MAT 452 **2018**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle
Examen de rattrapage
Mercredi 5 septembre 2018, 14h-17h

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés. Pour les questions portant sur l'intégrale vectorielle (dans la section II), on se reportera à la partie IV.23 du cours.

Problème. On s'intéresse à la fonction exponentielle dans les algèbres de Banach.

I. On commence par revenir à l'exponentielle réelle et à son équation fonctionnelle.

1°) Pour tout nombre réel t, on pose $r(t) = \frac{3}{4}\max\{0; 1 - t^2\}$. Tracer le graphe de cette fonction et calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} r(t)\,\mathrm{d}t$.

2°) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $r_k(t) = kr(kt)$. Tracer le graphe de r_{10} et calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} r_k(t)\,\mathrm{d}t$.

3°) Prouver que, pour toute fonction f continue et à valeurs réelles sur $\mathbf{R}$, la fonction $f * r_k : t \mapsto \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(s)r_k(t-s)\,\mathrm{d}s$ est de classe C^1 et que $\displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f(t)r_k(t)\,\mathrm{d}t = f(0)$.

4°) Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$ à valeurs réelles, continue de valeur 1 en 0 et telle que pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbf{R}$, on ait : $f(t_1 + t_2) = f(t_1)f(t_2)$. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier. Calculer $\int_{\mathbf{R}} f(s)r_k(t-s)\,\mathrm{d}s$ et en déduire que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, puis qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $f(t) = \exp(at)$.

II. Soit A une algèbre de Banach avec élément neutre e et soit $t \mapsto x(t)$ une application de $\mathbf{R}$ dans A. On se donne $y \in A$. On dit que x est *dérivable* en t et a pour dérivée y en t, si dans l'espace de Banach A, on a la convergence :

$$y = \lim_{h\in\mathbf{R}^\times\to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}.$$

1°) Étudier la dérivée de la somme et du produit de deux fonctions dérivables.

2°) Si $x(t)$ est dérivable de dérivée nulle, que peut-on dire de x ? On pourra penser à utiliser Hahn-Banach ou un de ses corollaires.

3°) Montrer que si $t \mapsto y(t)$ est une fonction continue à valeurs dans A, alors la fonction

$$t \mapsto \vec{\int_0^t} y(s)\,\mathrm{d}s = \vec{\int_{[0;t]}} y(s)\,\mathrm{d}s$$

est dérivable de dérivée y.

4°) Soit $a \in A$. Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \exp(ta) = e + \frac{t}{1!}a + \cdots + \frac{t^n}{n!}a^n + \ldots$ d'abord pour $t = 0$ puis pour t quelconque dans $\mathbf{R}$.

5°) Soit $t \mapsto x(t)$ une fonction à valeurs dans A, dérivable pour tout $t \in \mathbf{R}$, telle que $x(0) = e$ et que pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbf{R}$, on ait : $x(t_1 + t_2) = x(t_1)x(t_2)$. On pose $x'(0) = a$. Montrer que $x(t) = \exp(ta)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

6°) Soit $t \mapsto x(t)$ une fonction à valeurs dans A telle que $x(0) = e$ et que pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbf{R}$, on ait : $x(t_1 + t_2) = x(t_1)x(t_2)$. On suppose seulement x continue en 0. Montrer que x est continue sur $\mathbf{R}$, puis que pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction $t \mapsto \vec{\int}_{\mathbf{R}} x(s) r_k(t-s)\,\mathrm{d}s$ est dérivable.

7°) Montrer que $\lim_{k\to\infty} \vec{\int}_{\mathbf{R}} x(t) r_k(t)\,\mathrm{d}t = e$, et en déduire que pour que k assez grand $\vec{\int}_{\mathbf{R}} x(t) r_k(t)\,\mathrm{d}t$ est inversible dans A.

8°) Montrer enfin que x est dérivable sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe $a \in A$ tel que $x(t) = \exp(ta)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.

III. Ici A est l'algèbre $M_n(\mathbf{C})$ des matrices carrées de taille n et à coefficients complexes, munie de la norme subordonnée au produit scalaire hermitien canonique de $\mathbf{C}^n$.

1°) On fixe $x \in M_n(\mathbf{C})$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$ on pose $\Psi(t) = \det\bigl(\exp(tx)\bigr)$. Calculer $\Psi(t_1 + t_2)$ et en déduire que $\Psi(t) = \exp\bigl(tc(x)\bigr)$, où $c(x)$ est une constante complexe. Prouver la relation :

$$\det\bigl(\exp(x)\bigr) = \exp\bigl(\operatorname{tr}(x)\bigr).$$

2°) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur x et sur sa matrice adjointe x^* pour que la matrice $\exp(tx)$ soit unitaire pour tout $t \in \mathbf{R}$.

IV. On munit $\mathbf{R}^4$ de la forme bilinéaire

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4,$$

où l'on utilise les coordonnées canoniques x_i et y_i des vecteurs x et y respectivement. On dit qu'une matrice $U \in M_4(\mathbf{R})$ appartient au *groupe de Lorentz* si, quels que soient $x, y \in \mathbf{R}^4$ on a : $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$. Soit J la matrice diagonale dont les trois premiers coeffcients diagonaux valent 1 et le dernier -1.

1°) Montrer que U est dans le groupe de Lorentz si et seulement si $U^*J = JU^{-1}$ où U^* désigne la matrice transposée de U.

2°) Soit $A \in M_4(\mathbf{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A et A^* pour que la matrice $\exp(tA)$ soit dans le groupe de Lorentz pour tout $t \in \mathbf{R}$.

3°) Appelons *algèbre de Lie* du groupe de Lorentz l'ensemble de ces matrices. Montrer que si A et B sont dans cette algèbre de Lie, alors il en est de même pour $A+B$ et $[A, B] = AB-BA$.

V. Soit H un sous-groupe fermé du groupe G des inversibles d'une algèbre de Banach avec unité e. On appelle *algèbre de Lie* de H l'ensemble $L(H)$ des $x \in A$ tels que $\exp(tx)$ soit dans H pour tout $t \in \mathbf{R}$.

1°) Montrer que $L(H)$ est un sous-espace vectoriel de A.

2°) Montrer que $L(H)$ est stable par la prise de crochet $[\cdot,\cdot]$, autrement dit que pour tous $x, y \in L(H)$ on a : $[x, y] = xy - yx \in L(H)$.