  $p$ ,  $q$  et  $f$  sont données, continues sur  $[a; b]$ , a une solution et une seule pour des conditions initiales du type Cauchy donnant les valeurs  $y(x_0)$  et  $y'(x_0)$ , en un point fixé  $x_0 \in [a; b]$ , de la fonction inconnue  $y$  et de sa dérivée.

Mais la Physique conduit à chercher des solutions  $y = y(x)$  satisfaisant à des conditions aux limites, par exemple :

$$y(a) = y(b) = 0,$$

ou plus généralement

$$Ay'(a) + By(a) = 0 \quad \text{et} \quad Cy'(b) + Dy(b) = 0,$$

où  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des constantes données. Pensez par exemple au problème des cordes vibrantes.

Un exemple très simple, lié aux séries de Fourier, montre que la recherche de solutions avec conditions aux limites fournit des résultats bien différents de ceux mettant en jeu des conditions initiales. Si  $\lambda$  est une constante, le problème

$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{avec} \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

n'a de solution non identiquement nulle que si  $\lambda = n^2$  où  $n$  est un nombre entier  $> 0$ , auquel cas il y a alors une infinité de solutions.

Sur des exemples, nous allons voir que ce type de problème peut se ramener à la résolution d'équations de Fredholm. Nous avons déjà constaté les liens entre les deux théories dans des exercices ci-dessus. Ils apparaissent de façon élémentaire dans l'exercice qui suit, qui d'ailleurs est à la base des considérations qui vont suivre.

*Exercice 1.* — Soit sur  $[a; b] \times [a; b]$  le noyau symétrique

$$N(x, y) = \frac{(x-b)(y-a)}{b-a} \quad \text{pour} \quad y \leq x \quad \text{et} \quad N(x, y) = \frac{(x-a)(y-b)}{b-a} \quad \text{pour} \quad x \leq y.$$

Soit  $f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbf{C})$  donnée. Montrer que

$$F(x) = \int_a^b N(x, y) f(y) dy$$

est la fonction de classe  $C^2$  telle que  $F'' = f$  et  $F(a) = F(b) = 0$ .

Ainsi le problème de Sturm-Liouville élémentaire

$$y'' = f \quad \text{et} \quad y(a) = y(b) = 0$$

est résolu en appliquant à  $f$  l'opérateur de Fredholm de noyau  $N$ .

On va commencer par étudier un cas simple, celui d'une équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \lambda A(x)y + f(x)$$

pour les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0,$$

où  $A$  et  $f$  sont des fonctions continues données sur  $[a; b]$ , à valeurs complexes, et  $\lambda$  est un paramètre complexe.

En adoptant d'abord une démarche heuristique, cherchons à satisfaire l'équation différentielle, formellement et par un développement ordonné suivant les puissances de  $\lambda$  :

$$y(x) = y_0(x) + \lambda y_1(x) + \lambda^2 y_2(x) + \cdots + \lambda^n y_n(x) + \dots$$

et où chaque  $y_n$  satisfait les conditions aux limites, i.e.  $y_n(a) = y_n(b) = 0$ .

Le premier terme  $y_0$  s'obtient en résolvant l'équation différentielle avec  $\lambda = 0$ , c'est-à-dire :

$$y''(x) = f(x) \quad \text{et} \quad y(a) = y(b) = 0,$$

dont la solution, on vient de le voir dans l'Exercice précédent, est :

$$y_0(x) = \int_a^b N(x, s) f(s) ds$$

en posant

$$N(x, y) = \frac{(x-b)(s-a)}{b-a} \quad \text{pour} \quad s \leq x \quad \text{et} \quad N(x, y) = \frac{(x-a)(s-b)}{b-a} \quad \text{pour} \quad x \leq s.$$

Ce noyau est continu et symétrique dans le carré  $[a; b] \times [a; b]$ . Les autres termes du développement se calculent (toujours formellement) de proche en proche ; on a :

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = \lambda A(x) y_{n-1} \quad \text{et} \quad y_n(a) = y_n(b) = 0,$$

d'où en remplaçant dans ce qui précède  $f$  par  $A y_{n-1}$  :

$$y_n(x) = \int_a^b N(x, s) A(s) y_{n-1}(s) ds.$$

Comme on l'a vu, ce sont précisément les calculs qu'il faudrait effectuer pour résoudre par approximations successives l'équation de Fredholm :

$$(*) \quad y(x) = \lambda \int_a^b N(x, s) A(s) y(s) ds + \int_a^b N(x, s) f(s) ds,$$

ce qui rend extrêmement plausible l'énoncé suivant.

PROPOSITION 1. — *Étant donnée l'équation :*

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda A(x)y + f(x),$$

où  $A$  et  $f$  sont des fonctions continues données sur  $[a; b]$ , à valeurs complexes, et  $\lambda$  est un paramètre complexe. Introduisons le noyau  $N(x, s)$  défini par :

$$N(x, y) = \frac{(x-b)(s-a)}{b-a} \text{ pour } s \leq x \quad \text{et} \quad N(x, y) = \frac{(x-a)(s-b)}{b-a} \text{ pour } x \leq s,$$

puis le noyau non symétrique :

$$K(x, s) = N(x, s)A(s),$$

et posons :

$$g(x) = \int_a^b N(x, s)f(s) ds.$$

Alors, pour une fonction  $y = y(x)$  les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la fonction  $y$  est solution de (\*) et  $y(a) = y(b) = 0$  ;
- (ii) la fonction  $y$  est solution de l'équation de Fredholm :

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + g(x).$$

*Preuve.* Supposons (i), autrement dit qu'on a :  $y''(x) = \lambda A(x)y(x) + f(x)$  et  $y(a) = y(b) = 0$ . Il suffit d'appliquer l'Exercice d'introduction avec  $f(x)$  remplacé par  $\lambda A(x)y(x) + f(x)$  pour obtenir (ii).

Réciproquement, supposons (ii). Dans

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + g(x),$$

remplaçons  $K(x, s)$  et  $g(x)$  par leurs expressions en fonction de  $N(x, s)$ , puis revenons à la définition de  $N(x, s)$ . On constate alors que  $y$  satisfaisant (\*\*) satisfait automatiquement (i). □

COROLLAIRE 1. — *Soit  $\lambda$  un nombre complexe. Alors :*

- (i) ou bien l'équation

$$(*) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda A(x)y + f(x),$$

$a$ , pour tout fonction  $f$ , une solution  $y = y(x)$  et une seule telle que  $y(a) = y(b) = 0$  ;

- (ii) ou bien l'équation homogène associée

$$(**) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda A(x)y$$

$a$  des solution non identiquement nulles telles que  $y(a) = y(b) = 0$ .

Dans le second cas, nous dirons que  $\lambda$  est une *valeur singulière* pour l'équation (\*\*) ou l'équation (\*); cela signifie que  $\frac{1}{\lambda}$  est valeur propre de l'opérateur intégral de noyau  $N(x, s)A(s)$ .

Supposons désormais que  $A$  n'est pas identiquement nul.

La théorie spectrale des opérateurs compacts (cf le Théorème 1) montre qu'il y a au plus une infinité dénombrable de valeurs singulières de  $\lambda$  pour l'équation (\*\*), et au plus un nombre fini dans tout disque  $\{|\lambda| \leq R\}$ . Nous verrons bientôt que si  $A(x)$  est une fonction réelle, il y a en effet une infinité de valeurs singulières.

PROPOSITION 2. — *Chaque valeur singulière de (\*\*) est de multiplicité 1 seulement : pour  $\lambda$  singulière, il y a, à multiplication par un facteur constant près, une seule fonction propre, donc non identiquement nulle, solution de (\*\*) avec  $y(a) = y(b) = 0$ .*

*Preuve.* S'il existait deux telles solutions linéairement indépendantes, elles engendreraient l'espace vectoriel (de dimension 2) des solutions de (\*\*). Ainsi toute solution de ladite équation vérifierait automatiquement les conditions aux limites  $y(a) = y(b) = 0$ , ce qui serait en contradiction avec le Théorème de Cauchy suivant lequel (\*\*) avec les conditions  $y(a) = 1$  et  $y'(a) = 0$  admet une solution.  $\square$

PROPOSITION 3. — *Supposons que  $A(x)$  soit continue réelle et non identiquement nulle sur  $[a; b]$ . Alors les valeurs singulières de (\*\*) sont toutes réelles.*

*Preuve.* Le noyau  $K(x, s) = N(x, s)A(s)$  de l'équation de Fredholm

$$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)y(s) ds + g(x)$$

n'est pas symétrique, donc le résultat annoncé ne peut se déduire de considérations sur les opérateurs auto-adjoints. On va travailler directement sur l'équation différentielle.

Soit  $\lambda = \alpha + i\beta$  une valeur singulière complexe, et  $y(x) = u(x) + iv(x)$  une fonction propre (donc non identiquement nulle). L'équation

$$(**) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \lambda A(x)y$$

donne, en passant aux parties réelle et imaginaire :

$$u'' = (\alpha u - \beta v)A \quad \text{et} \quad v'' = (\beta u + \alpha v)A,$$

d'où

$$vu'' - uv'' = \beta(u^2 + v^2)A \quad \text{et} \quad uu'' + vv'' = \alpha(u^2 + v^2)A,$$

et donc

$$0 = [vu' - uv']_a^b = -\beta \int_a^b (u^2 + v^2)A dx,$$

et

$$0 = [uu' + vv']_a^b = \int_a^b ((u')^2 + (v')^2) dx + \alpha \int_a^b \int_a^b (u^2 + v^2)A dx.$$

Ainsi, en supposant  $\beta \neq 0$  on obtient

$$\int_a^b (u^2 + v^2)A \, dx = \int_a^b ((u')^2 + (v')^2) \, dx = 0,$$

ce qui implique  $u' = v' = 0$ , donc que  $y'$  est constante, autrement dit nulle par les conditions aux limites satisfaites par  $y$  : c'est exclu, et on a donc nécessairement  $\beta = 0$ .  $\square$

Nous abandonnons provisoirement l'étude des valeurs singulières de (\*\*) pour exposer la *théorie de Sturm* pour les zéros des solutions (réelles) de l'équation différentielle :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0.$$

Soient  $a < b$  deux nombres réels. Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions réelles continues sur  $[a; b]$ . On suppose de plus que  $P(x)$  est  $> 0$  et admet une dérivée première continue sur  $[a; b]$ . On va en fait étudier l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy}{dx} \right) + Q(x)y = 0,$$

qui équivaut à la précédente si on pose :

$$p(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad q(x) = \frac{Q(x)}{P(x)},$$

ou, réciproquement :

$$P(x) = \exp \int_a^x p(t) \, dt \quad \text{et} \quad Q(x) = q(x)P(x).$$

PROPOSITION 4. — *Une solution  $y(x)$  non identiquement nulle de*

$$\frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy}{dx} \right) + Q(x)y = 0$$

*n'a qu'un nombre fini de zéros dans  $[a; b]$ .*

*Preuve.* Sinon, il existerait dans  $[a; b]$  un point d'accumulation, disons  $c$ , des zéros de  $y(x)$  qui, d'après le théorème de Rolle serait aussi un point d'accumulation des zéros de  $y'(x)$ . Par continuité, on aurait  $y(c) = y'(c) = 0$ , forçant  $y$  à être identiquement nulle par unicité de la solution sous conditions de Cauchy.  $\square$

PROPOSITION 5. — *Soient  $c < d$  deux zéros consécutifs d'une solution  $y_1$  non identiquement nulle de*

$$\frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy}{dx} \right) + Q(x)y = 0$$

*et soit  $y_2$  une solution de la même équation, non proportionnelle à  $y_1$ . Alors  $y_2$  a un zéro et un seul dans  $]c; d[$ .*

*Preuve.* Prouvons l'existence par l'absurde. Si, pour tout  $x \in ]c; d[$ , on a  $y_2(x) \neq 0$ , on a aussi  $y_2(c) \neq 0$  et  $y_2(d) \neq 0$  (car sinon  $y_2$  serait proportionnelle à  $y_1$  comme ayant des conditions initiales proportionnelles). Ainsi  $\frac{y_1}{y_2}$  est une fonction continue sur  $]c; d[$  nulle en

$c$  et en  $d$ ; sa dérivée  $\frac{y_1' y_2 - y_1 y_2'}{(y_2)^2}$  s'annule quelque part entre  $c$  et  $d$ , ce qui est impossible car le wronskien  $\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}$  n'est jamais nul pour deux solutions linéairement indépendantes.

Prouvons l'unicité par l'absurde. Supposons qu'il existe  $\alpha < \beta$  dans  $]c; d[$  tels que  $y_2(\alpha) = y_2(\beta) = 0$ . D'après la partie existence qui vient d'être démontrée,  $y_1$  aurait un zéro entre  $\alpha$  et  $\beta$ , ce qui est exclu par le fait que  $c$  et  $d$  sont consécutifs.  $\square$

On va maintenant comparer les solutions de deux équations différentielles du même type que ci-dessus, mais différentes.

PROPOSITION 6. — Soient les deux équations :

$$(E) \quad \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy}{dx} \right) + Q(x)y = 0$$

et

$$(E') \quad \frac{d}{dx} \left( P(x) \frac{dy}{dx} \right) + Q_1(x)y = 0$$

où  $P(x)$ ,  $Q(x)$  et  $Q_1(x)$  sont continues réelles,  $P(x)$  est  $> 0$  et où

$$Q(x) < Q_1(x)$$

pour tout  $x \in [a; b]$ . Soient  $c < d$  deux zéros consécutifs d'une solution  $y$  non nulle de (E). Alors toute solution  $z$  de (E<sub>1</sub>) s'annule au moins une fois dans  $]c; d[$ .

Autrement dit, à  $P(x)$  donnée, on augmente le nombre des oscillations des solutions de (E) quand on augmente  $Q(x)$ .

*Preuve.* Multipliant (E) par  $z$  et (E<sub>1</sub>) par  $y$ , puis soustrayant, on obtient :

$$\frac{d}{dx} (P(z y' - y z')) = (Q_1 - Q)yz,$$

d'où, en intégrant entre  $c$  et  $d$  :

$$\int_c^d (Q_1 - Q)yz \, dx = P(d)z(d)y'(d) - P(c)z(c)y'(c).$$

Par l'absurde, si  $z(x)$  n'était jamais nulle dans  $]c; d[$ , alors  $y(x)$  et  $z(x)$  garderaient chacune un signe constant sur cet intervalle. Si, par exemple, les fonctions  $y$  et  $z$  restent  $> 0$  sur  $]c; d[$ , alors le premier membre est  $> 0$  alors que le second est  $\leq 0$  car  $y'(d) \leq 0$  et  $y'(c) \geq 0$  (vu le signe de  $y$  sur  $]c; d[$ ). Les trois autres possibilités de signes conduisent elles aussi à une contradiction à chaque fois.  $\square$

Par exemple, soit l'équation :

$$y'' + Q(x)y = 0,$$

où  $Q(x)$  est réelle continue, et vérifie l'inégalité

$$0 < \omega^2 < Q(x) < \Omega^2$$

pour tout  $x \in [a; b]$ , avec  $\omega$  et  $\Omega$  constantes. Comparons une solution de cette équation aux solutions de l'équation

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

où successivement  $\alpha = \omega$  et  $\alpha = \Omega$ . Les solutions sont de la forme  $C \sin(\alpha(x - x_0))$  et ont pour zéros les nombres  $x_0 + k\frac{\pi}{\alpha}$  où  $k$  est un entier. L'écart entre deux zéros consécutifs est constant et égal à  $\frac{\pi}{\alpha}$ . Il en résulte que, si  $\delta = d - c$  est l'écart variable entre deux zéros consécutifs de la solution non identiquement nulle de  $y'' + Q(x)y = 0$ , on a les inégalités :

$$\frac{\pi}{\Omega} \leq \delta \leq \frac{\pi}{\omega}.$$

Car si  $\delta$  était  $< \frac{\pi}{\Omega}$ , on trouverait un  $x_0$  (par exemple  $x_0 = c$ ) tel que pour aucun entier  $k$ , le nombre ne serait dans  $]c; d[$ . Et si  $\delta$  était  $> \frac{\pi}{\omega}$  il existerait  $x_0$  tel que  $[x_0; x_0 + \frac{\pi}{\omega}]$  soit contenu dans  $]c; d[$ , donc ne contiendrait aucun zéro de  $y$ . Les inégalités  $\frac{\pi}{\Omega} \leq \delta \leq \frac{\pi}{\omega}$  permettent d'assigner des bornes au nombre de zéros de  $y(x)$  contenus dans un segment donné.

*Exercice 2.* — Soit pour  $\nu$  réel l'équation de :

$$(E_\nu) \quad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0 \quad (x > 0)$$

et sa solution la *fonction de Bessel* :

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}.$$

(i) En posant  $Y = \sqrt{x}y$ , transformer  $(E_\nu)$  en une équation du type considéré dans la Proposition précédente avec  $Q(x) = 1 - \frac{4\nu^2-1}{4x^2}$ .

(ii) Soit  $n(X)$  le nombre des zéros positifs de  $J_\nu$  qui sont  $\leq X$ . Montrer que  $\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{n(X)}{X} = \frac{1}{\pi}$ .

Revenons à l'étude des valeurs singulières  $\lambda$  de l'équation

$$y'' = \lambda A(x)y$$

sous les conditions aux limites

$$y(a) = y(b) = 0$$

où l'on suppose  $A(x)$  continue réelle et non identiquement nulle sur  $[a; b]$ . Si  $x_0 \in [a; b]$ ,  $y_0$  et  $m_0$  sont donnés, notons  $y(x, \lambda)$  la solution de  $y'' = \lambda A(x)y$  qui satisfait aux conditions de Cauchy, indépendante de  $\lambda$ , suivantes :

$$y(x_0, \lambda) = y_0 \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}y(x_0, \lambda) = m_0.$$

Il résulte des théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires à coefficients dépendant d'un paramètre que, pour tout  $x \in [a; b]$  fixé, la fonction

$$\lambda \mapsto y(x, \lambda)$$

est holomorphe dans  $\mathbf{C}$  : c'est une fonction entière de la variable complexe  $\lambda$ .

*Remarque 1.* — On en déduit une nouvelle démonstration, indépendante de la théorie spectrale, du fait que le nombre de valeurs singulières dans tout disque fermé de rayon fini, est fini.

*Preuve.* En effet, soient  $y_1(x, \lambda)$  et  $y_2(x, \lambda)$  deux solutions de  $y'' = \lambda A(x)y$  correspondant à des conditions initiales linéairement indépendantes. La solution générale de cette équation s'écrit alors comme une combinaison linéaire :

$$y(x) = C_1 y_1(x, \lambda) + C_2 y_2(x, \lambda).$$

Alors  $\lambda$  est valeur singulière si et seulement si il existe  $C_1$  et  $C_2$  non toutes deux nulles et telles que

$$y(x) = C_1 y_1(a, \lambda) + C_2 y_2(a, \lambda) = 0$$

et

$$y(x) = C_1 y_1(b, \lambda) + C_2 y_2(b, \lambda) = 0,$$

donc si et seulement si la fonction entière

$$\lambda \mapsto y_1(a, \lambda)y_2(b, \lambda) - y_2(a, \lambda)y_1(b, \lambda)$$

est nulle au point  $\lambda$ . Or cette fonction entière n'est pas identiquement nulle car 0 n'est pas valeur singulière. Donc ses racines sont isolées dans  $\mathbf{C}$ .  $\square$

*Lemme 1.* — Soit  $y(x, \lambda)$  la solution de

$$y'' = \lambda A(x)y$$

correspondant à des conditions initiales  $x_0, y_0$  et  $m_0$  indépendantes de  $\lambda$ . Alors il existe un signe  $\varepsilon = \pm$  tel que quand  $\lambda$  réel tend vers  $\varepsilon\infty$ , le nombre de zéros de cette solution tend vers l'infini.

*Preuve.* Puisque  $A$  n'est pas identiquement nulle, on peut trouver  $c < d$  dans  $[a; b]$  tels que  $|A(x)| > \omega^2 > 0$  pour tout  $x \in [c; d]$ . Prenons  $\lambda$  du signe de  $A(x)$  sur  $[c; d]$ . On a :  $\lambda A(x) > |\lambda|\omega^2$ . D'après le Théorème de comparaison de Sturm,  $y(x, \lambda)$  s'annule au moins  $(d - c)\frac{\omega}{\pi}\sqrt{|\lambda|} - 1$  fois sur  $[c; d]$ .  $\square$

**PROPOSITION 7.** — Si  $A(x)$  est réelle continue non identiquement nulle sur  $[a; b]$ , alors l'équation

$$y'' = \lambda A(x)y$$

a une infinité de valeurs singulières (nécessairement réelles) pour le problème aux limites  $y(a) = y(b) = 0$ .

*Preuve.* Soit  $y(x, \lambda)$  la solution de  $y'' = \lambda A(x)y$  telle que  $y(x, \lambda) = 0$  et  $y'(x, \lambda) = 1$ . Pour fixer les idées, supposons que c'est quand  $\lambda \rightarrow +\infty$  que le nombre de zéros de  $y(x, \lambda)$  augmente indéfiniment (suivant le lemme qui précède). Puisque  $y(x, \lambda)$  dépend continûment de  $\lambda$  et puisque tous ses zéros sont simples (par unicité de Cauchy), le nombre de ces zéros ne peut augmenter que lorsqu'on passe par une valeur de  $\lambda$  telle que  $y(b, \lambda) = 0$ , c'est-à-dire une valeur singulière. Quand  $\lambda \rightarrow +\infty$  en croissant, le lemme impose donc qu'on passe une infinité de fois par des valeurs singulières.  $\square$

Étudions donc pour terminer les cas particulier où  $A(x)$  est  $< 0$  pour tout  $x \in [a; b]$ .  
En posant alors :

$$Q(x) = -A(x)$$

on étudie le problème :

$$y'' = \lambda Q(x)y \quad \text{avec} \quad y(a) = y(b) = 0,$$

où  $Q(x)$  est  $> 0$  pour tout  $x \in [a; b]$ . À tout ce qui a été déjà écrit, on peut ajouter les compléments suivants.

*Les valeurs singulières sont toutes réelles strictement positives.*

En effet, puisque  $\int_a^b y(y'' + \lambda Qy) dx = 0$ , on a :

$$0 = [yy']_a^b = \int_a^b (y')^2 dx - \lambda \int_a^b Qy^2 dx,$$

donc  $\lambda \int_a^b Qy^2 dx \geq 0$ , puis  $\lambda \geq 0$ , donc  $\lambda > 0$  puisque 0 n'est pas valeur singulière.

*Rangeons les valeurs singulières par ordre croissant :  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \dots$ , et soit  $y_n$  une fonction propre de l'équation ci-dessus associée à  $\lambda_n$ . Alors  $y_n$  a exactement  $(n-1)$  racines dans  $]a; b[$ .*

On le voit en approfondissant un peu la méthode de démonstration de la Proposition 7 ; et en vérifiant que, chaque nouvelle fois que  $y(b, \lambda)$  s'annule, il s'introduit effectivement un nouveau zéro de  $y(x, \lambda)$ . Autrement dit, il suffit de vérifier que

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(b, \lambda) \cdot \frac{\partial y}{\partial x}(b, \lambda) > 0$$

au moment où  $y(b, \lambda) = 0$ . Or, en dérivant par rapport à  $\lambda$  l'équation différentielle  $y'' = \lambda Q(x)y$ , on obtient :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) + Qy + \lambda Q \frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) = y^2 Q,$$

et en intégrant de  $a$  à  $b$  :

$$\left[ \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{dy}{dx} - y \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right) \right]_a^b > 0.$$

Puisque  $y(a) = y(b) = 0$  et  $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(a, \lambda) = 0$ , on a bien l'inégalité stricte recherchée.

*Avec les notations précédentes, on a les relations d'orthogonalité :*

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x) dx = 0$$

dès que  $m \neq n$ .

En effet, de :

$$y_n'' + \lambda_n Qy_n = 0 \quad \text{et} \quad y_m'' + \lambda_m Qy_m = 0,$$

avec  $y_n(a) = y_n(b) = y_m(a) = y_m(b) = 0$ , on déduit que :

$$0 = [y_m y_n' - y_n y_m']_a^b = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b Q y_n y_m dx.$$

À partir de ces remarques, on pourrait développer pour les fonctions  $f$  sur  $[a; b]$  une analyse harmonique en série de fonctions orthogonales :

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) y_n(x),$$

avec  $c_n(f) = \int_a^b f(x) y_n(x) Q(x) dx$ , qui généraliserait la théorie classique des séries Fourier.

# Appendices

## § 1. APPENDICE 1 : SUR QUELQUES ESPACES DE SUITES

Ce qui va suivre dans cet appendice a été normalement vu en tronc commun. Néanmoins, il a paru utile d'en faire un rappel détaillé, avec les démonstrations, car c'est un réservoir d'exemples classiques d'espaces de Banach, où nous allons largement puiser tout au long du cours.

On introduit les espaces vectoriels, sur le corps  $\mathbf{K}$  valant  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , suivants :

l'espace  $c_{00}$  des suites  $(x_n)_{n \geq 0}$  nulles à partir d'un certain rang ;

l'espace  $c_0$  des suites  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  qui tendent vers 0, normé par  $\|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$  ;

l'espace  $\ell^1(\mathbf{N})$  des suites  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  telles que  $\|x\|_1 = \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n| < +\infty$ , normé par  $\|\cdot\|_1$  ;

l'espace  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  des suites bornées  $x = (x_n)_{n \geq 0}$ , normé par  $\|\cdot\|_\infty$  comme ci-dessus.

On note  $\mathbf{e}_k$  la suite dont toutes les coordonnées d'indice  $\neq k$  valent 0 et dont la  $k$ -ième valeur vaut 1. Si  $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell^1(\mathbf{N})$  et si  $y = (y_n)_{n \geq 1} \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ , on note :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n,$$

série absolument convergente car

$$|\langle x, y \rangle| = \left| \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n y_n \right| \leq \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n y_n| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

*Lemme 1.* — *L'espace vectoriel  $c_0$  est un sous-espace fermé de  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ .*

*Preuve.* Soit en effet  $(x^k)_{k \geq 0}$  une suite de vecteurs de  $c_0$  et soit  $x \in \ell^\infty(\mathbf{N})$  telle que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x - x^k\|_\infty = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe un entier  $K$  tel que  $\|x^K - x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Puisque  $x^K \in c_0$ , il existe  $N_\varepsilon$  tel que  $n \geq N_\varepsilon$  implique  $|(x^K)_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Ainsi,  $n \geq N_\varepsilon$  implique  $|x_n| \leq |(x^K)_n| + \|x^K - x\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , et donc  $x \in c_0$ .  $\square$

*Lemme 2.* — L'espace vectoriel  $c_{00}$  est engendré par les vecteurs  $\mathbf{e}_k$ . Il est dense dans  $c_0$  et dans  $\ell^1(\mathbf{N})$ .

*Preuve.* L'assertion algébrique est évidente.

Soit maintenant  $x \in c_0$  et soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $N$  tel que  $|x_n| \leq \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Posons  $x_\varepsilon = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, 0, 0, \dots)$ . Par construction c'est une suite dans  $c_{00}$  telle que  $\|x - x_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$ .

De même, si  $y \in \ell^1(\mathbf{N})$  et si  $\varepsilon > 0$  sont donnés, il existe  $N$  tel que  $\sum_{n=N}^\infty |x_n| \leq \varepsilon$ . Posons  $y_\varepsilon = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_{N-1}, 0, 0, \dots)$ . Il est clair que  $y_\varepsilon \in c_{00}$  et que  $\|y - y_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ .  $\square$

**THÉORÈME 1.** — Pour tout  $y \in \ell^1(\mathbf{N})$  fixé, l'application  $x \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$  est une forme linéaire continue sur l'espace normé  $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ ; elle a pour norme  $\|y\|_1$ . Réciproquement, pour toute  $\varphi \in (c_0)'$  il existe un unique  $y \in \ell^1(\mathbf{N})$  tel que  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$  pour tout  $x \in c_0$ . Ainsi le dual topologique de l'espace normé  $c_0$  s'identifie à l'espace normé  $\ell^1(\mathbf{N})$ .

**COROLLAIRE 1.** — Comme  $\ell^1(\mathbf{N})$  est un dual topologique, il est complet et c'est donc un espace de Banach.

*Preuve.* Notons  $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$ . Soit  $y \in \ell^1(\mathbf{N})$  fixé. On a déjà vu en préambule que  $|\varphi_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty$ , donc  $\varphi_y \in (c_0)'$  et  $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_1$ . Prouvons que  $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N$  tel que  $\sum_{n=N}^\infty |x_n| \leq \varepsilon$ . Soit la suite  $x_\varepsilon = ((x_\varepsilon)_n)_{n \geq 0}$  où  $(x_\varepsilon)_n$  vaut  $\frac{|y_n|}{y_n}$  si  $1 \leq n < N$  et  $y_n \neq 0$ , et vaut 0 sinon. Alors  $x_\varepsilon \in c_{00}$  et  $\|x_\varepsilon\|_\infty \leq 1$ . De plus, on a :

$$\varphi_y(x_\varepsilon) = \langle y, x_\varepsilon \rangle = \sum_{n=1, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|}{y_n} y_n = \sum_{n=1}^{N-1} |y_n| \geq \|y\|_1 - \varepsilon.$$

Ainsi  $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_1 - \varepsilon$ , et comme  $\varepsilon$  est arbitraire on en déduit  $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_1$  et finalement l'égalité.

Réciproquement, soit  $\varphi \in (c_0)'$ . Posons  $y_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors pour tout entier  $N$ , on a :

$$\sum_{n=1}^N |y_n| = \sum_{n=1, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|}{y_n} y_n = \varphi \left( \sum_{n=1, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|}{y_n} \mathbf{e}_n \right) \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{n=1, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|}{y_n} \right\|_\infty \leq \|\varphi\|.$$

Ceci prouve que  $y$  est dans  $\ell^1(\mathbf{N})$ . Par construction, la forme  $\varphi - \varphi_y$  est nulle sur chaque  $\mathbf{e}_n$ , donc nulle d'abord sur  $c_{00}$  par linéarité, puis sur  $c_0$  par densité. Ceci prouve que  $\varphi = \varphi_y$ . Enfin,  $y$  est bien unique car  $\varphi_y = \varphi_{y'}$  implique  $y_n = \varphi_y(\mathbf{e}_n) = \varphi_{y'}(\mathbf{e}_n) = y'_n$  pour tout entier  $n$ .  $\square$

**THÉORÈME 2.** — Pour tout  $y \in \ell^\infty(\mathbf{N})$  fixé, l'application  $x \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$  est une forme linéaire continue sur l'espace normé  $\ell^1(\mathbf{N})$ ; elle a pour norme  $\|y\|_\infty$ . Réciproquement, pour toute  $\varphi \in \ell^1(\mathbf{N})'$  il existe un unique  $y \in \ell^\infty(\mathbf{N})$  tel que  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$  pour tout  $x \in \ell^1(\mathbf{N})$ . Ainsi le dual topologique de l'espace normé  $\ell^1(\mathbf{N})$  s'identifie à l'espace normé  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ .

COROLLAIRE 1. — Les espaces normés  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  et  $c_0$  sont des espaces de Banach, car  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  est un dual topologique d'espace normé et  $c_0$  en est un sous-espace fermé.

*Preuve.* Notons  $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$  où  $y \in \ell^\infty(\mathbf{N})$  est fixé. On a vu en préambule que  $\varphi_y \in \ell^1(\mathbf{N})'$  et que  $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_\infty$ . On suppose que  $y \neq 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$  plus petit que  $\|y\|_\infty$ . Soit  $N$  tel que  $|y_N| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon$ . La suite  $x_\varepsilon = ((x_\varepsilon)_n)_{n \geq 0}$  où  $(x_\varepsilon)_n = 0$  si  $n \neq N$  et  $(x_\varepsilon)_N = \frac{|y_N|}{y_N}$ , est dans  $\ell^1(\mathbf{N})$  et  $\|x_\varepsilon\|_1 = 1$ . De plus, on a :

$$\varphi_y(x_\varepsilon) = \frac{|y_N|}{y_N} y_N = |y_N| \geq \|y\|_\infty - \varepsilon,$$

donc  $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_\infty$  car  $\varepsilon$  est arbitrairement petit. Ainsi  $\|\varphi_y\| = \|y\|_\infty$ .

Réciproquement, soit  $\varphi \in \ell^1(\mathbf{N})'$ . Posons  $y_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors pour tout entier  $n$ , si  $y_n \neq 0$ , on a :

$$|y_n| = \frac{|y_n|}{y_n} y_n = \varphi\left(\frac{|y_n|}{y_n} \mathbf{e}_n\right) \leq \|\varphi\| \cdot \left\| \frac{|y_n|}{y_n} \mathbf{e}_n \right\|_1 = \|\varphi\|,$$

donc  $\sup_{n \in \mathbf{N}} |y_n| \leq \|\varphi\|$ ; ainsi  $y \in \ell^\infty(\mathbf{N})$ . Par construction, la forme linéaire  $\varphi - \varphi_y$  est nulle sur chaque  $\mathbf{e}_n$ , donc nulle d'abord sur  $c_{00}$  par linéarité, puis sur  $\ell^1(\mathbf{N})$  par densité. Ainsi  $\varphi = \varphi_y$ . Enfin,  $y$  est unique car  $\varphi_y = \varphi_{y'}$  implique  $y_n = \varphi_y(\mathbf{e}_n) = \varphi_{y'}(\mathbf{e}_n) = y'_n$  pour tout entier  $n$ .  $\square$

Passons maintenant à quelques rappels sur les inégalités de Hölder et Minkowski, de façon à pouvoir généraliser ce qui précède aux espaces  $\ell^p(\mathbf{N})$  que nous allons définir plus loin.

En utilisant la convexité de la fonction  $x \mapsto a^x$  (pour  $a > 1$ ), on démontre que si  $p$  est un nombre réel  $> 1$  et si  $q$  est défini par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , alors pour tous nombres réels positifs  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , on a :

$$\text{l'inégalité de Hölder : } \sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n y_k^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\text{l'inégalité de Minkowski : } \left( \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n x_k^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n y_k^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

l'égalité n'ayant lieu que si  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  est proportionnel à  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Bien entendu, ces inégalités restent valables quand on suppose nuls certains  $x_k$  ou  $y_k$ .

Étudions maintenant les espaces de suites  $\ell^p(\mathbf{N})$ . Soit  $p$  un nombre réel  $> 1$  et soit  $q = \frac{p}{p-1}$  l'exposant conjugué de  $p$ . On note  $\ell^p(\mathbf{N})$  l'ensemble des suites  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  où les  $x_n \in \mathbf{K}$  satisfont  $\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p < +\infty$ . Pour un tel  $x \in \ell^p(\mathbf{N})$ , posons  $\|x\|_p = \left( \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ . Si  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  et  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  sont toutes les deux dans  $\ell^p(\mathbf{N})$ , d'après l'inégalité de

Minkowski :

$$\left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

pour tout indice  $n$ , d'où il résulte que  $\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p < +\infty$ . Ceci, et des remarques évidentes, prouve que  $\ell^p(\mathbf{N})$  est un espace vectoriel sur  $\mathbf{K}$  et que  $\|\cdot\|_p$  est une norme pour cet espace. De la même façon que pour  $p = 1$ , on prouve que  $c_{00}$  est dense dans chaque  $\ell^p(\mathbf{N})$ . Si  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  est dans  $\ell^p(\mathbf{N})$  et si  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  est dans  $\ell^q(\mathbf{N})$ , on a d'après l'inégalité de Hölder :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

pour tout indice  $n$ , ce qui prouve que la série

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$$

converge absolument et que

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q.$$

**THÉORÈME 3.** — Pour tout  $y \in \ell^q(\mathbf{N})$  fixé, l'application  $x \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 0} x_n y_n$  est une forme linéaire sur l'espace normé  $\ell^p(\mathbf{N})$  ; elle a pour norme  $\|y\|_q$ . Réciproquement, pour toute  $\varphi \in \ell^p(\mathbf{N})'$ , il existe un unique  $y \in \ell^q(\mathbf{N})$  tel que  $\varphi(x) = \langle x, y \rangle$  pour tout  $x \in \ell^p(\mathbf{N})$ . Ainsi, le dual topologique de l'espace normé  $\ell^p(\mathbf{N})$  s'identifie à l'espace normé  $\ell^q(\mathbf{N})$ .

**COROLLAIRE 1.** — De même, le dual de  $\ell^q(\mathbf{N})$  s'identifie à  $\ell^p(\mathbf{N})$ , et donc  $\ell^p(\mathbf{N})$  est un espace de Banach, égal à son bidual.

Attention, la dernière assertion sur la bidualité est propre au cas où  $p > 1$ .

*Preuve.* Notons  $\varphi_y(x) = \langle x, y \rangle$ . Soit  $y \in \ell^p(\mathbf{N})$  fixé. On vient de prouver que l'on a  $\varphi_y \in \ell^p(\mathbf{N})'$  et que  $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_q$ . Pour démontrer l'inégalité inverse, on peut supposer  $y \neq 0$  puis, par homogénéité, se ramener à  $\|y\|_q = 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Soit  $N$  un indice tel que  $\sum_{n \geq N} |y_n|^q \leq \varepsilon$ . Soit  $x_\varepsilon = ((x_\varepsilon)_n)_{n \geq 0}$  la suite où  $(x_\varepsilon)_n$  vaut  $\frac{|y_n|^q}{y_n}$  si  $1 \leq n < N$  et  $y_n \neq 0$ , et vaut 0 sinon. Alors :

$$\|x_\varepsilon\|_p^p = \sum_{n=1}^{N-1} |y_n|^{p(q-1)} = \sum_{n=1}^{N-1} |y_n|^q \leq \|y\|_q^q = 1.$$

De plus, on a :

$$\varphi_y(x_\varepsilon) = \langle x_\varepsilon, y \rangle = \sum_{n=1, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|^q}{y_n} y_n = \sum_{n=1}^{N-1} |y_n|^q \geq 1 - \varepsilon = \|y\|_q - \varepsilon.$$

Ainsi  $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_q - \varepsilon$ , et comme  $\varepsilon$  est arbitraire cela prouve l'égalité cherchée.

Réciproquement, soit  $\varphi \in \ell^p(\mathbf{N})'$ . Posons  $y_n = \varphi(\mathbf{e}_n)$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Alors pour tout entier  $N$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N |y_n|^q &= \sum_{n=0, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|^q}{y_n} y_n = \varphi \left( \sum_{n=0, y_n \neq 0}^{N-1} \frac{|y_n|^q}{y_n} \mathbf{e}_n \right) \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \left\| \sum_{n=0, y_n \neq 0}^N \frac{|y_n|^q}{y_n} \mathbf{e}_n \right\|_p = \|\varphi\| \cdot \left( \sum_{n=0}^N |y_n|^{p(q-1)} \right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\| \cdot \left( \sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

En divisant par  $\left( \sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{\frac{1}{p}}$  les extrémités de la ligne précédente, ceci permet de voir que :

$$\left( \sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{\frac{p-1}{p}} = \left( \sum_{n=0}^N |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\varphi\|,$$

et finalement que  $y$  est dans  $\ell^q(\mathbf{N})$ . Par construction, la forme  $\varphi - \varphi_y$  est nulle sur chaque  $\mathbf{e}_n$ , donc nulle d'abord sur  $c_{00}$  par linéarité, puis sur  $\ell^p(\mathbf{N})$  par densité. Ceci prouve que  $\varphi = \varphi_y$ . Enfin,  $y$  est unique car  $\varphi_y = \varphi_{y'}$  implique  $y_n = \varphi_y(\mathbf{e}_n) = \varphi_{y'}(\mathbf{e}_n) = y'_n$  pour tout entier  $n$ .  $\square$

Bien entendu, pour  $p = 2$  (et donc  $q = 2$ ) l'espace  $\ell^2(\mathbf{N})$  est un espace de Hilbert, l'unique espace de Hilbert séparable de dimension infinie (à isomorphisme près).

## § 2. APPENDICE 2 : SUR LE LEMME DE ZORN

Soit  $E$  un ensemble. Une *relation* sur  $E$  est le choix d'un ensemble de couples  $(x, y)$  d'éléments de  $E$  qu'on décide d'appeler *reliés*, ce qu'on note  $x \mathcal{R} y$ . Autrement, une relation (sous-entendue binaire) dans  $E$  est la donnée d'une partie de  $E \times E$ .

On dit qu'une relation  $\mathcal{R}$  sur un ensemble  $E$  est une *relation d'ordre* sur  $E$  si elle satisfait les trois conditions suivantes :

- (i) quel que soit  $x \in E$ , on a  $x \mathcal{R} x$  (réflexivité) ;
- (i) quels que soient  $x \in E$  et  $y \in E$ , si  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} x$  alors  $x = y$  (antisymétrie) ;
- (i) quels que soient  $x, y$  et  $z$  and  $E$ , si  $x \mathcal{R} y$  et  $y \mathcal{R} z$ , alors  $x \mathcal{R} z$  (transitivité).

Un *ensemble ordonné* est la donnée d'un ensemble muni d'une relation d'ordre.

*Exemple 1.* — La relation d'ordre usuelle sur l'ensemble  $\mathbf{R}$  des nombres réels.

*Exemple 2.* — L'ensemble  $\mathcal{P}(E)$  des parties d'un ensemble  $E$  est ordonné par la relation d'inclusion.

*Exemple 3.* — Soit  $X$  un ensemble et soit  $E$  l'ensemble des applications de  $X$  dans  $\mathbf{R}$ . Pour  $f$  et  $g$  dans  $E$ , on pose  $f \leq g$  si et seulement si pour tout  $x \in X$  on a  $f(x) \leq g(x)$ .

*Exemple 4.* — Dans l'ensemble des entiers  $> 0$ , la relation de divisibilité est une relation d'ordre.

En termes de notations, on remplacera souvent la notation  $x\mathcal{R}y$  par  $x \leq y$  (auquel cas  $x \geq y$  signifiera  $y\mathcal{R}x$ ).

Soit  $X$  une partie d'un ensemble ordonné  $E$ . On appelle *majorant* de  $X$  tout élément  $y$  de  $E$  tel que pour tout  $x \in X$  on ait :  $x \leq y$ . Alors tout  $y'$  dans  $E$  tel que  $y' \geq y$  est encore un majorant de  $X$ . Si l'ensemble des majorants de  $X$  n'est pas vide, on dit que  $X$  est *majoré* dans  $E$ .

Soit  $X$  une partie majorée d'un ensemble ordonné  $E$ . On appelle *borne supérieure* de  $X$ , s'il existe, un élément  $M$  de  $E$ , non nécessairement dans  $X$  tel que :

- (i) l'élément  $M$  de  $E$  est un majorant de  $X$ ;
- (ii) pour tout majorant  $y$  de  $X$ , on a  $M \leq y$ .

Noter que si la borne supérieure  $M$  existe, elle est unique.

Soit  $X$  une partie d'un ensemble ordonné  $E$ .

**DÉFINITION 1.** — *On dit que  $X$  est totalement ordonnée si, quels que soient  $x \in X$  et  $y \in X$ , on a  $x \leq y$  ou  $y \leq x$ .*

Dans le premier exemple ci-dessous toute partie est totalement ordonnée, alors qu'ils n'en est pas de même dans les trois exemples suivants (ordres partiels).

Dans un ensemble  $E$ , un élément  $a$  est dit *maximal* si les conditions  $x \in E$  et  $x \geq a$  entraînent  $x = a$ .

Une des bases de la théorie des ensembles, équivalente à l'axiome du choix, et qui permet de faire des raisonnements de récurrence sur des ensembles ordonnés non dénombrables (récurrences transfinies) est l'énoncé suivant.

*Lemme 1 (lemme de Zorn).* — *Soit  $E$  un ensemble ordonné non vide. Supposons que toute partie totalement ordonnée non vide de  $X$  de  $E$  admette dans  $E$  une borne supérieure. Alors il existe dans  $E$  au moins un élément maximal.*

Nous utiliserons librement l'axiome de Zorn dans ce cours, notamment dans la démonstration du cas général du théorème de Hahn-Banach, et aussi dans l'étude des algèbres de Banach, à travers l'énoncé suivant.

**THÉORÈME 1 (Krull).** — *Soit  $A$  un anneau commutatif avec élément neutre, noté  $e$ . Soit  $I$  un idéal strictement inclus dans  $A$ . Alors  $I$  est contenu dans au moins un idéal maximal de  $A$ .*

Rappelons qu'un *idéal maximal* de  $A$  est par définition un idéal maximal pour la propriété d'être strictement inclus dans  $A$ . Si  $I$  est un idéal dans  $A$  et si  $\pi : A \rightarrow A/I$  est l'homomorphisme d'anneaux associé, alors la prise d'image réciproque par  $\pi$  établit une bijection entre les idéaux de  $A/I$  et les idéaux de  $A$  contenant  $I$ . Cette bijection permet de

voir qu'une façon de caractériser les idéaux maximaux parmi les idéaux est de dire qu'il s'agit des idéaux dont l'anneau quotient associé est un corps.

*Preuve.* Pour prouver le théorème de Krull, il suffit d'appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble  $E$  des idéaux propres de  $A$  contenant  $I$ , ordonné par l'inclusion. Une partie totalement ordonnée de  $E$  est une famille  $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  d'idéaux propres (i.e. stricts) contenant  $I$  et emboîtés les uns dans les autres. Elle a pour borne supérieure  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ .  $\square$

### § 3. APPENDICE 3 : SUR L'ESPACE VECTORIEL RÉEL SOUS-JACENT À UN ESPACE COMPLEXE

Étant donné un espace vectoriel complexe  $E$ , on peut considérer le même ensemble de vecteurs, avec la même addition, comme un espace vectoriel réel, en ne tenant compte que de la multiplication par les scalaires réels; cela revient à restreindre à  $\mathbf{R} \times E$  l'action des scalaires initiale  $\mathbf{C} \times E \rightarrow E$ . L'espace vectoriel ainsi obtenu, noté  $E_{\mathbf{R}}$ , sera appelé *espace vectoriel réel sous-jacent* à  $E$ . Si  $E$  est normé, on munit  $E_{\mathbf{R}}$  de la même norme. La proposition suivante établit les relations entre les formes linéaires (continues) complexes (sur  $E$ ) et réelles (i.e. sur  $E_{\mathbf{R}}$ ).

PROPOSITION 1. — *Soit  $E$  un espace vectoriel complexe.*

(i) *Soit  $f$  une forme linéaire complexe sur  $E$ , et soit  $u$  la partie réelle de  $f$  définie par  $u(x) = \operatorname{Re}(f(x))$  pour tout  $x \in E$ . Alors  $u$  est une forme linéaire sur  $E_{\mathbf{R}}$  et pour tout  $x \in E$  on a :  $f(x) = u(x) - iu(ix)$ .*

(ii) *Soit  $u$  une forme linéaire sur  $E_{\mathbf{R}}$ . Définissons  $f : E \rightarrow \mathbf{C}$  par  $f(x) = u(x) - iu(ix)$ . Alors  $f$  est une forme  $\mathbf{C}$ -linéaire sur  $E$  et  $u = \operatorname{Re}(f)$  au sens ci-dessus.*

(iii) *Si  $E$  est normé et si  $f$  et  $u$  sont reliées comme ci-dessus, alors elles ont même norme.*

*Preuve.* Pour obtenir (i), il suffit d'appliquer à  $z = f(x) \in \mathbf{C}$  l'identité valable pour tout nombre complexe :  $z = \operatorname{Re}(z) - i\operatorname{Re}(iz)$ .

Passons à (ii). Il est clair que l'on a  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  pour tous  $x, y \in E$  ( $f$  est additive) et que  $f(\lambda x) = \lambda f(x)$  pour tous  $x \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$  (compatibilité à l'action des scalaires réels). Mais on a aussi :

$$f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x).$$

Ceci implique la compatibilité à l'action de tous les scalaires dans  $\mathbf{C}$ , et donc la  $\mathbf{C}$ -linéarité de  $f$  ainsi définie; il est clair que  $u = \operatorname{Re}(f)$ . On a prouvé (ii)

Finissons avec (iii). Puisque  $|u(x)| = |\operatorname{Re}(f)(x)| \leq |f(x)|$ , on a déjà :  $\|u\| \leq \|f\|$ . D'autre part, si  $x \in E$  il existe  $\lambda \in \mathbf{C}$  de module 1 et tel que  $\lambda f(x) = |f(x)|$ . On a alors :

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = u(\lambda x) \leq \|u\| \cdot \|\lambda x\| = \|u\| \cdot \|x\|,$$

ce qui prouve que  $\|f\| \leq \|u\|$ .  $\square$

Nous utiliserons cette proposition pour prouver le théorème de Hahn-Banach complexe à partir du théorème de Hahn-Banach réel.

# Exercices

## §1

- 1) Soit  $A$  convexe avec  $A^\circ \neq \emptyset$ . Montrer que  $\overline{A} = \overline{A^\circ}$  et  $A^\circ = \overline{A^\circ}^\circ$ .
- 2) Soit  $A$  un sous-ensemble convexe compact de  $\mathbf{R}^n$  tel que le point 0 soit dans l'intérieur de  $A$ . Soit  $S = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| = 1\}$  la sphère unité.
  - (i) Montrer que, pour tout  $y \in S$ , la demi-droite d'origine 0 passant par  $y$  coupe la frontière  $\text{Fr}(A) = \overline{A} - A^\circ$  de  $A$  en un point et un seul, noté  $\delta(y)$ .
  - (ii) Montrer que l'application  $y \mapsto \delta(y)$  est une application continue de  $S$  sur  $\text{Fr}(A)$ .
- 3) Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel réel normé  $E$ .
  - (i) Si  $A$  est fermée, est-il toujours vrai que  $\text{conv}(A)$  soit fermée?
  - (ii) Si  $A$  est ouverte, est-il toujours vrai que  $\text{conv}(A)$  soit ouverte?
- 4) Soit  $P(z)$  un polynôme à coefficients complexes et soit  $P'(z)$  son polynôme dérivé. Montrer que dans  $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$ , toute racine de  $P'$  est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de  $P$ .
- 5) Dans l'espace de suites  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ , montrer que l'ensemble  $\{\frac{e_n}{n}\}_{n \geq 1} \cup \{0\}$  est compact mais que son enveloppe convexe n'est pas fermée. Ici,  $e_n(k) = \delta_n(k)$  est la suite qui vaut 0 pour tout  $k \geq 0$ , sauf pour  $k = n$  où on a  $e_n(k) = 1$ .
- 6) [Une application du théorème de Helly] Soit  $F$  une partie finie de  $\mathbf{R}^d$ . Montrer qu'il existe un point  $x$  tel que tout hyperplan passant par  $x$  et ne rencontrant pas  $F$ , sépare  $F$  en deux parties  $F_1$  et  $F_2$  contenant chacune au moins  $|F|/(d+2)$  points de  $F$ .
- 7) [Moyenne de Banach]
  - (i) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue  $F$ , de norme égale à 1, invariante par translations sur  $\ell^\infty(\mathbf{Z})$  et qui vaut 1 sur la fonction constante égale à 1.
  - (ii) Soit  $e_N$  la suite définie par  $e_N(n) = \delta_N(n)$ . Montrer que  $F(e_N) = 0$  pour tout  $N \in \mathbf{Z}$  et en déduire que  $F$  est nulle sur  $c_0(\mathbf{Z})$  (l'espace des suites qui tendent vers 0 en  $\pm\infty$ ).

(iii) En déduite l'existence d'une probabilité "finiment additive", invariante par translations sur  $\mathbf{Z}$ , c'est à dire une application  $P : \mathcal{P}(\mathbf{Z}) \rightarrow [0, 1]$  où  $\mathcal{P}(\mathbf{Z})$  l'ensemble des parties de  $\mathbf{Z}$  vérifiant :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  si  $A \cap B = \emptyset$  ;
- $P(A) \geq 0$  pour tout  $A \subset \mathbf{Z}$  ;
- $P(\mathbf{Z}) = 1$  ;
- $P(A) = 0$  si  $A$  est fini.

8)

(i) Quel est le bidual de l'espace  $c_0(\mathbf{N})$  des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme sup ?

(ii) Citer des espaces vectoriels normés égaux à leur bidual (ces espaces vectoriels normés sont dits réflexifs).

(iii) On considère le sous-espace vectoriel  $V$  de  $\ell^\infty(\mathbf{N})$ , formé des suites réelles qui admettent une limite quand  $n \rightarrow \infty$ . Sur  $V$  on définit la forme linéaire

$$x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Montrer que cette forme linéaire est continue sur  $V$  et non nulle, mais qu'elle est identiquement nulle sur  $c_0$ . En déduire que l'espace  $\ell^1(\mathbf{N})$  n'est pas réflexif.

9) Montrer que tout sous-espace affine fermé est l'intersection des hyperplans affines qui le contiennent.

10) Soit  $C$  un convexe fermé et  $A$  une partie d'un espace réel normé  $E$ . Montrer que pour que  $C$  contienne  $A$ , il faut et il suffit que pour tout  $f \in E'$ , on ait  $f(A) \subset f(C)$ .

11) Dans  $\ell^2(\mathbf{N})$  soit  $A$  l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble  $\{\pm \frac{e_n}{n}\}_{n \geq 1}$ . Montrer que  $A$  est compact, que  $0 \in \text{Fr}(A)$  mais que par 0 ne passe aucun hyperplan d'appui de  $A$ .

12)

(i) Montrer que les points extrémaux de la boule unité fermée de  $\ell^\infty(\mathbf{N})$  sont les suites  $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que  $|x_n| = 1$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$ .

(ii) Montrer que la boule unité fermée de  $c_0(\mathbf{N})$  (les suites qui tendent vers 0 à l'infini) n'a pas de point extrémal.

13) Dans l'espace euclidien  $\mathbf{R}^3$  soit  $A$  l'enveloppe convexe de la réunion du cercle  $\{x_3 = 0 ; x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0\}$  et des deux points  $(0, 0, 1)$  et  $(0, 0, -1)$ . Montrer que  $A$  est convexe compact. Déterminer  $\text{Extr}(A)$  et constater que cet ensemble n'est pas fermé.

14) Soit  $A$  un ensemble convexe compact non vide dans  $\mathbf{R}^n$ . Soit  $f : A \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue et convexe sur  $A$ , ce qui signifie que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

pour tous  $x, y \in A$  et  $\lambda \in [0; 1]$ . Montrer que le maximum de  $f$  est atteint sur  $\text{Extr}(A)$  ; en particulier, si  $A$  est un polyèdre il suffit de tester un nombre fini de points.

15) Dans l'espace  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  de dimension  $n(n+1)/2$  des matrices symétriques réelles  $S = [S_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $S_{ij} = S_{ji}$ , déterminer les points extrémaux des ensembles convexes suivants :

- $\mathcal{K}_1$  formé des matrices vérifiant  $S \geq 0$  (c'est-à-dire dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}^+$ ) et  $\text{tr}(S) = 1$  ;

- $\mathcal{K}_N$  formé des matrices vérifiant  $0 \leq S \leq 1$  (c'est-à-dire dont le spectre est inclus dans  $[0, 1]$ ) et  $\text{tr}(S) = N$ , pour  $N = 2, \dots, n$ .

Soit  $A$  une matrice symétrique réelle quelconque. Que vaut  $\min_{S \in \mathcal{K}_N} \text{tr}(AS)$  ?

16) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $p$  sur  $\mathbf{R}$ . Dans  $E$  soit  $K$  un polyèdre convexe plein défini par le système d'équations

$$f_1(x) \geq 0, \quad f_2(x) \geq 0, \quad \dots \quad f_N(x) \geq 0,$$

où  $N \geq p$  et où les  $f_i$  sont des fonctions linéaires affines sur  $E$  (i.e. de la forme  $f_i = \varphi_i + \alpha_i$  avec  $\varphi_i \in E'$  et  $\alpha_i \in \mathbf{R}$ ). Soit  $a$  un point extrémal de  $K$ . Montrer que le nombre des indices  $i \in \{1; 2; \dots; N\}$  tels que  $f_i(a) = 0$  est supérieur ou égal à  $p$ . Autrement dit, tout sommet de d'un polyèdre convexe dans  $\mathbf{R}^p$  est dans l'intersection d'au moins  $p$  faces dudit polyèdre.

17) Dans l'espace  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de dimension  $n^2$  des matrices réelles  $[M_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ , on considère l'ensemble convexe :

$$\mathcal{C} = \left\{ M = [M_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \text{ telles que } M_{ij} \geq 0, \forall 1 \leq i, j \leq n \right. \\ \left. \text{et } \sum_{i=1}^n M_{ik} = \sum_{j=1}^n M_{kj} = 1, \forall 1 \leq k \leq n. \right\}.$$

Les matrices de  $\mathcal{C}$  sont appelées *bistochastiques*. Soit  $P$  l'ensemble des matrices de permutation, c'est-à-dire qui ont un seul coefficient égal à 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne, les autres coefficients étant nuls.

(i) Montrer que  $P = \text{Extr}(\mathcal{C})$ .

(ii) En déduire un théorème de Birkhoff : toute matrice bistochastique est combinaison linéaire convexe de matrices de permutations, et même d'au plus  $(n-1)^2 + 1$  d'entre elles.

## §2

1) Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbf{C}$ . Soit  $\mathcal{H}$  un ensemble de fonctions holomorphes dans  $U$  tel que, pour tout disque  $D$  fermé de rayon  $> 0$  et contenu dans  $U$ , il existe une constante  $M_D$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  et tout  $z \in D$  on ait  $|f(z)| \leq M_D$ .

(i) Montrer que pour tout disque  $D$  comme ci-dessus, il existe une constante  $M'_D$  telle que pour toute  $f \in \mathcal{H}$  on ait  $|f'(z)| \leq M'_D$ .

(ii) En déduire que l'ensemble  $\mathcal{H}$  est équicontinu sur  $U$ .

2) Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions sur positives sur un intervalle  $I \subset \mathbf{R}$  (borné ou non). On suppose que  $x \mapsto f_n(x)$  est croissante pour tout  $n \geq 1$  et que  $0 \leq f_n(x) \leq M$ , c'est-à-dire que  $(f_n)$  est uniformément bornée. Montrer que  $f_n$  admet une sous-suite qui converge simplement sur  $I$ . Si les  $f_n$  sont toutes continues, la limite est-elle nécessairement continue ? En supposant la limite continue, montrer que la convergence est uniforme sur les compacts.

3) Si  $k$  est un nombre réel  $> 0$ , on note  $\mathcal{H}_k$  l'ensemble des fonctions définies sur  $[0; 1]$ , à valeurs réelles, telles que  $f(0) = 0$  et qui sont  $k$ -Lipschitz, c'est-à-dire telles que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \text{pour tous } x, y \in [0; 1].$$

On pose alors  $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$  et, pour  $f \in \mathcal{E}$ , on note  $N(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathcal{H}_k\}$ .

- (i) Justifier que  $\mathcal{E}$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et que  $N$  est une norme sur  $\mathcal{E}$ .
- (ii) Prouver que l'on a  $\|f\|_\infty \leq N(f)$  pour toute  $f \in \mathcal{E}$  mais que  $\|\cdot\|_\infty$  et  $N$  ne sont pas des normes équivalentes sur  $\mathcal{H}_k$ .
- (iii) On fixe  $k > 0$ . Discuter la compacité de  $\mathcal{H}_k$  dans  $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$  et dans  $(\mathcal{E}, N(\cdot))$ .

4) On pose, pour tout  $z \in \mathbf{C}$  :

$$\exp(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Montrer que  $\exp(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  en procédant comme suit.

- (i) Vérifier que c'est vrai pour tous les  $z$  réels  $> 0$  en passant au logarithme.
- (ii) Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$ , où  $f_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ , est bornée dans  $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ .
- (iii) En déduire, par le théorème de Vitali, que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge dans  $\mathcal{O}(\mathbf{C})$ , disons vers  $g$ .
- (iv) Constater que  $g(z) = \exp(z)$  car c'est vrai pour  $z$  réel  $> 0$ .

5) Soit  $\mathcal{C} = C^0\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right], \mathbf{R}$ , et soit  $\mathcal{H}$  le sous-ensemble de  $\mathcal{C}$  formé des fonctions polynomiales dont les coefficients sont réels et tous dans  $[-1, 1]$ . Soit  $\overline{\mathcal{H}}$  l'adhérence de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{C}$ .

- (i) Montrer que, pour toute  $f \in \mathcal{H}$ , la dérivée  $\frac{df}{dx}$  est bornée en valeur absolue par 4 sur  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .
- (ii) En déduire que  $\mathcal{H}$  est équicontinu dans  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ .
- (iii) Montrer que  $\overline{\mathcal{H}}$  est un sous-ensemble convexe et compact dans  $\mathcal{C}$ .
- (iv) En appliquant le théorème de Vitali, montrer que toute  $f \in \overline{\mathcal{H}}$  est la restriction au segment  $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$  d'une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert de  $\mathbf{C}$ , notée  $\tilde{f}$ .
- (v) Caractériser les fonctions  $\tilde{f}$  où  $f \in \overline{\mathcal{H}}$ , par une propriété de leurs coefficients de Taylor à l'origine.

Indication : on pourra utiliser la formule, pour  $n \geq 0$  et  $0 \leq r < 1$ , donnant ces coefficients  $a_n$ , à savoir :  $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r e^{i\theta} \tilde{f}(r e^{-in\theta}) d\theta$ .

- (vi) Déterminer l'ensemble des points extrémaux de  $\overline{\mathcal{H}}$ .

6) Soit  $X$  un sous-ensemble compact de  $\mathbf{C}$ .

- (i) Montrer que toute fonction  $f \in \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  peut être approchée uniformément sur  $X$  par des fonctions polynomiales en les variables  $z$  et  $\bar{z}$ , à coefficients complexes.
- (ii) Soit  $X$  le disque unité  $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ . Soit  $\overline{\mathcal{H}}$  l'adhérence dans  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$  de l'ensemble des polynômes à coefficients complexes en la seule variable  $z$ . Montrer que pour toute  $f \in \overline{\mathcal{H}}$  on a la formule :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta,$$

et que, en revanche, la fonction continue  $f(z) = |z|$  ne possède pas cette propriété.

- (iii) En déduire que  $\overline{\mathcal{H}}$  est différent de  $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ .

7) [Théorème de Müntz] Soit  $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots$  une suite croissante de nombres positifs. On appelle  $\mathcal{H}$  l'espace engendré par les  $x^{\lambda_n}$  dans  $C^0([0, 1], \mathbf{C})$ . Montrer que  $\mathcal{H}$  est dense dans  $C^0([0, 1], \mathbf{C})$  pour la norme sup si et seulement si

$$\sum \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

Montrer le même résultat pour les fonctions sous la forme  $e^{-\lambda_n r}$  dans  $C_0^0(\mathbf{R}^+, \mathbf{C})$  (l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini).

8) [Partitions de l'unité] Soit  $X$  un espace topologique compact,  $K$  un compact de  $X$  et  $U_1, \dots, U_n$  est un recouvrement ouvert de  $K$  dans  $X$ . Montrer qu'il existe une famille d'applications continues  $\varphi_i : X \rightarrow [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$  telles que (i)  $\varphi_i|_{X-U_i} = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$  et (ii)  $\sum_{1 \leq i \leq n} \varphi_i|_K = 1$ .

## §3

1) [Fonctions continues nulle-part dérivables] Montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle-part dérivables est dense dans  $C^0([0, 1])$ . On pourra considérer pour tout entier  $n \geq 1$ , l'ensemble

$$U_n = \left\{ f \in C^0([0, 1]); \forall x \in [0, 1], \exists y \text{ tel que } 0 < |x - y| < 1/n, \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} > n \right\}.$$

2) [Caractérisations de  $\ell^p$  par l'inégalité de Hölder] Soit  $1 \leq p, q \leq \infty$  tels que  $1/p + 1/q = 1$ . Montrer que l'ensemble des suites réelles  $\mathbf{x} = (x_n)$  telles que

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n \text{ converge pour tout } \mathbf{y} = (y_n) \in \ell^q(\mathbf{R}),$$

s'identifie à  $\ell^p(\mathbf{R})$ . On traitera d'abord les cas (plus faciles) de  $p = 1$  et  $p = \infty$ .

3) [Première classe de Baire] Soit  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  dans la première classe de Baire. Montrer que, pour tout intervalle ouvert non vide  $I$ , il existe un sous-intervalle ouvert non vide  $J$  de  $I$  sur lequel  $f$  est bornée.

4) [Graphe fermé et dimension] Soit  $E \subset L^2(]0, 1[)$  un sous espace fermé contenu dans  $L^\infty(]0, 1[)$ .  
 (i) Montrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $\|f\|_\infty \leq C\|f\|_2$ , pour tout  $f \in E$ .  
 (ii) En déduire que  $E$  est de dimension finie.

5) [Graphe fermé et spectre] Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert complexe séparable et  $\mathcal{D}$  un sous-espace quelconque de  $\mathcal{H}$ . On se donne un opérateur linéaire  $A : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$ . On appelle

$$\rho(A) := \{z \in \mathbf{C} \text{ tel que } A - z : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H} \text{ est inversible d'inverse borné}\}$$

ensemble résolvant de  $A$  et  $\sigma(A) := \mathbf{C} - \rho(A)$  le spectre de  $A$ . Ici " $(A - z)^{-1}$  borné" signifie qu'il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall x \in \mathcal{H}, \quad \|(A - z)^{-1}x\|_{\mathcal{H}} \leq C\|x\|_{\mathcal{H}}$$

(on utilise la norme de  $\mathcal{H}$ , même si  $(A - z)^{-1}x \in \mathcal{D}$ ).

- (i) Montrer que si  $\sigma(A) \neq \mathbf{C}$ , alors le graphe de  $A$  doit être fermé dans  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .  
 (ii) On prend

$$\mathcal{H} = L^2(]0, 1[, \mathbf{C}), \quad \mathcal{D}_1 = C^1([0, 1], \mathbf{C}) \text{ et } A_1 f = f'.$$

- (a) Montrer que le graphe de  $A_1$  n'est pas fermé et que  $\sigma(A_1) = \mathbf{C}$ .  
 (b) On considère le sous-espace de  $L^2(]0, 1[)$

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = \{f \in C^0([0, 1], \mathbf{C}) : f' \in L^2(]0, 1[, \mathbf{C})\}$$

où  $f'$  est entendue au sens des distributions sur  $]0, 1[$ , et l'opérateur  $B_1 f = f'$  sur  $\tilde{\mathcal{D}}_1$ . Montrer que le graphe de  $B_1$  est fermé et que c'est la fermeture du graphe de  $A_1$  dans  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .

- (c) Déterminer le spectre de  $B_1$ .

(iii) On prend

$$\mathcal{H} = L^2(]0, 1[, \mathbf{C}), \quad \mathcal{D}_2 = \{f \in C^1([0, 1], \mathbf{C}), f(0) = f(1)\} \quad \text{et} \quad A_2 f = f'.$$

(a) Montrer que le graphe de  $A_2$  n'est pas fermé et que  $\sigma(A_2) = \mathbf{C}$ .

(b) On considère le sous-espace de  $L^2(]0, 1[)$

$$\tilde{\mathcal{D}}_2 = \{f \in C^0([0, 1], \mathbf{C}) : f' \in L^2(]0, 1[, \mathbf{C}), f(0) = f(1)\}$$

et l'opérateur  $B_2 f = f'$  sur  $\tilde{\mathcal{D}}_2$ . Montrer que le graphe de  $B_2$  est fermé et que c'est la fermeture du graphe de  $A_2$ .

(c) Montrer que  $\tilde{\mathcal{D}}_2$  est aussi l'espace des fonctions  $f \in C^0([0, 1], \mathbf{C})$  dont les coefficients de Fourier  $c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt} dt$  vérifient

$$\sum_{k \in 2\pi\mathbf{Z}} |k|^2 |c_k(f)|^2 < \infty$$

et exprimer  $B_2$  dans la base de Fourier. En déduire le spectre de  $B_2$ .

§4

1) [Densité des inversibles] Soit  $A$  une algèbre de Banach. On dit que  $a \in A$  est topologiquement un diviseur de zéro (à gauche) dans  $A$  s'il existe une suite  $\underline{\alpha} = (\alpha_n)_{n \geq 1}$  de  $A$  telle que  $\underline{\alpha}$  ne converge pas vers 0 dans  $A$  mais  $a\alpha_n \rightarrow 0$ .

(i) Montrer que les éléments de  $\partial A^\times$  (la frontière du groupe des inversibles  $A^\times$  de  $A$ ) sont topologiquement des diviseurs de zéro.

(ii) Soit  $A = \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}))$  et  $S : A \rightarrow A$  l'opérateur de décalage  $(x_0, x_1, \dots) \rightarrow (0, x_0, x_1, \dots)$ . Montrer que  $S$  n'est pas dans l'adhérence de  $A^\times$ . Ce qui montre que  $A^\times$  n'est pas dense dans  $A$ .

(iii) Montrer que si  $A$  est de  $\mathbf{C}$ -dimension finie alors  $A^\times$  est toujours dense dans  $A$ . (On pourra commencer par traiter le cas  $A = M_n(\mathbf{C})$ ).

2) [Quelques calculs de spectre]

(i) Soit  $\chi : A \rightarrow \mathbf{C}$  un caractère (*i.e.* morphisme de  $\mathbf{C}$ -algèbres) et  $a \in A$ , rappeler pourquoi  $\chi(a) \in \text{spec}(a)$ .

(ii) Calculer le spectre de l'opérateur de décalage de l'exercice 1 (2).

(iii) Soit  $A := (\mathcal{C}(S^1, \mathbf{C}), \|\cdot\|_\infty)$  où  $S^1$  est le cercle unité, et  $\overline{\mathbb{D}} = \{|z| \leq 1\}$  est le disque unité fermé. Soit également  $B \subset A$  la sous- $\mathbf{C}$ -algèbre de  $A$  constituée des fonctions qui s'étendent en des fonctions continues sur  $\overline{\mathbb{D}}$ , holomorphes sur  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ .

Calculer le spectre de  $f(z) = z$  dans  $A$  puis dans  $B$ .

(iv) Soit  $A = \ell^1(\mathbf{Z})$ , que l'on munit du produit de convolution  $(\underline{x} * \underline{y})_n = \sum_{p+q=n} x_p y_q$  et de la norme  $\|\underline{x}\|_1 = \sum_{n \geq 0} |x_n|$ .

(a) On note  $e_n$  la fonction qui vaut 1 en  $n$  et 0 partout ailleurs. Calculer  $e_n * e_m$  et  $e_n^{-1}$ .

Vérifier que tout  $\underline{x} \in A$  est limite de  $\sum_{-N \leq n \leq N} x_n (e_1)^{*n}$ .

(b) Calculer le spectre de  $e_1$ .

(c) Même question mais en considérant  $e_1$  comme un élément de la sous-algèbre de Banach fermée  $B = \ell^1(\mathbf{N}) \subset A$ .

3) [Idéaux fermés de  $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ ] Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact et  $\mathcal{A} = (\mathcal{C}(X, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  l'algèbre de Banach commutative unitaire des fonctions continues sur  $X$  munie de la norme sup. Pour  $x \in X$  on note  $e_x : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} \in \mathcal{A}'$  l'évaluation en  $x$ . Pour toute partie  $Y \subset X$  et  $B \subset \mathcal{A}$  on note

$$I(Y) := \bigcap_{y \in Y} \text{Ker}(e_y) \subset \mathcal{A}, \quad V(B) := \bigcap_{b \in B} b^{-1}(0)$$

(i) Vérifier que  $I(Y)$  est un idéal fermé de  $\mathcal{A}$  et que  $I(Y) = I(\overline{Y})$  et que  $V(B)$  est un sous-ensemble compact de  $X$  et  $V(B) = V(\langle \overline{B} \rangle)$ , où  $\langle B \rangle$  désigne le sous-idéal de  $\mathcal{A}$  engendré par  $B$ .

On note  $\mathcal{I}(\mathcal{A})$  l'ensemble des idéaux fermés de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{F}(X)$  l'ensemble des parties fermées de  $X$ . On dispose donc de deux applications qui inversent l'inclusion :

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) \xrightarrow{V} \mathcal{F}(X), \quad \mathcal{F}(X) \xrightarrow{I} \mathcal{I}(\mathcal{A})$$

et telles que  $V \circ I(F) \supset F$ ,  $I \circ V(J) \supset J$ .

(ii) Soit  $J \in \mathcal{I}(\mathcal{A})$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$V(J)_n := \left\{ x \in X \mid d(x, V(J)) < \frac{1}{n} \right\}$$

(a) Montrer qu'il existe  $a_n \in J$  qui est strictement positive sur  $X - V(J)_n$ .

(b) En déduire que  $I(V(J)_n) \subset J$  puis que  $I(V(J)) = J$ .

(c) En déduire que  $V$  et  $I$  sont inverses l'une de l'autre. Quels sont les idéaux maximaux fermés de  $\mathcal{A}$ ? Quel est le spectre de Gelfand de  $\mathcal{A}$ ?

4) [Un critère de commutativité] Soit  $A$  une algèbre de Banach unitaire. Pour  $a \in A$ , on note  $\varrho(a)$  le rayon spectral.

(i) Montrer que si l'existe  $N > 0$  tel que  $N\|a\|^2 \leq \|a^2\|$ ,  $a \in A$  alors  $N\|a\| \leq \varrho(a)$ ,  $a \in A$ .

(ii) Soit  $a, b \in A$  et supposons qu'il existe  $M > 0$  tel que  $\|\exp(\lambda a)b \exp(-\lambda a)\| \leq M$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Montrer que  $ab = ba$ .

(iii) En déduire que si s'il existe  $N > 0$  tel que  $N\|a\|^2 \leq \|a^2\|$  pour tout  $a \in A$  alors  $A$  est commutative.

5) [Fonction exponentielle] Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre de Banach avec unité et

$$\exp(x) := \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

(i) Montrer que si  $x$  et  $y$  commutent (c'est-à-dire  $xy = yx$ ), alors  $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ .

(ii) Montrer la formule de Trotter

$$\exp(x+y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \exp\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(\frac{y}{n}\right) \right)^n.$$

(iii) On prend  $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $\exp(x)$ ,  $\exp(y)$ ,  $\exp(x+y)$  et constater que  $\exp(x)\exp(y) \neq \exp(x+y)$ .

(iv) Soient  $A = A$  et  $B = B^*$  deux matrices hermitiennes de taille  $n$ . Montrer que

$$\det(\exp(A+B)) = \det(\exp(A)\exp(B)).$$

(v) (a) Soient  $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$  deux matrices de taille  $n$  (pas forcément hermitiennes). Montrer que

$$|\operatorname{tr}(A_1 A_2)| \leq \sqrt{\operatorname{tr}(A_1^* A_1)} \sqrt{\operatorname{tr}(A_2^* A_2)}.$$

(b) Montrer par récurrence que pour  $p = 2^k$  et  $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on a

$$|\operatorname{tr}(A_1 A_2 \cdots A_p)| \leq \left( \operatorname{tr}(A_1^* A_1)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left( \operatorname{tr}(A_p^* A_p)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(c) En prenant  $A_j = AB$  avec maintenant  $A = A^*$  et  $B = B^*$ , en déduire que

$$\operatorname{tr}(AB)^p \leq \operatorname{tr}(A^2 B^2)^{\frac{p}{2}}$$

puis par une nouvelle récurrence sur  $p$  que

$$\operatorname{tr}(AB)^p \leq \operatorname{tr}(A^p B^p).$$

(d) En utilisant la formule de Trotter, en déduire l'inégalité de Golden-Thompson

$$\operatorname{tr}(e^{A+B}) \leq \operatorname{tr}(e^A e^B),$$

pour toutes matrices hermitiennes  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ .

6) Soit  $A$  l'algèbre des sommes de séries de Taylor absolument convergentes  $f = f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ , munie de la norme  $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$ .

(i) Montrer que les caractères de  $A$  sont exactement les  $\chi_{z_0} : f \mapsto f(z_0)$  où  $z_0 \in \mathbf{C}$  avec  $|z_0| \leq 1$ . Ceci permet d'identifier  $\hat{A}$  au disque unité fermé de rayon 1 de  $\mathbf{C}$ .

(ii) Montrer que si  $f \in A$  n'est jamais nulle sur ce disque, alors il existe des nombres complexes  $b_n$  tels que

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

(iii) Soient  $f_1, f_2, \dots, f_p$  des fonctions appartenant à  $A$  et n'ayant aucun zéro commun dans  $\{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 1\}$ . Montrer qu'il existe  $g_1, g_2, \dots, g_p \in A$  telles que  $\sum_{i=1}^p f_i g_i = 1$ .

§5

1) Soit  $S$  l'opérateur de décalage défini sur  $\ell^2(\mathbf{N})$  par  $S(\underline{x}) = (0, x_0, x_1, \dots)$ . On a déjà vu que le spectre de  $S$  est le disque unité fermé de  $\mathbf{C}$ . Montrer que  $S$  n'a pas de valeur propre et que le cercle unité est l'ensemble des valeurs propres généralisées de  $S$ .

2) Soit  $1 \leq p \leq +\infty$  et l'espace de Banach  $E = \ell^p(\mathbf{Z})$ . Soit  $\mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  une suite bornée de nombres complexes et  $T$  l'opérateur défini par  $(x_n) \mapsto (y_n)$  avec  $y_n = a_n x_n$  pour tout  $n \in \mathbf{Z}$ .

(i) Montrer que  $T$  est borné. Quelle est sa norme ?

(ii) Montrer que  $T$  est compact si et seulement si  $|a_n| \rightarrow 0$ .

3)

(i) Soit  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$  une suite de nombres réels strictement positifs tels que  $a_n \rightarrow +\infty$  et soit  $\mathcal{H}$  l'espace de Hilbert composé des suites  $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geq 0}$  telles que

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n \geq 0} a_n |x_n|^2 < \infty.$$

Montrer que  $\mathcal{H} \subset \ell^2(\mathbf{N})$  et que l'injection est compacte.

(ii) Soit  $V : [0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  une fonction continue strictement positive telle que  $V(x) \rightarrow +\infty$  quand  $x \rightarrow +\infty$ . Soit  $\mathcal{V}$  l'espace de Hilbert composé des fonctions  $f \in L^1_{\text{loc}}(]0, +\infty[)$  telles que

$$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = \int_0^\infty V(x) |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Montrer que  $\mathcal{V} \subset L^2(\mathbf{R}_+)$ . L'injection est-elle compacte ?

4) Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbf{R}^d$ . Rappeler pourquoi on a l'injection continue  $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$  lorsque  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ . Cette injection est-elle compacte ?

5) Soit  $T : E \rightarrow F$  un opérateur compact, avec  $E$  et  $F$  des espaces de Banach. Montrer que l'image de  $T$  est fermée si et seulement si  $T$  est de rang fini.

6) Soit  $E$  un espace de Banach et  $T : E \rightarrow E$  un opérateur compact.

(i) Montrer que le noyau de l'opérateur  $\text{Id} - T$  est de dimension finie.

(ii) Montrer qu'il existe un sous-espace fermé  $F \subset E$  tel que  $E = F \oplus \text{Ker}(\text{Id} - T)$ .

(iii) Montrer qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\|(\text{Id} - T)(x)\| \geq c\|x\|$  pour tout  $x \in F$ . En déduire que l'image de  $\text{Id} - T$  est fermée.

(iv) Soit  $M$  un sous-espace de  $E$  tel que  $\overline{M} \subsetneq E$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $d(x, M) \geq 1 - \varepsilon$ .

(v) En déduire que l'image de  $\text{Id} - T$  est de codimension finie dans  $E$ .

7) Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbf{C})$  (muni de la norme sup) et  $K(x, y) = \min\{x; y\}$ . Si  $f \in E$ , on pose :

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy = \int_0^x f(y) y dy + x \int_x^1 f(y) dy.$$

(i) Montrer que  $T$  est un opérateur continu sur  $E$  et calculer sa norme.

(ii) Montrer que pour tout  $f \in E$ ,  $g = Tf$  est de classe  $C^2$  sur  $[0; 1]$ , que  $g''(x) = -f(x)$ , et que  $g(0) = 0$  et  $g'(1) = 0$ . En d'autres termes,

$$\text{Im}(T) \subset F := \{g \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbf{C}) : g(0) = 0, g'(1) = 0\}.$$

En déduire que  $0 \in \sigma(T)$ . Quelle est l'interprétation de  $T$  ?

(iii) Montrer que  $T$  établit une bijection de  $E$  sur  $F$ . Préciser l'application  $T^{-1} : F \rightarrow E$ .

(iv) Montrer que  $T : E \rightarrow E$  est compact, mais que  $T : E \rightarrow F$  n'est pas compact ( $F$  est un Banach lorsqu'il est muni de la norme de  $\mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{C})$ ).

(v) On considère le produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Montrer que  $(Tf|g) = (f|Tg)$  pour tous  $f, g \in E$  et en déduire que les valeurs propres de  $T$  dans  $E$  sont réelles positives.

(vi) Montrer que les valeurs propres de  $T$  sont les nombres  $\lambda_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-2}$  pour  $n$  entier  $\geq 0$ . Déterminer le sous-espace vectoriel  $V_{\lambda_n} = \text{Ker}(T - \lambda_n \text{id}_E)$ .

(vii) En déduire que  $\|T\| \notin \sigma(T)$ .

(viii) Étudier le même opérateur sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(]0, 1[)$ .

8) [Opérateurs Hilbert-Schmidt] On introduit une sous-algèbre particulière de  $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$  où  $\mathfrak{H}$  est un espace de Hilbert séparable quelconque.

1. Soit  $A$  un opérateur borné sur  $\mathfrak{H}$ . Soient  $(e_n)$  et  $(f_n)$  deux bases orthonormées quelconques de  $\mathfrak{H}$ . Montrer l'égalité

$$(1) \quad \sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n, m \geq 1} |\langle f_m, Ae_n \rangle|^2 = \sum_{m \geq 1} \|A^* f_m\|^2,$$

où les termes peuvent être finis ou infinis. En déduire en particulier que

$$\sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m \geq 1} \|A f_m\|^2.$$

On appelle  $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  l'ensemble des opérateurs  $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  tels que les séries (1) sont finies (appelés *opérateurs Hilbert-Schmidt*), et on note  $\|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}^2 := \sum_{n \geq 1} \|Ae_n\|^2$  la norme associée.

2. Montrer que si  $A \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$ , alors  $A$  est compact.

3. Si  $A \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$ , on appelle  $\mu_n(A)$  les valeurs singulières de  $A$  (qui sont les racines des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint compact  $A^*A$ ). Montrer que

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}^2 = \sum_{n \geq 1} \mu_n(A)^2.$$

En déduire que

$$\|A\| \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}.$$

4. Montrer que si  $A \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$  alors  $AB \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  et  $BA \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$ , avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \|B\|, \quad \|BA\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \|B\|.$$

En déduire que  $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ .

5. Montrer que  $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}$  est une norme et que  $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  est une algèbre de Banach.

6. On suppose que  $\mathfrak{H} = L^2(M, d\mu)$  pour  $M \subset \mathbf{R}^d$  où  $\mu$  est une mesure quelconque sur  $M$ . Montrer que  $A \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  si et seulement s'il existe une fonction  $a \in L^2(M \times M, d\mu^{\otimes 2})$  telle que

$$(Af)(x) = \int_M a(x, y) f(y) d\mu(y)$$

pour tout  $f \in L^2(M, d\mu)$ . Montrer aussi que

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}^2 = \int_M \int_M |a(x, y)|^2 d\mu(x) d\mu(y).$$

La fonction  $a$  est appelée *noyau* de l'opérateur Hilbert-Schmidt  $A$ .

9) [Opérateurs à trace] On définit ici une autre sous-algèbre  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  de  $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$  et la trace sur cette algèbre. Ceci permettra en particulier de voir que l'algèbre  $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  construite à l'exercice précédent est en fait un espace de Hilbert.

1. Soit  $A = A^* \geq 0$  un opérateur compact auto-adjoint positif sur  $\mathfrak{H}$ . On appelle

$$\text{tr}(A) := \sum_{n \geq 1} \langle e_n, Ae_n \rangle$$

la trace de  $A$ , où  $(e_n)$  est une base orthonormée quelconque de  $\mathfrak{H}$  (la trace peut être finie ou infinie). Vérifier que cette définition ne dépend pas de la base choisie et donner une expression en fonction des valeurs propres de  $A$ .

On appelle  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  l'ensemble des opérateurs compacts  $A$  (non nécessairement auto-adjoints) tels que  $\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} := \text{tr}(|A|)$  est fini, où on rappelle que  $|A| = \sqrt{A^*A}$ . De tels  $A$  sont appelés *opérateurs à trace*.

2. Exprimer  $\text{tr}(|A|)$  en fonction des valeurs singulières de  $A$ . Montrer que  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  avec

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})}.$$

Montrer aussi que  $A \in \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  équivaut à  $A^* \in \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  et que  $\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} = \|A^*\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})}$ .

3. Soit  $A$  un opérateur compact quelconque. Montrer que

$$(2) \quad \text{tr}(|A|) = \inf_{\substack{(e_n) \text{ base} \\ \text{orthonormée}}} \left\{ \sum_{n \geq 1} \|Ae_n\| \right\}$$

et que

$$(3) \quad \text{tr}(|A|) = \sup_{\substack{(e_n), (f_n) \\ \text{systèmes orthonormés}}} \left\{ \sum_{n \geq 1} |\langle f_n, Ae_n \rangle| \right\}.$$

Dans cette dernière inégalité, les  $e_n$  et  $f_n$  peuvent être en nombre fini ou infini.

4. Montrer que si  $A \in \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$ , alors la série

$$\text{tr}(A) := \sum_{n \geq 1} \langle e_n, Ae_n \rangle$$

converge absolument pour toute base orthonormée  $(e_n)$  et ne dépend pas de la base choisie. Montrer également que

$$|\text{tr}(A)| \leq \text{tr}(|A|),$$

c'est-à-dire que la trace  $A \in \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H}) \mapsto \text{tr}(A)$  est une forme linéaire continue.

5. Soit  $A$  l'opérateur de multiplication par la fonction  $a(t) = t$  sur  $\mathfrak{H} = L^2(]-1, 1[)$ . Calculer  $\langle e_n, Ae_n \rangle$  où  $e_n(t) = e^{i\pi nt}/\sqrt{2}$  est la base de Fourier et en déduire que

$$\sum_n |\langle e_n, Ae_n \rangle| < \infty,$$

mais que  $A \notin \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$ .

6. Montrer que si  $A, B \in \mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$ , alors  $AB$  et  $BA$  appartiennent à  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$ , avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^1} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \|B\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}, \quad \|BA\|_{\mathfrak{S}^1} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})} \|B\|_{\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})}.$$

Montrer aussi que

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

En déduire que  $\mathfrak{S}^2(\mathfrak{H})$  est un espace de Hilbert, lorsqu'il est muni du produit scalaire  $\langle A, B \rangle_{\mathfrak{S}^2} := \text{tr}(A^*B)$ .

7. Montrer que si  $A \in \mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  et  $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ , alors  $AB$  et  $BA$  appartiennent à  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$ , avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} \|B\|, \quad \|BA\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} \leq \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})} \|B\|,$$

c'est-à-dire que  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  est un idéal bilatère de  $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ . Montrer ensuite que

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

8. Montrer que  $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})}$  est une norme, et que  $\mathfrak{S}^1(\mathfrak{H})$  est une algèbre de Banach.

9. Montrer que  $\mathcal{K}(\mathcal{H})' \simeq \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ , que  $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})' \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et que  $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})' \simeq \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$  (ici  $\mathcal{K}(\mathcal{H})$  est l'algèbre des opérateurs compacts et  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  celle des opérateurs continus).

10. Soit  $(A_n)$  une suite bornée dans  $\mathfrak{S}^1$ . Montrer qu'il existe une sous-suite telle que  $\text{tr}(A_{n_k}K) \rightarrow \text{tr}(AK)$  pour tout  $K$  compact.

10) [Quelques opérateurs compacts] On se place dans  $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R}^d)$  et on note  $f(-i\nabla)$  l'opérateur qui consiste à multiplier par la fonction  $f(k)$  en Fourier, c'est-à-dire

$$f(-i\nabla)u = \mathcal{F}^{-1}\left(f(k)\widehat{u}(k)\right).$$

Ici on utilise la convention

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbf{R}^d} f(x)e^{-ik \cdot x} dx$$

pour la transformée de Fourier.

(i) Montrer que si  $f \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$ , alors  $f(-i\nabla)$  est un opérateur borné vérifiant  $\|f(-i\nabla)\| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d)}$ .

(ii) On suppose que  $f, g \in L^2(\mathbf{R}^d)$ . Montrer que les opérateurs  $g(x)f(-i\nabla)$  et  $f(-i\nabla)g(x)$  sont compacts, avec

$$\|g(x)f(-i\nabla)\|_{\mathfrak{S}^2} = \|f(-i\nabla)g(x)\|_{\mathfrak{S}^2} = \frac{\|f\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}\|g\|_{L^2(\mathbf{R}^d)}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

(iii) On suppose que  $f, g \in L^\infty(\mathbf{R}^d)$  et tendent vers 0 à l'infini. Montrer que  $g(x)f(-i\nabla)$  et  $f(-i\nabla)g(x)$  sont des opérateurs compacts.

(iv) Soit  $f_n$  une suite de  $L^2(\mathbf{R}^d)$  telle que  $f_n \rightharpoonup f$  faiblement dans  $L^2(\mathbf{R}^d)$  et

$$\int_{\mathbf{R}^d} |\nabla f_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R}^d} |k|^2 |\widehat{f_n}(k)|^2 dk \leq C.$$

Montrer que  $f_n \mathbf{1}_\Omega \rightarrow f \mathbf{1}_\Omega$  fortement dans  $L^2(\Omega)$ , pour tout ouvert borné  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  (théorème de Rellich).

11) [Paires de projecteurs] Soient  $P$  et  $Q$  deux projecteurs orthogonaux (de rang quelconque, possiblement infini), sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . C'est-à-dire on a  $P = P^* = P^2$  et  $Q = Q^* = Q^2$ . On pose

$$A = P - Q \quad \text{et} \quad B = 1 - P - Q.$$

Dans tout l'exercice on suppose que  $A$  est un opérateur compact.

(i) Montrer que  $A^2 + B^2 = 1$  et que  $AB + BA = 0$ .

(ii) Montrer que  $\sigma(A) \subset [-1, 1]$ .

(iii) Montrer que  $\text{Ker}(A - 1) = \text{Ker}(Q) \cap \text{Ker}(1 - P)$  et que  $\text{Ker}(A + 1) = \text{Ker}(1 - Q) \cap \text{Ker}(P)$ .

En déduire que  $A$  peut s'écrire

$$A = \Pi_+ - \Pi_- + P' - Q'$$

où  $\Pi_\pm$  sont des projecteurs orthogonaux de rang fini et  $P', Q'$  sont des nouveaux projecteurs orthogonaux tels que  $\|P' - Q'\| < 1$ .

(iv) On suppose ici que  $\|A\| = \|P - Q\| < 1$ .

(a) Montrer que  $B$  est inversible.

(b) On admet que  $B$  peut s'écrire sous la forme  $B = |B|U$  (décomposition polaire), où

- $|B| = \sqrt{1 - A^2}$  est inversible et commute avec  $A$  et  $B$ ;
- $U$  est unitaire et commute avec  $A$  et  $B$ ;

(le montrer en exercice pour un opérateur compact). Montrer que  $U^*AU = -A$  et que  $U^*BU = B$ .

(c) Déduire que le spectre de  $A$  est symétrique par rapport à 0, et que  $U^*PU = Q$ ,  $U^*QU = P$ .

(v) Quelle est la forme du spectre de l'opérateur compact  $A = P - Q$  lorsque  $P$  et  $Q$  sont quelconques ?

(vi) On pose  $\text{Ind}(P, Q) = \dim \text{Ker}(A - 1) - \dim \text{Ker}(A + 1)$  (indice de Fredholm d'une paire de projecteurs orthogonaux). Montrer que si  $P - Q$  et  $Q - R$  sont de rang fini,

$$(4) \quad \text{Ind}(P, R) = \text{Ind}(P, Q) + \text{Ind}(Q, R).$$

(vii) Cette formule est en fait vraie pour tous  $P, Q, R$  tels que  $P - Q$  et  $Q - R$  sont compacts. Quelles conséquences peut-on en tirer ?

12) [Krein-Rutman dans le cas auto-adjoint] Soit  $A = A^*$  un opérateur Hilbert-Schmidt auto-adjoint sur  $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$  (Exercice 8), où  $\Omega$  est un ouvert quelconque de  $\mathbf{R}^d$ . On note  $a(x, y) = \overline{a(y, x)} = a(x, y) \in L^2(\Omega^2)$  le noyau intégral de  $A$  que l'on suppose réel et strictement positif. Ceci signifie que pour tout  $x, y \in \Omega$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c > 0$  tel que  $a(x', y') \geq c \mathbb{1}_{B(x, \varepsilon) \cap \Omega}(x') \mathbb{1}_{B(y, \varepsilon) \cap \Omega}(y')$ , presque partout. L'objectif est de montrer que  $\|A\|$  est une valeur propre simple dont l'unique fonction propre est strictement positive.

(i) Soit  $f \geq 0$  une fonction positive non nulle. Montrer que  $Af > 0$ .

(ii) Montrer que si  $Af = \lambda f$  alors  $A\Re(f) = \lambda\Re(f)$  et  $A\Im(f) = \lambda\Im(f)$ .

(iii) Rappeler pourquoi  $\sigma(A) \cap \{\pm\|A\|\} \neq \emptyset$ .

(iv) Rappeler pourquoi

$$\|A\| = \sup_{\substack{f \in \mathcal{H} \\ \int_{\Omega} |f|^2 = 1}} \left| \int_{\Omega} \int_{\Omega} \overline{f(x)} f(y) a(x, y) dx dy \right|.$$

Soit  $f$  à valeurs réelles non nulle, telle que  $Af = \tau\|A\|f$  avec  $\tau = \pm 1$ . Montrer que  $A|f| = \|A\||f|$ , que  $f = \pm|f|$  et que  $|f| > 0$ . Conclure en particulier que  $-\|A\| \notin \sigma(A)$ .

Indice : on pourra écrire  $f = f_+ - f_-$  où  $f_+ = \max(f, 0)$ .

(v) Montrer que la valeur propre  $\|A\|$  est simple.

(vi) Soit  $h \geq 0$  une fonction positive non nulle quelconque dans  $L^2(\Omega)$ . Calculer la limite

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \langle h, A^N h \rangle^{\frac{1}{N}}.$$

13) [Régularité des valeurs propres] Soit  $A$  une application continue d'un ouvert  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ , telle que  $A(x)$  est auto-adjoint compact pour tout  $x$ .

(i) On appelle  $\lambda(x)$  la plus grande valeur propre de  $A(x)$ . Montrer que

$$|\lambda(x) - \lambda(x')| \leq \|A(x) - A(x')\|$$

et en déduire que  $\lambda$  est une fonction continue.

(ii) Si  $x \mapsto A(x)$  est  $C^1$ , est-ce que  $\lambda$  est forcément de classe  $C^1$  ?

(iii) On rappelle que la plus grande valeur propre  $\mu(x)$  inférieure à  $\lambda(x)$  est donnée par la formule de Courant-Fischer

$$\mu(x) = \sup_{\substack{V \subset \mathcal{H} \\ \dim(V)=2}} \inf_{\substack{v \in V \\ \|v\|=1}} \langle v, A(x)v \rangle.$$

On a par ailleurs  $\mu(x) = \lambda(x)$  si  $\lambda(x)$  est de multiplicité  $\geq 2$ . Montrer que  $\mu(x)$  est également une fonction continue.

(iv) On suppose que  $\lambda(x_0)$  est simple. En déduire que  $\lambda(x)$  reste simple sur un voisinage de  $x_0$ .

(v) Soit  $\mathcal{C}$  le cercle dans le plan complexe centré en  $\lambda(x_0)$  et de rayon  $(\lambda(x_0) - \mu(x_0))/2$ . Calculer

$$\frac{1}{2i\pi} \oint z(z - A(x))^{-1} dz$$

pour  $x$  assez proche de  $x_0$ . Soit  $e_n$  une base orthonormée quelconque de  $\mathcal{H}$ . En déduire que

$$\lambda(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_n \oint z \langle e_n, (z - A(x))^{-1} e_n \rangle_{\mathcal{H}} dz.$$

(vi) Montrer que si  $x \mapsto A(x)$  est  $C^\infty$  (resp. analytique réelle) alors  $\lambda$  est aussi  $C^\infty$  (resp. analytique réelle) au voisinage de  $x_0$ .

14) [Absence de transitions de phases en 1D] N'importe quel matériau est soumis à des transitions de phase lorsque la température et la pression varient. Nous sommes par exemple habitués à ce que l'eau se transforme en glace à 0 C et s'évapore à 100 C, dans les conditions normales de pression. Ces changements de phase ont lieu pour des valeurs particulières de la température et de la pression, que l'on peut représenter par des courbes dans le plan (T, P), appelé diagramme de phase. En dehors de ces courbes, les observables du système sont toutes des fonctions très lisses de T et P.

Il est assez surprenant que les transitions de phase sont un phénomène typique de la dimension 3 (pour les potentiels d'interaction à courte portée). Nous allons démontrer ici un théorème de 1950 dû à Van Hove (dans un cas simplifié), qui précise que l'enthalpie libre est une fonction analytique réelle pour un système unidimensionnel. Ainsi, il n'y a pas de transitions de phase usuelles en dimension 1. Un résultat similaire (quoique plus faible) a été démontré par Mermin et Wagner pour la dimension 2.

On considère donc N particules classiques qui interagissent par l'intermédiaire d'un potentiel  $w$ . On suppose que

$$w(|x|) \begin{cases} = +\infty & \text{si } |x| < R_1 \\ \in (-C, C) & \text{si } R_1 \leq |x| \leq R_2 \\ = 0 & \text{si } |x| \geq R_2. \end{cases}$$

Le lecteur peut penser à une fonction continue sur  $[R_1, R_2]$  qui admet une limite en  $R_1^+$  et qui tend vers 0 en  $R_2^-$ . L'hypothèse que  $w$  est infini pour  $|x| < R_1$  sert à assurer que les particules ne sont jamais trop proches les unes des autres (on parle de cœur dur). L'énergie de N + 1 particules localisées en  $x_0, \dots, x_N \in \mathbf{R}$  est donnée par

$$\sum_{0 \leq j < k \leq N} w(|x_j - x_k|) = \sum_{1 \leq j < k \leq N} w(|x_j - x_k|) + \sum_{j=1}^N w(|x_j - x_0|).$$

Comme cette énergie est invariante par translation, on va supposer pour simplifier que  $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N$ . On place les particules dans un segment de taille  $L > NR_1$ , c'est-à-dire on ajoute la contrainte que  $x_N \leq L$ . À température  $T = 1/\beta > 0$ , l'état du système est décrit par la mesure de Gibbs

$$\mu_{\beta, L, N}(x_1, \dots, x_N) = Z(\beta, L, N)^{-1} \exp \left( -\beta \sum_{1 \leq j < k \leq N} w(x_k - x_j) - \beta \sum_{j=1}^N w(x_j) \right)$$

où

$$Z(\beta, L, N) = \int_0^L dx_N \int_0^{x_N} dx_{N-1} \dots \int_0^{x_2} dx_1 e^{-\beta \sum_{1 \leq j < k \leq N} w(x_k - x_j) - \beta \sum_{j=1}^N w(x_j)}$$

est un facteur de normalisation, appelé fonction de partition. À cause du cœur dur, la mesure  $\mu_{\beta, L, N}$  est à support dans l'ensemble des  $(x_1, \dots, x_N)$  tels que  $x_j \geq R_1 + x_{j-1}$ . Par contre  $Z(\beta, L, N)$  fait sens pour tout  $L$  et s'annule juste quand  $L \leq NR_1$ .

Dans l'ensemble isotherme-isobare, nous devons considérer la transformée de Laplace de  $Z(\beta, L, N)$  par rapport à  $L$

$$\Delta(\beta, p, N) = \int_0^\infty e^{-pL} Z(\beta, L, N) dL,$$

où  $p$  est la pression. Le but est d'étudier la limite

$$\delta(\beta, p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \Delta(\beta, p, N)}{N}$$

et sa régularité en  $\beta, p$ .

(i) On suppose que  $R_2 < 2R_1$ , de sorte que chaque particule n'interagit qu'avec ses plus proches voisins. Calculer  $\Delta(\beta, p, N)$  et la limite  $\delta(\beta, p)$ , puis conclure que cette dernière est une fonction analytique réelle sur le quart de plan  $\{\beta > 0, p > 0\}$ . On introduira les nouvelles variables  $y_1 = x_1, y_2 = x_2 - x_1, \dots, y_N = x_N - x_{N-1}$ .

(ii) On introduit la fonction

$$a_{\beta, p}(x, y) = \exp\left(-\beta w(x+y) - \frac{\beta}{2}w(x) - \frac{\beta}{2}w(y) - \frac{px}{2} - \frac{py}{2}\right)$$

et l'opérateur  $A_{\beta, p}$  dont le noyau est égal à  $a_{\beta, p}(x, y)$ , sur  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_1, \infty[)$ . Montrer que  $A_{\beta, p}$  est auto-adjoint et Hilbert-Schmidt.

(iii) On suppose maintenant que  $R_2 < 3R_1$  de sorte que chaque particule n'interagit qu'avec son plus proche voisin et le suivant (à sa droite et sa gauche). On pose également

$$h_{\beta, p}(x) = \exp\left(-\beta \frac{w(x)}{2} - p \frac{x}{2}\right)$$

qui est dans  $L^2(\mathbb{R}_1, \infty)$ . Montrer que

$$\Delta(\beta, p, N) = \frac{1}{p} \left\langle h_{\beta, p}, (A_{\beta, p})^N h_{\beta, p} \right\rangle.$$

En utilisant l'exercice 12, montrer que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \Delta(\beta, p, N)}{N} = \log \|A_{\beta, p}\|.$$

(iv) En utilisant maintenant l'exercice 13, montrer que  $(\beta, p) \mapsto \log \|A_{\beta, p}\|$  est analytique réelle sur le quart de plan  $\{\beta > 0, p > 0\}$ .

Référence : Léon van Hove. *Sur l'intégrale de configuration pour les systèmes de particules à une dimension. Physica, 1950, 16, 137-143*

