MAT 452 – Analyse Fonctionnelle (2016-17)

Correction exercice 5 / Feuille d'exercices n° 3

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable et $\mathcal{D}$ un sous-espace quelconque de $\mathcal{H}$. On se donne un opérateur linéaire $A : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$. On appelle

$$\rho(A) := \{z \in \mathbb{C} \ \text{ tel que } A - z : \mathcal{D} \to \mathcal{H} \text{ est inversible d'inverse borné}\}$$

ensemble résolvant de A et $\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ le *spectre de* A. Ici "$(A-z)^{-1}$ borné" signifie qu'il existe une constante C telle que

$$\forall x \in \mathcal{H}, \qquad \|(A-z)^{-1}x\|_{\mathcal{H}} \leqslant C\|x\|_{\mathcal{H}}$$

(on utilise la norme de $\mathcal{H}$, même si $(A-z)^{-1}x \in \mathcal{D}$).

1. Montrer que si $\sigma(A) \neq \mathbb{C}$, alors le graphe de A doit être fermé.

Corrigé. *Par contraposée, on suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $A - z : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ soit inversible d'inverse borné. Soit alors $(x_n, y_n = Ax_n)$ une suite du graphe de A, qui converge dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vers (x, y). On doit montrer que $x \in \mathcal{D}$ et que $Ax = y$. On a $y_n = Ax_n = (A-z)x_n + zx_n$ de sorte que*

$$(A-z)^{-1}(y_n - zx_n) = x_n.$$

Comme $(A-z)^{-1}$ est continu par hypothèse, on peut passer à la limite et obtenir

$$(A-z)^{-1}(y - zx) = x.$$

Puisque $(A-z)^{-1}$ est à image dans $\mathcal{D}$, ceci montre bien que $x \in \mathcal{D}$ et il est ensuite facile de vérifier que $Ax = y$, en appliquant $A - z$ à gauche. □

L'opérateur de dérivation $A : f \mapsto f'$ joue un rôle central dans la théorie des équations différentielles. On rappelle par ailleurs que $-iA : f \mapsto -if'$ est l'opérateur qui décrit l'impulsion en mécanique quantique. Dans l'intervalle $[0,1]$, on s'attend à ce que son spectre soit quantifié, donné par $\sigma(-iA) = \{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Nous allons voir que c'est le cas, mais à condition de définir A sur le bon domaine. Un mauvais choix conduit inexorablement à $\sigma(A) = \mathbb{C}$. Par la question précédente, c'est déjà forcément le cas si le graphe n'est pas fermé.

2. On prend

$$\mathcal{H} = L^2(]0,1[,\mathbb{C}), \qquad \mathcal{D}_1 = C^1([0,1],\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad A_1 f = f'.$$

(a) Montrer que le graphe de A_1 n'est pas fermé et que $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$.

(b) On considère le sous-espace de $L^2(]0,1[,\mathbb{C})$

$$\tilde{\mathcal{D}}_1 = \left\{f \in C^0([0,1],\mathbb{C}) \ : \ f' \in L^2(]0,1[,\mathbb{C})\right\}$$

où f' est entendue au sens des distributions sur $]0,1[$, et l'opérateur $B_1 f = f'$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_1$. Montrer que le graphe de B_1 est fermé et que c'est la fermeture du graphe de A_1 dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$.

(c) Déterminer le spectre de B_1.

Corrigé. *(a) Le graphe*

$$G_1 = \{(f, f') \ : \ f \in \mathcal{D}_1 = C^1([0,1])\}$$

de l'opérateur A_1 n'est pas fermé dans $L^2(]0,1[) \times L^2(]0,1[)$. Par exemple, la fonction

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ 1-t & \text{pour } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

appartient à $L^2(]0,1[)$ et sa dérivée (au sens des distributions) est $f'(t) = \mathbb{1}(0 < t < 1/2) - \mathbb{1}(1/2 < t < 1)$ qui est aussi dans $L^2(]0,1[)$ mais n'est pas continue. Donc $f \notin C^1([0,1]) = \mathcal{D}_1$ et $(f, f') \notin G_1$. Ainsi, si on trouve une suite $f_n \in C^1([0,1])$ telle que $f_n \to f$ et $f_n' \to f'$ dans $L^2(]0,1[)$, on aura bien montré que G_1 n'est pas fermé. On peut poser par exemple $f_n(0) = 0$ et

$$f_n'(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ -n\left(t - \frac{1}{2}\right) & \text{pour } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ -1 & \text{pour } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

qui est une fonction continue. On a

$$\int_0^1 (f_n'(t) - f'(t))^2 \, dt = \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} \left(n\left(t - \frac{1}{2}\right) + 1\right)^2 + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \left(n\left(t - \frac{1}{2}\right) - 1\right)^2 dt = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

La convergence uniforme de $f_n - f$ est automatique une fois que la dérivée converge. En effet, comme $f_n(0) = f(0) = 0$, on a

$$(f - f_n)(x) = \int_0^x (f'(t) - f_n'(t)) \, dt,$$

et donc par Cauchy-Schwarz

$$\max_{[0,1]} |f - f_n| \leqslant \int_0^1 |f'(t) - f_n'(t)| \, dt \leqslant \left\| f' - f_n' \right\|_{L^2(]0,1[)}.$$

En particulier, on obtient bien que $(f_n, f_n') \to (f, f')$ fortement dans $L^2 \times L^2$ mais que la limite n'est pas dans G_1. Comme le graphe n'est pas fermé, on déduit de la première question que $\sigma(A_1) = \mathbb{C}$. En fait, les fonctions e^{ax} sont des fonctions propres pour tout $a \in \mathbb{C}$.

(b) On note

$$\tilde{G}_1 = \{(f, f') \ : \ f \in \tilde{\mathcal{D}}_1\}$$

le graphe de B_1 et on montre que c'est la fermeture de G_1 pour la norme de $L^2(]0,1[) \times L^2(]0,1[)$. Nous allons utiliser le fait que si $f \in L^1(]0,1[)$ est telle que sa dérivée au sens des distributions f' est donnée par une fonction de $L^1(]0,1[)$, alors f coïncide presque partout avec une fonction continue et

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s) \, ds.$$

Pour cela il suffit de calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction de droite et de vérifier que c'est bien f' (exercice). Comme $L^2(]0,1[) \subset L^1(]0,1[)$ par Cauchy-Schwarz, la même formule est utilisable dans notre cas.

Commençons par montrer que G_1 est dense dans $\tilde{G}_1$. On rappelle que $C_c^\infty(0,1)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$ et on prend donc une suite $\varphi_n \to f'$ dans $L^2(]0,1[)$ avec $\varphi_n \in C_c^\infty(0,1)$ et on pose $f_n(x) = f(0) + \int_0^x \varphi_n(t) \, dt \in C^\infty([0,1])$. Comme

$$(f - f_n)(x) = \int_0^x (f'(t) - \varphi_n(t)) \, dt,$$

la convergence de $f_n' = \varphi_n$ dans L^2 implique la convergence uniforme de f_n vers f, et donc la convergence dans $L^2(]0,1[)$. Nous avons ainsi montré que tout élément de $\tilde{G}_1$ peut être approché par une suite d'éléments de G_1.

Il reste à prouver que $\tilde{G}_1$ est fermé. Si $f \in C^1$ on a

$$f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t)\,dt$$

donc

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \int_0^1 \int_y^x f'(t)\,dt\,dy. \tag{1}$$

Par densité de G_1 dans $\tilde{G}_1$ pour la norme $L^2 \times L^2$ (en fait même pour la norme $\max_{[0,1]} |f| + \|f'\|_{L^2(]0,1[)}$), et par continuité de tous les termes apparaissant dans (1), on conclut que cette relation reste vraie pour $f \in \tilde{\mathcal{D}}_1$. Soit donc (f_n, f_n') une suite de $\tilde{G}_1$ qui converge, c'est-à-dire telle que $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ dans $L^2(]0,1[)$. Nous devons montrer que f est continue et que $g = f'$ (dérivée au sens des distributions). De la formule (1) on déduit que

$$\max_{[0,1]} |f_n - f_p| \leqslant \|f_n - f_p\|_{L^1(]0,1[)} + \left\|f_n' - f_p'\right\|_{L^1(]0,1[)} \leqslant \|f_n - f_p\|_{L^2(]0,1[)} + \left\|f_n' - f_p'\right\|_{L^2(]0,1[)}$$

donc (f_n) est de Cauchy dans $C^0([0,1])$. Elle doit converger uniformément vers une limite $\tilde{f}$, ce qui implique que $f_n \to \tilde{f}$ dans $L^2(]0,1[)$ et donc bien sûr que $\tilde{f} = f$. En particulier f est continue. Par ailleurs,

$$\int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)\varphi'(t)\,dt = -\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n'(t)\varphi(t)\,dt = -\int_0^1 g(t)\varphi(t)\,dt$$

pour tout $\varphi \in C_c^\infty(0,1)$, qui prouve bien que $f' = g$ au sens des distributions, donc que $(f, f') \in \tilde{G}_1$. En conclusion, puisque $\tilde{G}_1$ est fermé et que G_1 est dense dans cet espace, c'est bien la fermeture de G_1.

Remarque : par le théorème du graphe fermé, l'opérateur B_1 est continu de $\tilde{\mathcal{D}}_1$ dans $L^2(]0,1[)$, lorsque $\tilde{\mathcal{D}}_1$ est muni de la norme

$$\|f\|_{\tilde{\mathcal{D}}_1} = \|f\|_{L^2(]0,1[)} + \left\|f'\right\|_{L^2(]0,1[)}$$

qui est équivalente à la norme $\|f\|_{C^0([0,1])} + \|f'\|_{L^2(]0,1[)}$.

(c) Le spectre de B_1 est toujours égal à $\mathbb{C}$ car les fonctions e^{ax} restent des fonctions propres. Fermer le graphe n'a pas vraiment résolu le problème. □

3. Notre intuition que le spectre de l'opérateur de dérivation a un spectre imaginaire pur, donné par les $2ik\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ est par analogie avec les matrices hermitiennes. Malheureusement, l'opérateur $-iB_1$ défini à la question précédente a bien un graphe fermé mais il n'est pas symétrique. En effet, une intégration par parties donne

$$\int_0^1 \overline{f(t)}(-ig'(t))\,dt = \int_0^1 \overline{-if'(t)}g(t)\,dt - i\big(\overline{f(1)}g(1) - \overline{f(0)}g(0)\big).$$

Pour annuler les termes de bord, il faut ajouter une condition. Nous allons ajouter l'hypothèse que $f(0) = f(1)$ et $g(0) = g(1)$, ce qui revient à travailler avec un système périodique (une particule quantique sur le cercle unité).

On prend donc

$$\mathcal{H} = L^2(]0,1[,\mathbb{C}), \qquad \mathcal{D}_2 = \{f \in C^1([0,1],\mathbb{C}),\ f(0) = f(1)\} \quad \text{et} \quad A_2 f = f'.$$

(a) Montrer que le graphe de A_2 n'est pas fermé et que $\sigma(A_2) = \mathbb{C}$.

(b) On considère le sous-espace de $L^2(]0,1[,\mathbb{C})$

$$\tilde{D}_2 = \big\{f \in C^0([0,1],\mathbb{C})\ :\ f' \in L^2(]0,1[,\mathbb{C}),\ f(0) = f(1)\big\}$$

et l'opérateur $B_2 f = f'$ sur $\tilde{D}_2$. Montrer que le graphe de B_2 est fermé et que c'est la fermeture du graphe de A_2.

(c) Montrer que $\tilde{\mathcal{D}}_2$ est aussi l'espace des fonctions $f \in C^0([0,1],\mathbb{C})$ dont les coefficients de Fourier $c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,dt$ vérifient

$$\sum_{k\in 2\pi\mathbb{Z}} |k|^2 |c_k(f)|^2 < \infty$$

et exprimer B_2 dans la base de Fourier. En déduire le spectre de B_2.

Corrigé. *(a) L'opérateur A_2 n'a pas non plus un graphe fermé (la même fonction f que précédemment convient), donc $\sigma(A_2) = \mathbb{C}$.*

(b) En fermant le graphe, on trouve l'opérateur B_2 défini sur le domaine $\tilde{\mathcal{D}}_2$. L'argument est essentiellement le même qu'à la question précédente, modulo une petite difficulté : pour montrer que G_2 est dense dans $\tilde{G}_2$ il faut approcher f' par une fonction f_n' vérifiant $\int_0^1 f_n'(t)\,dt = 0$, de sorte que $f_n(0) = f_n(1)$. Le plus simple est de corriger la fonction de la question précédente en prenant

$$f_n'(t) = \varphi_n(t) - \varphi(t)\int_0^1 \varphi_n(s)\,ds$$

où φ est une fonction de $C_c^\infty(0,1)$ quelconque telle que $\int_0^1 \varphi(s)\,ds = 1$. Comme $\varphi_n \to f'$ fortement dans $L^2(]0,1[)$, donc dans $L^1(]0,1[)$, on a $\int_0^1 \varphi_n(s)\,ds \to \int_0^1 f'(s)\,ds = 0$, donc le terme additionnel tend vers 0. L'argument est ensuite le même que précédemment.

(c) Le spectre de l'opérateur B_2 est maintenant égal à $\{2ik\pi\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset i\mathbb{R}$, donc très différent ! En effet, par la théorie des séries de Fourier on peut écrire toute fonction de $L^2(]0,1[)$ sous la forme

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{2i\pi kt}$$

où la série converge dans $L^2(]0,1[)$. Si $f \in \mathcal{D}_2$, on a

$$\begin{aligned} c_k(f) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi kt}\,dt &= \frac{1}{2i\pi k}\int_0^1 f'(t)e^{-2i\pi kt}\,dt - \frac{1}{2i\pi k}\underbrace{\big(f(1)-f(0)\big)}_{=0} \\ &= \frac{1}{2i\pi k}\int_0^1 f'(t)e^{-2i\pi kt}\,dt = \frac{c_k(f')}{2i\pi k}. \end{aligned}$$

Par continuité de tous les termes de cette équation et densité de G_2 dans $\tilde{G}_2$, on conclut que cette relation reste vraie pour $f \in \tilde{\mathcal{D}}_2$. On voit donc que tous les $f \in \tilde{\mathcal{D}}_2$ ont une série de Fourier qui vérifie

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |k|^2 |c_k(f)|^2 < \infty.$$

Réciproquement, si $f \in L^2(]0,1[)$ a une série de Fourier vérifiant cette hypothèse (en plus de $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2 < \infty$), on en déduit que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)| \leqslant \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+|k|^2)|c_k(f)|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{1+|k|^2}\right)^{1/2} < \infty,$$

donc que la série converge normalement. En particulier, f est continue et vérifie $f(0) = f(1)$ puisque chaque $e^{2i\pi kt}$ satisfait cette relation. En prenant $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$, on trouve que

$$-\langle f', \varphi\rangle = \int_0^1 f(t)\varphi'(t)\,dt = -2i\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, c_k(f) c_{-k}(\varphi)$$

qui montre que la distribution f' s'identifie à la fonction dont les coefficients de Fourier sont les $2i\pi k c_k(f)$. Une telle fonction est bien dans $L^2(]0,1[)$, par Parseval. Ainsi, nous avons montré que $\tilde{\mathcal{D}}_2$ est bien l'ensemble mentionné, et également que

$$f'(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2i\pi k c_k(f) e^{2i\pi kt} = (B_2 f)(t), \tag{2}$$

où la série converge dans $L^2(]0,1[)$.

En particulier, on trouve que les $e^{2i\pi kt}$ *sont des fonctions propres de* B_2 *et* $\{2i\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \sigma(B_2)$. *Il reste à prouver que* $B_2 - z$ *est inversible d'inverse borné si* $z \notin \{2i\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. *Si* $z \notin \{2i\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *on a* $\min_{k\in\mathbb{Z}} |z-2i\pi k| > 0$ *car l'ensemble* $\{2i\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *est fermé. On introduit alors l'opérateur*

$$(R_2(z)f)(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2i\pi k - z} c_k(f) e^{2i\pi kt},$$

défini sur tout $L^2(]0,1[)$. *Cet opérateur est borné puisque*

$$\|R_2(z)f\|^2_{L^2(]0,1[)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|c_k(f)|^2}{|2i\pi k - z|^2} \leqslant \frac{\|f\|^2_{L^2(]0,1[)}}{\min_{k\in\mathbb{Z}} |z - 2i\pi k|^2}.$$

Par ailleurs, cet opérateur est à valeurs dans $\tilde{\mathcal{D}}_2$ *car*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|k|^2 |c_k(f)|^2}{|2i\pi k - z|^2} \leqslant C \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2.$$

En effet la fonction

$$k \in \mathbb{Z} \mapsto \frac{|k|^2}{|2i\pi k - z|^2}$$

est uniformément bornée puisque le dénominateur ne s'annule jamais et qu'elle tend vers $1/(4\pi^2)$ *à l'infini. Il reste à montrer que* $R_2(z)$ *est l'inverse de* $B_2 - z$, *ce qui suit de* (2). □

Remarque : si on définit B_2 sur n'importe quel sous-espace strict dense de $\tilde{\mathcal{D}}_2$ (par exemple des fonctions plus régulières) alors le spectre vaut obligatoirement $\mathbb{C}$, par la question 1 car le graphe ne sera pas fermé. Ceci montre le caractère inévitable de travailler avec des dérivées définies au sens faible. Les espaces $\tilde{\mathcal{D}}_1$ et $\tilde{\mathcal{D}}_2$ s'appellent des *espaces de Sobolev*.