MAT 452 – Analyse Fonctionnelle (2016-17)

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1 (Densité des inversibles)**.** Soit A une algèbre de Banach. On dit que $a \in A$ est topologiquement un diviseur de zéro (à gauche) dans A s'il existe une suite $\underline{\alpha} = (\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ de A telle que $\underline{\alpha}$ ne converge pas vers 0 dans A mais $a\alpha_n \to 0$.

1. Montrer que les éléments de $\partial A^\times$ (la frontière du groupe des inversibles $A^\times$ de A) sont topologiquement des diviseurs de zéro.
2. Soit $A = \mathscr{L}(\ell^2(\mathbb{N}))$ et $S : A \to A$ l'opérateur de décalage $(x_0, x_1, \dots) \to (0, x_0, x_1, \dots)$. Montrer que S n'est pas dans l'adhérence de $A^\times$. Ce qui montre que $A^\times$ n'est pas dense dans A.
3. Montrer que si A est de $\mathbb{C}$-dimension finie alors $A^\times$ est toujours dense dans A. (On pourra commencer par traiter le cas $A = M_n(\mathbb{C})$).

Exercice 2 (Quelquess calculs de spectre)**.** 1. Soit $\chi : A \to \mathbb{C}$ un caractère (*i.e.* morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres) et $a \in A$, rappeler pourquoi $\chi(a) \in \mathrm{spec}(a)$.

2. Calculer le spectre de l'opérateur de décalage de l'exercice 1 (2).
3. Soit S^1 le cercle unité, D le disque unité et $A := (\mathcal{C}(S^1, \mathbb{C}), || - ||_\infty)$, $B \subset A$ la sous-$\mathbb{C}$-algèbre des fonctions qui s'étendent en des fonctions continues sur D et holomorphes sur D°. Calculer le spectre de Id dans A et dans B.
4. Soit $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ (muni du produit de convolution $(\underline{x} * \underline{y})_n = \sum_{p+q=n} x_p y_q$ et de la norme $||\underline{x}||_1 = \sum_{n\geqslant 0} |x_n|$).
   (a) On note e_n la fonction qui vaut 1 en n et 0 partout ailleurs. Calculer $e_n * e_m$ et e_n^{-1}. Vérifier que tout $\underline{x} \in A$ est limite de $\sum_{-N\leqslant n\leqslant N} x_n e_1^n$.
   (b) Calculer le spectre de e_1.
   (c) Même question mais en considérant e_1 comme un élément de la sous-algèbre de Banach fermée $B = \ell^1(\mathbb{N}) \subset A$.

Exercice 3 (Idéaux fermés de $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$)**.** Soit (X, d) un espace métrique compact et $\mathcal{A} = (\mathcal{C}(X, \mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$ l'algèbre de Banach commutative unitaire des fonctions continues sur X munie de la norme sup. Pour $x \in X$ on note $e_x : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \in \mathcal{A}'$ l'évaluation en x. Pour toute partie $Y \subset X$ et $B \subset \mathcal{A}$ on note

$$I(Y) := \bigcap_{y\in Y} \ker(e_y) \subset \mathcal{A},\ V(B) := \bigcap_{b\in B} b^{-1}(0)$$

1. Vérifier que $I(Y)$ est un idéal fermé de $\mathcal{A}$ et que $I(Y) = I(\overline{Y})$ et que $V(B)$ est un sous-ensemble compact de X et $V(B) = V(\overline{\langle B\rangle})$, où $\langle B\rangle$ désigne le sous-idéal de $\mathcal{A}$ engendré par B.

On note $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ l'ensemble des idéaux fermés de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}(X)$ l'ensemble des parties fermées de X. On dispose donc de deux applications qui inversent l'inclusion :

$$\mathcal{I}(\mathcal{A}) \xrightarrow{V} \mathcal{F}(X),\ \ \mathcal{F}(X) \xrightarrow{I} \mathcal{I}(\mathcal{A})$$

et telles que $V \circ I(F) \supset F$, $I \circ V(J) \supset J$.

2. Soit $J \in \mathcal{I}(A)$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$,

$$V(J)_n := \{x \in X \mid d(x, V(J)) < \frac{1}{n}\}$$

(a) Montrer qu'il existe $a_n \in J$ qui est strictement positive sur $X \setminus V(J)_n$.

(b) En déduire que $I(V(J)_n) \subset J$ puis que $I(V(J)) = J$.

(c) En déduire que V et I sont inverses l'une de l'autres. Quels sont les idéaux maximaux fermés de $\mathcal{A}$? Quel est le spectre de Gelfand de $\mathcal{A}$?

Exercice 4 (Un critère de commutativité)**.** Soit A une algèbre de Banach unitaire. Pour $a \in A$, on note $\rho(a)$ le rayon spectral.

1. Montrer que s'il existe $N > 0$ tel que $N||a||^2 \leqslant ||a^2||$, $a \in A$ alors $N||a|| \leqslant \rho(a)$, $a \in A$.
2. Soit $a, b \in A$ et supposons qu'il existe $M > 0$ tel que $||exp(\lambda a) b \exp(-\lambda a)|| \leqslant M$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $ab = ba$.
3. En déduire que si s'il existe $N > 0$ tel que $N||a||^2 \leqslant ||a^2||$, $a \in A$ alors A est commutative.

Exercice 5 (Fonction exponentielle)**.** Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach avec unité et

$$\exp(x) := \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!}.$$

1. Montrer que si x et y commutent (c'est-à-dire $xy = yx$), alors $c \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$.
2. Montrer la formule de Trotter

$$\exp(x + y) = \lim_{n \to \infty} \left(\exp\left(\frac{x}{n}\right) \exp\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n.$$

3. On prend $\mathcal{A} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Calculer $\exp(x)$, $\exp(y)$, $\exp(x+y)$ et constater que $\exp(x)\exp(y) \neq \exp(x+y)$.

4. Soient $A = A$ et $B = B^*$ deux matrices hermitiennes de taille n. Montrer que

$$\det\big(\exp(A + B)\big) = \det\big(\exp(A)\exp(B)\big).$$

5. (a) Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices de taille n (pas forcément hermitiennes). Montrer que

$$|\mathrm{tr}\,(A_1 A_2)| \leqslant \sqrt{\mathrm{tr}\,(A_1^* A_1)}\sqrt{\mathrm{tr}\,(A_2^* A_2)}.$$

   (b) Montrer par récurrence que pour $p = 2^k$ et $A_1, ..., A_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$|\mathrm{tr}\,(A_1 A_2 \cdots A_p)| \leqslant \left(\mathrm{tr}\,(A_1^* A_1)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}} \cdots \left(\mathrm{tr}\,(A_p^* A_p)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

   (c) En prenant $A_j = AB$ avec maintenant $A = A^*$ et $B = B^*$, en déduire que

$$\mathrm{tr}\,(AB)^p \leqslant \mathrm{tr}\,(A^2B^2)^{\frac{p}{2}}$$

   puis par une nouvelle récurrence sur p que

$$\mathrm{tr}\,(AB)^p \leqslant \mathrm{tr}\,(A^pB^p).$$

(d) En utilisant la formule de Trotter, en déduire l'inégalité de Golden-Thompson

$$\operatorname{tr}\left(e^{A+B}\right) \leqslant \operatorname{tr}\left(e^{A}e^{B}\right),$$

pour toutes matrices hermitiennes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 6. Soit A l'algèbre des sommes de séries de Taylor absolument convergentes $f = f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, munie de la norme $\|f\| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

1. Montrer que les caractères de A sont exactement les $\chi_{z_0} : f \mapsto f(z_0)$ où $z_0 \in \mathbb{C}$ avec $|z_0| \leqslant 1$. Ceci permet d'identifier $\widehat{A}$ au disque unité fermé de rayon 1 de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que si $f \in A$ n'est jamais nulle sur ce disque, alors il existe des nombres complexes b_n tels que

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{n\geqslant 0} b_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |b_n| < +\infty.$$

3. Soient $f_1, f_2, \dots f_p$ des fonctions appartenant à A et n'ayant aucun zéro commun dans $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant 1\}$. Montrer qu'il existe $g_1, g_2, \dots g_p$ telles que $\sum_{i=1}^{p} f_i g_i = 1$.