MAT 452 **2018**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle
Contrôle final
Vendredi 8 juin 2018, 14h-17h

> **Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.
>
> Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés. Il est inutile de redémontrer les assertions prouvées dans les notes de cours.

Tous les espaces de Banach de ce sujet, notamment les espaces de Hilbert et les algèbres de Banach, sont définis sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour tout espace de Banach ci-dessous, la notation $\overline{B_X}$ désigne la boule unité fermée de X.

Exercice. Soient X, Y et Z des espaces de Banach et soient $A : X \to Y$ et $B : Z \to Y$ des opérateurs bornés. On suppose que A est injectif. Démontrer qu'on a l'inclusion des images $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ si, et seulement si, il existe un opérateur borné $T : Z \to X$ tel que $B = A \circ T$.

L'implication $\Leftarrow$ est facile : sous l'existence de T comme ci-dessus, pour $y \in \mathrm{Im}(B)$ il existe $z \in Z$ tel que $y = B(z)$ et donc $y = A(Tz)$, soit $y \in \mathrm{Im}(A)$. On démontre désormais l'implication réciproque en supposant $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$. L'injectivité de A permet par restriction de définir une application linéaire bijective $A|_A^{\mathrm{Im}(A)}$ de A sur $\mathrm{Im}(A)$. L'inclusion $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ permet donc de définir une application linéaire $T = (A|_A^{\mathrm{Im}(A)})^{-1} \circ B$ qui vérifie par construction $B = A \circ T$. Il reste à vérifier la continuité de T et on le fait au moyen du théorème du graphe fermé. Soit $(z_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge dans Z, disons vers z, et telle que $(Tz_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans X, disons vers x. Il s'agit de voir que $x = Tz$. Mais par continuité de A et B, on a : $Ax = \lim_{n\to\infty} A(Tz_n) = \lim_{n\to\infty} Bz_n = Bz$, et donc $x = Tz$.

Exercice. Soit A une algèbre de Banach unitaire de norme notée $\|\cdot\|_A$.

1°) Démontrer que pour tous x et y dans A, les éléments xy et yx ont même rayon spectral.

Pour $n \geqslant 1$, on a par sous-multiplicativité :

$$\|(xy)^n\|_A \quad \leqslant \quad \|x\|_A \cdot \|(yx)^{n-1}\|_A \cdot \|y\|_A \,.$$

On applique la formule du rayon spectral : en prenant la racine n-ième de cette inégalité et en faisant $n \to \infty$, on obtient : $\rho(xy) \leqslant \rho(yx)$. L'égalité provient de l'interversion de x et de y.

2°) On suppose A commutative ; soit I un idéal fermé de A. Justifier que la norme quotient $\|\cdot\|_{A/I}$ induite par $\|\cdot\|_A$ sur A/I fait de ce quotient A/I une algèbre de Banach. On rappelle que cette norme quotient $\|\cdot\|_{A/I}$ est définie par $\|x+I\|_{A/I} = \inf_{z\in I} \|x+z\|$.

En consultant les notes de cours, on voit que les seules assertions à démontrer sont la complétude et la sous-multiplicativité de la norme quotient.

Pour la complétude, on vérifie que toute série normalement convergente est convergente. Soit donc $\sum_{n\geqslant 0}\xi_n$ une série normalement convergente dans A/I. Pour tout entier $n\geqslant 0$ on peut trouver un représentant x_n de ξ_n tel que $\| x_n \|_A \leqslant 2 \| \xi_n \|_{A/I}$; la série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est donc elle aussi normalement convergente, donc convergente dans A puisque A est complet. Finalement, la série $\sum_{n\geqslant 0}\xi_n$, image par l'application linéaire $\pi : A \to A/I$ continue de norme 1 de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} x_n$, est convergente dans A/I.

Pour la sous-multiplicativité, on part de $x+I, y+I \in A/I$ et on se donne $\varepsilon > 0$. Il existe x' et y' tels que $\| x' \|_A \leqslant \| x+I \|_{A/I} + \varepsilon$ et $\| y' \|_A \leqslant \| y+I \|_{A/I} + \varepsilon$. Alors :

$$\| (x+I)(y+I) \|_{A/I} = \| x'y'+I \|_{A/I} \leqslant \| x'y' \|_A \leqslant \| x' \|_A \cdot \| y' \|_A \leqslant \| x+I \|_{A/I} \cdot \| y+I \|_{A/I} + \eta,$$

où $\eta = \varepsilon(\| x+I \|_{A/I} + \| y+I \|_{A/I} + \varepsilon)$ tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$.

3°) Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. On note $B(H)$ l'espace des opérateurs bornés de H dans lui-même et $\mathcal{LK}(H)$ celui des opérateurs compacts de H dans lui-même. Justifier que $B(H)/\mathcal{LK}(H)$ est une algèbre de Banach unitaire, qu'on appelle l'*algèbre de Calkin* de H. Pourquoi supposer H de dimension infinie dans cette question ?

On sait que $B(H)$ est une algèbre de Banach, mais la différence avec la question précédente est qu'elle est non commutative. Ceci dit, il suffit de voir que le cours prouve que $\mathcal{LK}(H)$ est un idéal à droite et à gauche ; dès lors, les formules définissant la norme quotient restent valides et lui confèrent les mêmes propriétés que celles prouvées dans le cours et dans la question précédente : l'algèbre de Calkin de H est une algèbre de Banach unitaire. Si H est de dimension finie, tout opérateur est de rang fini, donc compact, et donc le quotient $B(H)/\mathcal{LK}(H)$ est réduit à $\{0\}$, non unitaire.

Problème. Ce problème porte sur les opérateurs compacts. Dans la partie I le cadre est essentiellement celui des espaces de Banach, alors que la partie II utilise des propriétés des espaces de Hilbert.

I. Soient E et F des espaces de Banach. On note E' (respectivement F') le dual topologique de E (respectivement de F), c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur E (respectivement sur F) à valeurs dans $\mathbf{C}$.

1°) Rappeler pourquoi E', muni de la norme d'opérateur, est un espace de Banach.

Les applications linéaires continues à valeurs dans un espace de Banach forment un espace de Banach pour la norme d'opérateur (et $\mathbf{C}$ est complet !).

2°) On se donne un opérateur borné $T : E \to F$. Justifier que l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ T$ définit un opérateur borné de F' dans E', qu'on note T^*.

La linéarité est évidente car pour tous $\lambda, \lambda' \in \mathbf{C}$ et $\varphi, \varphi' \in F'$, on a :

$$T^*(\lambda\varphi + \lambda'\varphi') = (\lambda\varphi + \lambda'\varphi') \circ T = \lambda\varphi \circ T + \lambda'\varphi' \circ T = \lambda(T^*\varphi) + \lambda'(T^*\varphi').$$

Soit maintenant φ une forme linéaire sur F dont la norme d'opérateur est $\leqslant 1$. On a pour tout $x \in E$:

$$|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leqslant \| Tx \| \leqslant |||T||| \cdot \| x \|_E,$$

ce qui prouve que la norme (d'opérateur) de la forme linéaire $T^*\varphi$ est $\leqslant |||T|||$. Comme φ était arbitraire de norme (d'opérateur) $\leqslant 1$, on en déduit que T^* est borné, avec $|||T^*||| \leqslant |||T|||$.

On suppose, jusqu'à 6°) inclus, que T est un opérateur compact.

3°) Justifier l'existence d'une partie compacte K de F contenant $T(\overline{B_E})$ et pour laquelle l'application de restriction $\varphi \mapsto \varphi|_K$ définit un opérateur borné $V : F' \to \mathcal{C}(K, \mathbf{C})$. Ici, $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$ est l'espace des fonctions continues à valeurs complexes et on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$ de la convergence uniforme.

Par compacité de T, la partie $T(\overline{B_E})$ est relativement compacte dans F et donc il existe K compact dans F contenant $T(\overline{B_E})$. La linéarité de l'application de restriction $V : \varphi \mapsto \varphi|_K$ est évidente. Il reste à vérifier que V est continue. Soit $\varphi \in F'$. On a :

$$\| V(\varphi) \|_\infty = \sup_{y \in K} |\varphi(y)| \leqslant |||\varphi||| \cdot \sup_{y \in K} \| y \|_F \leqslant M \cdot |||\varphi|||,$$

avec $M = \sup_{y \in K} \| y \|_F$. Finalement : $|||\varphi||| \leqslant M$.

4°) Prouver que $||| T^* \varphi ||| \leqslant \| V(\varphi) \|_\infty$ pour toute forme linéaire $\varphi \in F'$.

Soit $x \in E$ tel que $\| x \|_E \leqslant 1$. On calcule : $|(T^*\varphi)(x)| = |\varphi(Tx)| \leqslant \| V(\varphi) \|_\infty$, et on passe au sup avec x comme ci-dessus.

5°) Justifier que l'adhérence de $V(\overline{B_{F'}})$ est compacte dans $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$.

On utilise le théorème d'Ascoli. Si $\varphi \in \overline{B_{F'}}$, on a pour tous $y, y' \in Y$:

$$|V(\varphi)(y') - V(\varphi)(y)| = |\varphi(y') - \varphi(y)| = |\varphi(y' - y)| \leqslant \| y' - y \|_F,$$

ce qui prouve que $V(\overline{B_{F'}})$ est formée d'applications 1-lipschitziennes : c'est la condition d'équicontinuité qui, avec le fait que $V(\overline{B_{F'}})$ est contenu dans la boule centrée à l'origine et de rayon $|||V||| \leqslant M$ de $\mathcal{C}(K, \mathbf{C})$, permet de conclure.

6°) Prouver que T^* est un opérateur compact de F' dans E'.

Soit $(\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans $\overline{B_{F'}}$; il s'agit de voir que $(T^*\varphi_n)_{n \geqslant 0}$ admet une sous-suite de Cauchy dans E'. Mais $\big(V(\varphi_n)\big)_{n \geqslant 0}$ est une suite dans le compact $\overline{V(\overline{B_{F'}})}$, donc admet une sous-suite convergente, disons $\big(V(\varphi_{n_k})\big)_{k \geqslant 0}$. Cette sous-suite est de Cauchy et 4°) implique que la suite $(T^*\varphi_{n_k})_{k \geqslant 0}$ est de Cauchy aussi.

7°) Réciproquement, prouver que si un opérateur borné $T : E \to F$ est tel que T^* est compact, alors T est lui-même compact.

Formellement, on peut dire déjà que ce qui précède implique que $T^{**} : E'' \to F''$ est compact. En outre, dans le cours, on a mis en évidence (grâce à Hahn-Banach) des plongements isométriques $\iota_E : E \to E''; x \mapsto \mathrm{ev}_x$ et $\iota_F : F \to F''; y \mapsto \mathrm{ev}_y$, où ev_x est le morphisme d'évaluation en $x \in E$ des formes linéaires sur E et ev_y est le morphisme d'évaluation en $y \in F$ des formes linéaires sur F. Ces plongements isométriques sont compatibles à T et T^{**}, dans le sens où pour toute $\varphi \in F'$ on a :

$$T^{**}\big(\iota_E(x)\big)(\varphi) = (\mathrm{ev}_x \circ T^*)(\varphi) = \mathrm{ev}_x(\varphi \circ T) = \varphi(Tx) = \mathrm{ev}_{Tx}(\varphi) = \iota_F(Tx)(\varphi),$$

soit $T^{**} \circ \iota_E = \iota_F \circ T$. On peut donc voir T^{**} comme un prolongement de l'opérateur compact T et conclure à la compacité de T.

8°) Dans le cas où $E = F$ est un espace de Hilbert, justifier la compatibilité de la notation précédente T^* avec celle de l'adjoint de T.

C'est le théorème de représentation de Riesz (cas hilbertien), qui permet de voir toute forme linéaire continue dans H' sous la forme $\varphi_v = \langle \cdot | v \rangle$ pour $v \in H$ uniquement déterminé par φ, et de norme égale à celle de φ. On identifie ainsi isométriquement H et son dual topologique H' et on a, par définition de l'adjoint : $T^*\varphi_v = \varphi_{T^*v}$ (le premier T^* est celui du problème, le second est l'adjoint hibertien classique), comme on peut le vérifier par test contre chaque vecteur de H.

II. On se donne désormais un espace de Hilbert H, dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot | \cdot \rangle$. Dans ce cadre, on dit qu'une suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ *converge faiblement* vers $x \in H$ si pour tout $z \in H$ on a : $\lim_{n \to \infty} \langle x_n | z \rangle = \langle x | z \rangle$. On veut démontrer le résultat suivant.

Théorème. *Soit H un espace de Hilbert sur $\mathbf{C}$ et soit T un opérateur borné de H dans lui-même. On note $\overline{B_H}$ la boule unité fermée de H. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *L'opérateur T est limite d'une suite d'opérateurs continus de rang fini.*

(ii) *L'opérateur T est compact.*

(iii) *L'ensemble $T(\overline{B_H})$ est une partie compacte de H.*

(iv) *Pour toute suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ de H qui converge faiblement vers 0, on a : $\lim_{n \to \infty} \| T x_n \| = 0$.*

(v) *Pour tout système orthonormal $(e_n)_{n \geqslant 0}$ dans H, on a : $\lim_{n \to \infty} \| T e_n \| = 0$.*

Pour la résolution des questions qui suivent, on pourra admettre que $\overline{B_H}$ est faiblement compacte, ce qui implique que toute suite bornée dans H admet une sous-suite faiblement convergente. Soient donc H, T et $\overline{B_H}$ comme dans l'énoncé ci-dessus.

1°) Justifier l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii).

Le cours dit que $\mathcal{LK}(H)$ est fermé pour la topologie de la norme d'opérateur et Borel-Lebesgue dit que les opérateurs de rang fini sont compacts.

2°) Justifier l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii). On pourra utiliser la compacité faible de $\overline{B_H}$.

On se donne une suite arbitraire dans $T(\overline{B_H})$, disons $(Tx_n)_{n \geqslant 0}$ avec $x_n \in \overline{B_H}$ pour tout indice $n \geqslant 0$. Comme T est compact, il existe une extraction φ telle que $(Tx_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ converge dans H : notons y la limite. Il s'agit de voir que y admet un antécédent dans $\overline{B_H}$. Par compacité faible de $\overline{B_H}$, il existe une extraction ψ telle que $(Tx_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \geqslant 0}$ converge faiblement vers une limite $x \in \overline{B_H}$. Prouvons que $y = Tx$ par un raisonnement d'orthogonalité ; pour tout $z \in H$, on a : $\langle Tx - y | z \rangle = \langle x | T^* z \rangle - \langle y | z \rangle$. Mais :

$$\langle y | z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Tx_{\varphi \circ \psi(n)} | z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_{\varphi \circ \psi(n)} | T^* z \rangle = \langle x | T^* z \rangle,$$

prouvant que $y - Tx$ est nul puisqu'orthogonal à H.

3°) Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de H qui converge faiblement vers 0. Démontrer que la suite numérique $(\| x_n \|)_{n \geqslant 0}$ est bornée.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de H qui converge faiblement vers 0. On considère la suite des formes linéaires $T_n = \langle \cdot | x_n \rangle$. Alors pour chaque $n \geqslant 0$, la norme d'opérateur de T_n vaut $\| x_n \|$ et, par définition de la convergence faible, pour tout $v \in H$ la suite $(T_n v)_{n \geqslant 0}$ tend vers 0, donc est bornée. Il découle donc du théorème de Banach-Steinhaus que $\sup_{n \geqslant 0} |||T_n||| < +\infty$, autrement dit que $(\| x_n \|)_{n \geqslant 0}$ est bornée.

4°) En déduire l'implication (iii) $\Rightarrow$ (iv).

On conserve les notations précédentes. Par 3°) la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée, et grâce à (iii) (quitte à normaliser) on sait que la suite $(Tx_n)_{n \geqslant 0}$ a des valeurs d'adhérence pour la topologie de la norme ; il suffit de voir que 0 est la seule possible. Soit $y = \lim_{n \to \infty} Tx_{\varphi(n)}$ une telle valeur d'adhérence. Alors pour tout $z \in H$, on a :

$$\langle y | z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle Tx_{\varphi(n)} | z \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle x_{\varphi(n)} | T^* z \rangle = 0,$$

la dernière égalité provenant de la convergence faible vers 0.

5°) Justifier l'implication (iv) $\Rightarrow$ (v).

Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ un système orthonormal dans H. Alors pour tout $z \in H$, l'identité de Parseval $\sum_{n\geqslant 0} |\langle z|e_n\rangle|^2 = \| z \|^2 < +\infty$ montre que le terme général $|\langle z|e_n\rangle|^2$, et donc $|\langle z|e_n\rangle|$, tend vers 0. Comme $z \in H$ est quelconque dans le raisonnement, c'est la convergence faible cherchée.

6°) On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que T soit à distance $> \varepsilon$ de tout opérateur de rang fini, où la distance est celle associée à la norme d'opérateur $||| \cdot |||$. Justifier qu'il existe un vecteur e_0 de norme 1 tel que $\| Te_0 \| > \varepsilon$.

Il suffit de dire que l'opérateur nul est de rang fini.

7°) Soit L un sous-espace de dimension finie de H et soit P_L le projecteur orthogonal de H sur L. Décrire l'image de $\mathrm{id}_H - P_L$ en fonction de L.

Un sous-espace de dimension finie dans H est fermé, donc on a la somme directe orthogonale : $H = L \oplus L^\perp$, ce qui implique que $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - P_L) = L^\perp$.

8°) Sous l'hypothèse de 6°), construire un système orthonormal $(e_n)_{n\geqslant 0}$ dans H tel que $\| Te_n \| > \varepsilon$ pour tout indice $n \geqslant 0$ et achever la preuve du théorème.

On fait cette construction par récurrence. Le premier vecteur a été obtenu deux questions auparavant. On suppose les e_i construits jusqu'à l'indice n et on note P_n la projection orthogonale sur l'espace vectoriel engendré par $e_0, e_1, \dots e_n$: c'est un opérateur de rang fini, donc $T \circ P_n$ l'est aussi. Par hypothèse on a : $|||T - T \circ P_n||| > \varepsilon$, et il existe donc $y_{n+1} \in H$ tel que

$$\| (T \circ (\mathrm{id}_H - P_n))\, y_{n+1} \| = \| (T - T \circ P_n) y_{n+1} \| > \varepsilon \, \| y_{n+1} \| \geqslant \varepsilon \, \| (\mathrm{id}_H - P_n) y_{n+1} \| > 0.$$

On finit la justification de la construction par récurrence en invoquant 7°) et en posant $e_{n+1} = \dfrac{1}{\| (\mathrm{id}_H - P_n) y_{n+1} \|} (\mathrm{id}_H - P_n) y_{n+1}$. Cette construction permet de prouver la contraposée de l'implication (v) $\Rightarrow$ (i), et achève ainsi la preuve du théorème.

Le thème général d'analyse fonctionnelle du théorème ci-dessus est celui de la *propriété d'approximation* (des opérateurs compacts par les opérateurs de rang fini).