MAT 452 – Analyse Fonctionnelle (2016-17)

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soit S l'opérateur de décalage défini sur $\ell^2(\mathbb{N})$ par $S(\underline{x}) = (0, x_0, x_1, ...)$. On a déjà vu que le spectre de S est le disque unité fermé de $\mathbb{C}$. Montrer que S n'a pas de valeur propre et que le cercle unité est l'ensemble des valeurs propres généralisées de S.

Exercice 2. Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ et l'espace de Banach $E = \ell^p(\mathbb{Z})$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite bornée de nombres complexes et l'opérateur défini par $(x_n) \mapsto (y_n)$ avec $y_n = a_n x_n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.
1. Montrer que T est borné. Quelle est sa norme ?
2. Montrer que T est compact si et seulement si $|a_n| \to 0$.

Exercice 3. 1. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs tels que $a_n \to +\infty$ et soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert composé des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n\geqslant 0}$ telles que

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{n\geqslant 0} a_n |x_n|^2 < \infty.$$

Montrer que $\mathcal{H} \subset \ell^2$ et que l'injection est compacte.

2. Soit $V : [0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction continue strictement positive telle que $V(x) \to +\infty$ quand $x \to +\infty$. Soit $\mathcal{V}$ l'espace de Hilbert composé des fonctions $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(]0, +\infty[)$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = \int_0^\infty V(x)|f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Montrer que $\mathcal{V} \subset L^2(\mathbb{R})$. L'injection est-elle compacte ?

Exercice 4. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$. Rappeler pourquoi on a l'injection continue $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ lorsque $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$. Cette injection est-elle compacte ?

Exercice 5. Soit $T : E \mapsto F$ un opérateur compact, avec E et F des espaces de Banach. Montrer que l'image de T est fermée si et seulement si T est de rang fini.

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{C})$ et $K(x, y) = \min\{x; y\}$. Si $f \in E$, on pose :

$$(Tf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y = \int_0^x f(y) y \, \mathrm{d}y + x \int_x^1 f(y) \, \mathrm{d}y.$$

1. Montrer que, pour tout $f \in E$, $g = Tf$ est de classe C^2 sur $[0; 1]$, que $g''(x) = -f(x)$, et que $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E composé des $g \in E$ de classe C^2 telles que $g(0) = 0$ et $g'(1) = 0$. Montrer que T établit une bijection de E sur F. Préciser l'application $T^{-1} : F \to E$.
3. On munit E du produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(x)\overline{g(x)} \, \mathrm{d}x.$$

Montrer que $(Tf|g) = (f|Tg)$ et en déduire que les valeurs propres de T sont réelles positives.

4. Montrer que les valeurs propres de T sont les nombres $\lambda_n = (\frac{\pi}{2} + n\pi)^{-2}$ pour n entier $\geqslant 0$. Déterminer le sous-espace vectoriel $V_{\lambda_n} = \mathrm{Ker}(T - \lambda_n \mathrm{id}_E)$.

Exercice 7 (Opérateurs Hilbert-Schmidt)**.** On introduit une sous-algèbre particulière de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert séparable quelconque.

1. Soit A un opérateur borné sur $\mathcal{H}$. Soient (e_n) et (f_n) deux bases orthonormées quelconques de $\mathcal{H}$. Montrer l'égalité

$$\sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|^2 = \sum_{n,m\geqslant 1} |\langle f_m, Ae_n\rangle|^2 = \sum_{m\geqslant 1} \|A^* f_m\|^2 , \tag{1}$$

où les termes peuvent être finis ou infinis. En déduire en particulier que

$$\sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m\geqslant 1} \|Af_m\|^2 .$$

On appelle $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tels que les séries (1) sont finies (appelés *opérateurs Hilbert-Schmidt*), et on note $\|A\|^2_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} := \sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\|^2$ la norme associée.

2. Montrer que si $A \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$, alors A est compact.

3. Si $A \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$, on appelle $\mu_n(A)$ les valeurs singulières de A (qui sont les racines des valeurs propres de l'opérateur auto-adjoint compact A^*A). Montrer que

$$\|A\|^2_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} = \sum_{n\geqslant 1} \mu_n(A)^2.$$

En déduire que

$$\|A\| \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} .$$

4. Montrer que si $A \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ alors $AB \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ et $BA \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$, avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \|B\| , \qquad \|BA\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \|B\| .$$

En déduire que $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

5. Montrer que $\|\cdot\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})}$ est une norme et que $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach.

6. On suppose que $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$ pour $M \subset \mathbb{R}^d$ où μ est une mesure quelconque sur M. Montrer que $A \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ si et seulement s'il existe une fonction $a \in L^2(M \times M, d\mu^{\otimes 2})$ telle que

$$(Af)(x) = \int_M a(x,y) f(y)\, d\mu(y)$$

pour tout $f \in L^2(M, d\mu)$. Montrer aussi que

$$\|A\|^2_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} = \int_M \int_M |a(x,y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

La fonction a est appelée *noyau* de l'opérateur Hilbert-Schmidt A.

Exercice 8 (Opérateurs à trace)**.** On définit ici une autre sous-algèbre $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ et la trace sur cette algèbre. Ceci permettra en particulier de voir que l'algèbre $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ construite à l'exercice précédent est en fait un espace de Hilbert.

1. Soit $A = A^* \geqslant 0$ un opérateur compact auto-adjoint positif sur $\mathcal{H}$. On appelle

$$\mathrm{tr}\,(A) := \sum_{n\geqslant 1} \langle e_n, Ae_n\rangle$$

la trace de A, où (e_n) est une base orthonormée quelconque de $\mathcal{H}$ (la trace peut être finie ou infinie). Vérifier que cette définition ne dépend pas de la base choisie et donner une expression en fonction des valeurs propres de A.

On appelle $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs compacts A (non nécessairement auto-adjoints) tels que $\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} := \mathrm{tr}\,(|A|)$ est fini, où on rappelle que $|A| = \sqrt{A^*A}$. De tels A sont appelés *opérateurs à trace*.

2. Exprimer $\mathrm{tr}\,(|A|)$ en fonction des valeurs singulières de A. Montrer que $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H}) \subset \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ avec

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})}.$$

Montrer aussi que $A \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ équivaut à $A^* \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ et que $\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} = \|A^*\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})}$.

3. Montrer que

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} = \inf_{\substack{(e_n)\text{ base} \\ \text{orthonormée}}} \left\{ \sum_{n\geqslant 1} \|Ae_n\| \right\} \tag{2}$$

et que

$$\|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} = \sup_{\substack{(e_n),\ (f_n) \\ \text{systèmes orthonormées}}} \left\{ \sum_{n\geqslant 1} |\langle f_n, Ae_n\rangle| \right\}. \tag{3}$$

Dans cette dernière inégalité, les e_n et f_n peuvent être en nombre fini ou infini.

4. Montrer que si $A \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$, alors la série

$$\mathrm{tr}\,(A) := \sum_{n\geqslant 1} \langle e_n, Ae_n\rangle$$

converge absolument pour toute base orthonormée (e_n) et ne dépend pas de la base choisie. Montrer également que

$$\big|\mathrm{tr}\,(A)\big| \leqslant \mathrm{tr}\,(|A|),$$

c'est-à-dire que la trace $A \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{H}) \mapsto \mathrm{tr}\,(A)$ est une forme linéaire continue.

5. Soit A l'opérateur de multiplication par la fonction $a(t) = t$ sur $\mathcal{H} = L^2(]-1,1[)$. Calculer $\langle e_n, Ae_n\rangle$ où $e_n(t) = e^{i\pi nt}/\sqrt{2}$ est la base de Fourier et en déduire que

$$\sum_n |\langle e_n, Ae_n\rangle| < \infty,$$

mais que $A \notin \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$.

6. Montrer que si $A, B \in \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$, alors AB et BA sont à trace, avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^1} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \|B\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})}, \qquad \|BA\|_{\mathfrak{S}^1} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})} \|B\|_{\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})}.$$

Montrer aussi que

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

En déduire que $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ est un espace de Hilbert, lorsqu'il est muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle_{\mathfrak{S}^2} := \mathrm{tr}\,(A^*B)$.

7. Montrer que si $A \in \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ et $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors AB et BA sont à trace, avec

$$\|AB\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} \|B\|, \qquad \|BA\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} \leqslant \|A\|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})} \|B\|,$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Montrer ensuite que

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA).$$

8. Montrer que $\| \cdot \|_{\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})}$ est une norme, et que $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$ est une algèbre de Banach.

9. Montrer que $\mathcal{K}(\mathcal{H})' \simeq \mathfrak{S}^1(\mathcal{H})$, que $\mathfrak{S}^1(\mathcal{H})' \simeq \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et que $\mathfrak{S}^2(\mathcal{H})' \simeq \mathfrak{S}^2(\mathcal{H})$ (ici $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est l'algèbre des opérateurs compacts et $\mathcal{L}(cH)$ celle des opérateurs continus).

10. Soit (A_n) une suite bornée dans $\mathfrak{S}^1$. Montrer qu'il existe une sous-suite telle que $\mathrm{tr}\,(A_{n_k}K) \to \mathrm{tr}\,(AK)$ pour tout K compact.

Exercice 9 (Quelques opérateurs compacts)**.** On se place dans $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ et on note $f(-i\nabla)$ l'opérateur qui consiste à multiplier par la fonction $f(k)$ en Fourier, c'est-à-dire

$$f(-i\nabla)u = \mathcal{F}^{-1}\Big(f(k)\widehat{u}(k)\Big).$$

Ici on utilise la convention

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ik\cdot x}\, dx$$

pour la transformée de Fourier.

1. Montrer que si $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, alors $f(-i\nabla)$ est un opérateur borné vérifiant $\|f(-i\nabla)\| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.
2. On suppose que $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que les opérateurs $g(x)f(-i\nabla)$ et $f(-i\nabla)g(x)$ sont compacts, avec

$$\|g(x)f(-i\nabla)\|_{\mathfrak{S}^2} = \|f(-i\nabla)g(x)\|_{\mathfrak{S}^2} = \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{(2\pi)^{d/2}}.$$

3. On suppose que $f, g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et tendent vers 0 à l'infini. Montrer que $g(x)f(-i\nabla)$ et $f(-i\nabla)g(x)$ sont des opérateurs compacts.
4. Soit f_n une suite de $L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que $f_n \rightharpoonup f$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla f_n(x)|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} |k|^2 |\widehat{f_n}(k)|^2\, dk \leqslant C.$$

   Montrer que $f_n \mathbb{1}_\Omega \to f\mathbb{1}_\Omega$ fortement dans $L^2(\Omega)$, pour tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Exercice 10 (Paires de projecteurs)**.** Soient P et Q deux projecteurs orthogonaux (de rang quelconque, possiblement infini), sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. C'est-à-dire on a $P = P^* = P^2$ et $Q = Q^* = Q^2$. On pose

$$A = P - Q \qquad \text{et} \qquad B = 1 - P - Q.$$

Dans tout l'exercice on suppose que A est un opérateur compact.

1. Montrer que $A^2 + B^2 = 1$ et que $AB + BA = 0$.
2. Montrer que $\sigma(A) \subset [-1, 1]$.
3. Montrer que $\ker(A - 1) = \ker(Q) \cap \ker(1 - P)$ et que $\ker(A + 1) = \ker(1 - Q) \cap \ker(P)$. En déduire que A peut s'écrire

$$A = \Pi_+ - \Pi_- + P' - Q'$$

   où $\Pi_\pm$ sont des projecteurs orthogonaux de rang fini et P', Q' sont des nouveaux projecteurs orthogonaux tels que $\|P' - Q'\| < 1$.
4. On suppose ici que $\|A\| = \|P - Q\| < 1$.
   (a) Montrer que B est inversible.
   (b) On admet que B peut s'écrire sous la forme $B = |B|U$ (décomposition polaire), où
      - $|B| = \sqrt{1 - A^2}$ est inversible et commute avec A et B ;
      - U est unitaire et commute avec A et B ;

(le montrer en exercice pour un opérateur compact). Montrer que $U^*AU = -A$ et que $U^*BU = B$.

(c) Déduire que le spectre de A est symétrique par rapport à 0, et que $U^*PU = Q$, $U^*QU = P$.

5. Quelle est la forme du spectre de l'opérateur compact $A = P - Q$ lorsque P et Q sont quelconques ?
6. On pose $\mathrm{Ind}(P, Q) = \dim\ker(A - 1) - \dim\ker(A + 1)$ (indice de Fredholm d'une paire de projecteurs orthogonaux). Montrer que si $P - Q$ et $Q - R$ sont de rang fini,
$$\mathrm{Ind}(P, R) = \mathrm{Ind}(P, Q) + \mathrm{Ind}(Q, R). \tag{4}$$
7. Cette formule est en fait vraie pour tous P, Q, R tels que $P - Q$ et $Q - R$ sont compacts. Quelles conséquences peut-on en tirer ?

Exercice 11 (Krein-Rutman dans le cas auto-adjoint)**.** Soit $A = A^*$ un opérateur Hilbert-Schmidt auto-adjoint sur $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ (Exercice 7), où Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. On note $a(x, y) = \overline{a(x, y)} = a(x, y) \in L^2(\Omega^2)$ le noyau intégral de A que l'on suppose réel et strictement positif. Ceci signifie que pour tout $x, y \in \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $c > 0$ tel que $a(x', y') \geqslant c\mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)\cap\Omega}(x')\mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)\cap\Omega}(y')$, presque partout. L'objectif est de montrer que $\|A\|$ est une valeur propre simple dont l'unique fonction propre est strictement positive.

1. Soit $f \geqslant 0$ une fonction positive non nulle. Montrer que $Af > 0$.
2. Montrer que si $Af = \lambda f$ alors $A\Re(f) = \lambda\Re(f)$ et $A\Im(f) = \lambda\Im(f)$.
3. Rappeler pourquoi $\sigma(A) \cap \{\pm\|A\|\} \neq \emptyset$.
4. Rappeler pourquoi
$$\|A\| = \sup_{\substack{f\in\mathcal{H} \\ \int_\Omega |f|^2=1}} \left| \int_\Omega \int_\Omega f(x)f(y)a(x, y)\, dx\, dy \right|.$$
Soit f à valeurs réelles non nulle, telle que $Af = \tau\|A\|f$ avec $\tau = \pm 1$. Montrer que $A|f| = \|A\|\,|f|$, que $f = \pm|f|$ et que $|f| > 0$. Conclure en particulier que $-\|A\| \notin \sigma(A)$.
Indice : on pourra écrire $f = f_+ - f_-$ *où* $f_+ = \max(f, 0)$.
5. Montrer que la valeur propre $\|A\|$ est simple.
6. Soit $h \geqslant 0$ une fonction positive non nulle quelconque dans $L^2(\Omega)$. Calculer la limite
$$\lim_{N\to\infty} \left\langle h, A^N h\right\rangle^{\frac{1}{N}}.$$

Exercice 12 (Régularité des valeurs propres)**.** Soit A une application continue d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, telle que $A(x)$ est auto-adjoint compact pour tout x.

1. On appelle $\lambda(x)$ la plus grande valeur propre de $A(x)$. Montrer que
$$|\lambda(x) - \lambda(x')| \leqslant \|A(x) - A(x')\|$$
et en déduire que λ est une fonction continue.
2. Si $x \mapsto A(x)$ est C^1, est-ce que λ est forcément de classe C^1 ?
3. On rappelle que la plus grande valeur propre $\mu(x)$ inférieure à $\lambda(x)$ est donnée par la formule de Courant-Fischer
$$\mu(x) = \sup_{\substack{V\subset\mathcal{H} \\ \dim(V)=2}} \inf_{\substack{v\in V \\ \|v\|=1}} \langle v, A(x)v\rangle.$$
On a par ailleurs $\mu(x) = \lambda(x)$ si $\lambda(x)$ est de multiplicité $\geqslant 2$. Montrer que $\mu(x)$ est également une fonction continue.

4. On suppose que $\lambda(x_0)$ est simple. En déduire que $\lambda(x)$ reste simple sur un voisinage de x_0.
5. Soit $\mathcal{C}$ le cercle dans le plan complexe centré en $\lambda(x_0)$ et de rayon $(\lambda(x_0) - \mu(x_0))/2$. Calculer
$$\frac{1}{2i\pi} \oint z\big(z - A(x)\big)^{-1} dz$$
pour x assez proche de x_0. Soit e_n une base orthonormée quelconque de $\mathcal{H}$. En déduire que
$$\lambda(x) = \frac{1}{2i\pi} \sum_n \oint z\Big\langle e_n, \big(z - A(x)\big)^{-1} e_n\Big\rangle_{\mathcal{H}} dz.$$
6. Montrer que si $x \mapsto A(x)$ est C^∞ (resp. analytique réelle) alors λ est aussi C^∞ (resp. analytique réelle) au voisinage de x_0.

Exercice 13 (Absence de transitions de phases en 1D)**.** N'importe quel matériau est soumis à des transitions de phase lorsque la température et la pression varient. Nous sommes par exemple habitués à ce que l'eau se transforme en glace à 0 °C et s'évapore à 100 °C, dans les conditions normales de pression. Ces changements de phase ont lieu pour des valeurs particulières de la température et de la pression, que l'on peut représenter par des courbes dans le plan (T, P), appelé diagramme de phase. En dehors de ces courbes, les observables du système sont toutes des fonctions très lisses de T et P.

Il est assez surprenant que les transitions de phase sont un phénomène typique de la dimension 3 (pour les potentiels d'interaction à courte portée). Nous allons démontrer ici un théorème de 1950 dû à Van Hove (dans un cas simplifié), qui précise que l'enthalpie libre est une fonction analytique réelle pour un système unidimensionnel. Ainsi, il n'y a pas de transitions de phase usuelles en dimension 1. Un résultat similaire (quoique plus faible) a été démontré par Mermin et Wagner pour la dimension 2.

On considère donc N particules classiques qui interagissent par l'intermédiaire d'un potentiel w. On suppose que

$$w(|x|) \begin{cases} = +\infty & \text{si } |x| < R_1 \\ \in (-C, C) & \text{si } R_1 \leqslant |x| \leqslant R_2 \\ = 0 & \text{si } |x| \geqslant R_2. \end{cases}$$

Le lecteur peut penser à une fonction continue sur $[R_1, R_2]$ qui admet une limite en R_1^+ et qui tend vers 0 en R_2^-. L'hypothèse que w est infini pour $|x| < R_1$ sert à assurer que les particules ne sont jamais trop proches les unes des autres (on parle de cœur dur). L'énergie de $N + 1$ particules localisées en $x_0, ..., x_N \in \mathbb{R}$ est donnée par

$$\sum_{0 \leqslant j < k \leqslant N} w(|x_j - x_k|) = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant N} w(|x_j - x_k|) + \sum_{j=1}^{N} w(|x_j - x_0|).$$

Comme cette énergie est invariante par translation, on va supposer pour simplifier que $0 = x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_N$. On place les particules dans un segment de taille $L > NR_1$, c'est-à-dire on ajoute la contrainte que $x_N \leqslant L$. À température $T = 1/\beta > 0$, l'état du système est décrit par la mesure de Gibbs

$$\mu_{\beta,L,N}(x_1, ..., x_N) = Z(\beta, L, N)^{-1} \exp\left(-\beta \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant N} w(x_k - x_j) - \beta \sum_{j=1}^{N} w(x_j)\right)$$

où

$$Z(\beta, L, N) = \int_0^L dx_N \int_0^{x_N} dx_{N-1} \cdots \int_0^{x_2} dx_1 e^{-\beta \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant N} w(x_k - x_j) - \beta \sum_{j=1}^N w(x_j)}$$

est un facteur de normalisation, appelé fonction de partition. À cause du cœur dur, la mesure $\mu_{\beta,L,N}$ est à support dans l'ensemble des $(x_1, ..., x_N)$ tels que $x_j \geqslant R_1 + x_{j-1}$. Par contre $Z(\beta, L, N)$ fait sens pour tout L et s'annule juste quand $L \leqslant NR_1$.

Dans l'ensemble isotherme-isobare, nous devons considérer la transformée de Laplace de $Z(\beta, L, N)$ par rapport à L

$$\Delta(\beta, p, N) = \int_0^\infty e^{-pL} Z(\beta, L, N)\, dL,$$

où p est la pression. Le but est d'étudier la limite

$$\delta(\beta, p) = \lim_{N \to \infty} \frac{\log \Delta(\beta, p, N)}{N}$$

et sa régularité en β, p.

1. On suppose que $R_2 < 2R_1$, de sorte que chaque particule n'interagit qu'avec ses plus proches voisins. Calculer $\Delta(\beta, p, N)$ et la limite $\delta(\beta, p)$, puis conclure que cette dernière est une fonction analytique réelle sur le quart de plan $\{\beta > 0,\ p > 0\}$. On introduira les nouvelles variables $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$,..., $y_N = x_N - x_{N-1}$.
2. On introduit la fonction

$$a_{\beta_p}(x, y) = \exp\left(-\beta w(x+y) - \frac{\beta}{2} w(x) - \frac{\beta}{2} w(y) - \frac{px}{2} - \frac{py}{2}\right)$$

   et l'opérateur $A_{\beta,p}$ dont le noyau est égal à $a_{\beta,p}(x, y)$, sur $\mathcal{H} = L^2(]R_1, \infty[)$. Montrer que $A_{\beta,p}$ est auto-adjoint et Hilbert-Schmidt.
3. On suppose maintenant que $R_2 < 3R_1$ de sorte que chaque particule n'interagit qu'avec son plus proche voisin et le suivant (à sa droite et sa gauche). On pose également

$$h_{\beta,p}(x) = \exp\left(-\beta \frac{w(x)}{2} - p\frac{x}{2}\right)$$

   qui est dans $L^2(R_1, \infty)$. Montrer que

$$\Delta(\beta, p, N) = \frac{1}{p} \Big\langle h_{\beta,p}, \left(A_{\beta,p}\right)^N h_{\beta,p} \Big\rangle.$$

   En utilisant l'exercice 11, montrer que

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\log \Delta(\beta, p, N)}{N} = \log \|A_{\beta,p}\|.$$

4. En utilisant maintenant l'exercice 12, montrer que $(\beta, p) \mapsto \log \|A_{\beta,p}\|$ est analytique réelle sur le quart de plan $\{\beta > 0, p > 0\}$.

Référence : *Léon van Hove. Sur l'intégrale de configuration pour les systèmes de particules à une dimension. Physica, 1950, 16, 137-143*