MAT 452 **2018**

Analyse fonctionnelle
Devoir à la maison

Devoir à rendre pour le :

— vendredi 25 mai, en amphi

Exercice.

Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et soit T un opérateur de H dans lui-même tel que $\langle x, Tx'\rangle = \langle Tx, x'\rangle$ pour tous $x, x' \in H$. Prouver que T est borné.

Exercice.

Dans $\mathbf{R}^n$, soit A un ensemble convexe, compact et d'intérieur A° non vide. Une *corde* tracée dans A est un segment intersectant A° et dont les extrémités sont des points de la frontière $\mathrm{Fr}(A) = A \setminus A^\circ$.

1°) Justifier que si $[u; v]$ est une corde de A, le segment $]u; v[$ est contenu dans A°.

2°) Montrer qu'il existe au moins un point $z \in A^\circ$ tel que toute corde $[u; v]$ de A passant par z vérifie l'inégalité

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{uz}{zv} \leqslant n.$$

Indication : les z cherchés sont dans l'intersection des images A_u de A par les homothéties de rapport $\frac{n}{n+1}$ et de centre u, quand u parcourt $\mathrm{Fr}(A)$; voir que $A_u = \frac{1}{n+1}u + \frac{n}{n+1}A$, et appliquer aux A_u le corollaire topologique du théorème de Helly.

3° Soit A un simplexe de $\mathbf{R}^n$: c'est par définition l'enveloppe convexe (i.e. l'ensemble des barycentres à coefficients $\geqslant 0$) de $\{0; x_1; x_2; \dots x_n\}$ où les x_i forment une base de $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'alors z est unique et qu'il est l'isobarycentre des sommets de A, et que dans ce cas les bornes n et $\frac{1}{n}$ de la double inégalité sont atteintes.

Problème.

Dans le plan complexe $\mathbf{C}$, on pose $z = x + \mathrm{i}y$ où $x, y \in \mathbf{R}$ et $\mathrm{i}^2 = -1$. Soit U le disque unité ouvert, formé des nombres complexes z tels que $|z| < 1$. Soit E l'espace vectoriel des fonctions f holomorphes dans U telles qu'en outre

$$\iint_U |f(z)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty.$$

On munit E du produit scalaire

$$(f_1|f_2) = \frac{1}{2\pi} \iint_U f_1(z)\overline{f_2(z)} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

et on pose $\| f \| = \sqrt{(f|f)}$.

1°) Soit $f \in E$ et soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ son développement de Taylor à l'origine. Soit $r \in [0;1[$; on pose :

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{\mathrm{i}\theta})|^2 \, \mathrm{d}\theta.$$

a) En utilisant la formule de Parseval, exprimer $I(r)$ en fonction de r et des a_n.

b) Montrer que $\| f \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2n+2}$.

2°) Soit $r_0 \in [0;1[$; on suppose que $|z| \leqslant r_0$.

a) Montrer que si $r_0 < r < 1$, pour $f \in E$ on a : $|f(z)|^2 \leqslant \frac{r^2}{(r-r_0)^2} I(r)$.

b) Si, plus précisément, on a $\frac{1+r_0}{2} \leqslant r < 1$, montrer que $|f(z)|^2 \leqslant \frac{4}{(1-r_0)^2} r I(r)$.

c) En déduire que $|f(z)| \leqslant \left(\frac{2}{1-r_0}\right)^{\frac{3}{2}} \| f \|$.

3°) Soit $(f_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $(E, \| - \|)$.

a) Montrer que $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur tout compact de U vers une fonction holomorphe.

b) En déduire que l'espace $(E, \| - \|)$ est un espace de Hilbert. On rappelle que l'espace $\mathrm{L}^2(U, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ est complet, et que si une suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers g au sens de la norme de cet espace, on peut en extraire une suite qui converge ponctuellement presque partout vers g.

4°) Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{C}$. Démontrer que l'espace des fonctions f holomorphes dans Ω telles que

$$(\| f \|_\Omega)^2 = \iint_\Omega |f(z)|^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$$

est complet pour la norme $\| - \|_\Omega$.

5°) On revient au disque U.

a) Montrer que pour tout $w \in U$ l'évaluation au point w, à savoir $f \mapsto f(w)$, est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert E.

b) En déduire qu'il existe une fonction de deux variables $K : U \times U \to \mathbf{C}$ telle que, quel que soit $w \in U$, on ait :

(i) la fonction $z \mapsto K(z,w)$ appartient à E ;

(ii) pour toute $f \in E$, on a :

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \iint_U f(z) \overline{K(z,w)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On dit que K est le *noyau reproduisant* de l'espace de Hilbert E.

c) Montrer que pour toute base orthonormée $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ de E, on a, quels que soient $z \in U$ et $w \in U$, la formule :

$$K(z,w) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) \overline{\varphi_n(w)}.$$

d) Montrer que $\varphi_n : z \mapsto \sqrt{2n+2}z^n$ définit une base orthonormée $(\varphi_n)_{n\geqslant 0}$ de E. En déduire la formule pour le noyau reproduisant :

$$K(z,w) = \frac{2}{(1-z\overline{w})^2}.$$

6°) Soit p un nombre réel tel que $1 \leqslant p < +\infty$.

a) Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de l'espace de suites complexes

$$\ell^p(\mathbf{N}) = \{(x_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}.$$

Montrer que la fonction $z \mapsto f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ appartient à l'espace E. On désigne par E_p le sous-espace vectoriel des fonctions ainsi obtenues.

b) Est-ce que E est réunion des E_p quand p parcourt $[1;+\infty[$?

c) Vérifier que toute fonction $f \in E_1$ est bornée sur U.

d) Exhiber une fonction non bornée sur U qui appartient à tous les sous-espaces E_p tels que $p \in]1;+\infty[$.