MAT 452 **2018**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle
Contrôle final
Vendredi 8 juin 2018, 14h-17h

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés. Il est inutile de redémontrer les assertions prouvées dans les notes de cours.

Tous les espaces de Banach de ce sujet, notamment les espaces de Hilbert et les algèbres de Banach, sont définis sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour tout espace de Banach X ci-dessous, la notation $\overline{B_X}$ désigne la boule unité fermée de X.

Exercice. Soient X, Y et Z des espaces de Banach et soient $A : X \to Y$ et $B : Z \to Y$ des opérateurs bornés. On suppose que A est injectif. Démontrer qu'on a l'inclusion des images $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ si, et seulement si, il existe un opérateur borné $T : Z \to X$ tel que $B = A \circ T$.

Exercice. Soit A une algèbre de Banach unitaire de norme notée $\| \cdot \|_A$.

1°) Démontrer que pour tous x et y dans A, les éléments xy et yx ont même rayon spectral.

2°) On suppose A commutative ; soit I un idéal fermé de A. Justifier que la norme quotient $\| \cdot \|_{A/I}$ induite par $\| \cdot \|_A$ sur A/I fait de ce quotient A/I une algèbre de Banach. On rappelle que cette norme quotient $\| \cdot \|_{A/I}$ est définie par $\| x + I \|_{A/I} = \inf_{z \in I} \| x + z \|$. Justifier que la norme quotient induite par $\| \cdot \|_A$ sur A/I fait de ce quotient A/I une algèbre de Banach.

3°) Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On note $B(H)$ l'espace des opérateurs bornés de H dans lui-même et $\mathcal{LK}(H)$ celui des opérateurs compacts de H dans lui-même. Justifier que $B(H)/\mathcal{LK}(H)$ est une algèbre de Banach unitaire, qu'on appelle l'*algèbre de Calkin* de H. Pourquoi supposer H de dimension infinie dans cette question ?

Problème. Ce problème porte sur les opérateurs compacts. Dans la partie I le cadre est essentiellement celui des espaces de Banach, alors que la partie II utilise des propriétés des espaces de Hilbert.

I. Soient E et F des espaces de Banach. On note E' (respectivement F') le dual topologique de E (respectivement de F), c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E (respectivement sur F) à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1°) Rappeler pourquoi E', muni de la norme d'opérateur, est un espace de Banach.

2°) On se donne un opérateur borné $T : E \to F$. Justifier que l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ définit un opérateur borné de F' dans E', qu'on note T^*.

On suppose, jusqu'à 6°) inclus, que T est un opérateur compact.

3°) Justifier l'existence d'une partie compacte K de F contenant $T(\overline{B_E})$ et pour laquelle l'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi|_K$ définit un opérateur borné $V : F' \to \mathcal{C}(K, \mathbf{C})$. Ici, $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$ est l'espace des fonctions continues à valeurs complexes et on le munit de la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme.

4°) Prouver que $||| T^* \varphi ||| \leqslant \| V(\varphi) \|_\infty$ pour toute forme linéaire $\varphi \in F'$.

5°) Justifier que l'adhérence de $V(\overline{B_{F'}})$ est compacte dans $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$.

6°) Prouver que T^* est un opérateur compact de F' dans E'.

7°) Réciproquement, prouver que si un opérateur borné $T : E \to F$ est tel que T^* est compact, alors T est lui-même compact.

8°) Dans le cas où $E = F$ est un espace de Hilbert, justifier la compatibilité de la notation précédente T^* avec celle de l'adjoint de T.

II. On se donne désormais un espace de Hilbert H, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Dans ce cadre, on dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *converge faiblement* vers $x \in H$ si pour tout $z \in H$ on a : $\lim_{n \to \infty} \langle x_n | z \rangle = \langle x | z \rangle$. On veut démontrer le résultat suivant.

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$ et soit T un opérateur borné de H dans lui-même. On note $\overline{B_H}$ la boule unité fermée de H. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs continus de rang fini.*

(ii) *L'opérateur T est compact.*

(iii) *L'ensemble $T(\overline{B_H})$ est une partie compacte de H.*

(iv) *Pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de H qui converge faiblement vers 0, on a : $\lim_{n \to \infty} \| T x_n \| = 0$.*

(v) *Pour tout système orthonormal $(e_n)_{n \geqslant 0}$ dans H, on a : $\lim_{n \to \infty} \| T e_n \| = 0$.*

Pour la résolution des questions qui suivent, on pourra admettre que $\overline{B_H}$ est faiblement compacte, ce qui implique que toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente. Soient donc H, T et $\overline{B_H}$ comme dans l'énoncé ci-dessus.

1°) Justifier l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

2°) Justifier l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). On pourra utiliser la compacité faible de $\overline{B_H}$.

3°) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de H qui converge faiblement vers 0. Démontrer que la suite numérique $(\| x_n \|)_{n \geqslant 0}$ est bornée.

4°) En déduire l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv).

5°) Justifier l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v).

6°) On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que T soit à distance $> \varepsilon$ de tout opérateur de rang fini, où la distance est celle associée à la norme d'opérateur $||| \cdot |||$. Justifier qu'il existe un vecteur e_0 de norme 1 tel que $\| T e_0 \| > \varepsilon$.

7°) Soit L un sous-espace de dimension finie de H et soit P_L le projecteur orthogonal de H sur L. Décrire l'image de $\mathrm{id}_H - P_L$ en fonction de L.

8°) Sous l'hypothèse de 6°), construire un système orthonormal $(e_n)_{n \geqslant 0}$ dans H tel que $\| T e_n \| > \varepsilon$ pour tout indice $n \geqslant 0$ et achever la preuve du théorème.

Le thème général d'analyse fonctionnelle du théorème ci-dessus est celui de la *propriété d'approximation* (des opérateurs compacts par les opérateurs de rang fini).