MAT 452 **2017**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle

Examen de rattrapage

Mardi 5 septembre 2017, 9h-12h

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice. Soit A une algèbre de Banach commutative, pour laquelle on reprend les notations du cours. Prouver que les quatre ensembles suivants sont égaux.
(i) Le noyau de $\mathcal{G}$ dans A.
(ii) L'intersection des idéaux maximaux de A.
(iii) L'ensemble des $x \in A$ tels que $\mathrm{sp}(x) = \{0\}$.
(iv) L'ensemble des $x \in A$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = 0$.
Cette partie s'appelle le *radical* de A, noté $\mathrm{rad}(A)$; donner un exemple où $\mathrm{rad}(A) \neq \{0\}$.

Problème.

I. Dans cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ muni d'un produit scalaire qu'on note $(x, y) \mapsto (x|y)$, de la norme $\| x \| = \sqrt{(x|x)}$ et de la distance $d(x, y) = \| x - y \|$.

1°) Soit H un sous-espace de dimension finie n de E. Soit $e_1, e_2, \dots e_n$ une base orthonormée dans H.

a) Pour tout $x \in E$ et tout $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$, montrer que

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - \sum_{i=1}^n |c_i|^2 + \sum_{i=1}^n |\lambda_i - c_i|^2,$$

où $c_i = (x|e_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

b) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un $x^* \in H$ et un seul tel que

$$d(x, x^*) = d(x, H) = \inf_{y \in H} d(x, y)$$

et que, d'autre part, x^* est l'unique élément de H tel que $(x - x^*|y) = 0$ pour tout $y \in H$.

2°) Plus généralement, soit A une partie convexe non vide de E. Supposons que l'espace métrique A est complet pour la distance de E restreinte à A. Si $x \in E$, on pose $\delta = \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$.

a) Montrer que, quels que soient $y, y' \in A$, on a :

$$\| y - y' \|^2 \leqslant 2 \| x - y \|^2 + 2 \| x - y' \|^2 - 4\delta^2.$$

b) Par définition de δ, il existe une suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ dans A telle que $\| x - y_n \|^2 \leqslant \delta^2 + \frac{1}{4n^2}$. Montrer que cette suite est de Cauchy.

c) En déduire que, pour tout $x \in E$, il existe un $x^* \in A$, et un seul, tel que

$$d(x, x^*) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

d) Montrer que cet x^* est l'unique élément de A tel que $(x - x^*|y - x^*) \leqslant 0$ pour tout $y \in A$. Préciser ce point quand A est un sous-espace vectoriel.

II. Dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0;1], \mathbf{R})$ muni de la norme $\| - \|_\infty$ de la convergence uniforme, on considère

$$H = \{g \in \mathcal{C}([0;1], \mathbf{R}) : \int_0^{\frac{1}{2}} g(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 1\}.$$

1°) Montrer que H est un hyperplan fermé de $\big(\mathcal{C}([0;1], \mathbf{R}), \| - \|_\infty\big)$. Calculer $\inf_{g\in H} d_\infty(0, g)$, et montrer que cette borne inférieure n'est atteinte par aucune fonction $g \in H$.

2°) Dans $\mathbf{R}^2$ normé par $\| (x, y) \|_\infty = \max\{|x|; |y|\}$, soit A la boule unité fermée, et soit $x = (0, 2)$. Montrer qu'il existe une infinité de $x^* \in A$ tels que $\| x - x^* \|_\infty = \inf_{y\in A} \| x - y \|_\infty$.

III. Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$, et H un sous-espace vectoriel de dimension finie.

1°) Soit $x \in E$. Montrer qu'il existe au moins un $x^* \in H$ tel que $\| x - x^* \| = \inf\limits_{y\in H} \| x - y \|$.

2°) Donner un exemple simple où x^* n'est pas unique.

On dira que E est *strictement normé* si $x \in E$, $y \in E$, $\| x + y \| = \| x \| + \| y \|$ entraîne que x et y sont collinéaires.

3°) Montrer que si E est strictement normé, pour tout $x \in E$ le point x^* de III.1°) est unique.

4°) Montrer que $\big(\mathcal{C}([0;1], \mathbf{R}), \| - \|_\infty\big)$ et $\big(\mathrm{L}^1([0;1], \mathrm{d}t), \| - \|_1\big)$ ne sont pas strictement normés.

5°) Montrer que sont strictement normés : les espaces vectoriels normés dont la norme est associée à un produit scalaire, ainsi que les espaces de Lebesgue $\big(\mathrm{L}^p([0;1], \mathrm{d}t), \| - \|_p\big)$ pour $p \in]1; +\infty[$.

6°) Montrer que si E est strictement normé, tout point de la sphère unité de E est extrémal pour la boule unité fermée de E.

7°) Soit A convexe non vide dans E strictement normé. Montrer que, pour tout $x \in E$, il existe au plus un $x^* \in A$ tel que $\| x - x^* \| = \inf\limits_{y\in A} \| x - y \|$.

IV. Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$. Soient x et y dans E. On dira que y est *quasi-orthogonal* à x si quel que soit $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\| x + \lambda y \| \geqslant \| x \| .$$

1°) Dans le cas où la norme de E est associée à un produit scalaire (i.e. E est un espace préhilbertien), montrer que la quasi-orthogonalité équivaut à l'orthogonalité.

2°) Dans les hypothèses et notations de III.1°) montrer que, pour tout $x^* \in H$ tel que $\| x - x^* \| = \inf_{y\in H} \| x - y \|$, tout $y \in H$ est quasi-orthogonal à $x - x^*$.

3°) Ici $E = \big(\mathcal{C}([0;1], \mathbf{R}), \| - \|_\infty\big)$. Soit $u \in E$ la fonction constante égale à 1 et soit $y \in E$ quelconque.

a) Montrer que pour que y soit quasi-orthogonale à u il faut et il suffit qu'il existe $a \in [0;1]$ tel que $y(a) = 0$.

b) Indiquer une condition nécessaire et suffisante simple, reliant les nombres $\sup_{t\in[0;1]} y(t)$ et $\inf_{t\in[0;1]} y(t)$, pour que u soit quasi-orthogonal à y.

4°) Ici $E = \big(\mathrm{L}^1([0;1], \mathrm{d}t), \| - \|_1\big)$. Soient A et B des parties de $[0;1]$ mesurables au sens de la mesure de Lebesgue, notée λ. Soient χ_A et χ_B les fonctions indicatrices associées. Montrer que χ_A est quasi-orthogonale à χ_B si et seulement si $\lambda(A \cap B) \leqslant \frac{1}{2}\lambda(A)$.