MAT 451 – Analyse Fonctionnelle (2016-17)

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit A convexe avec $A^\circ \neq \varnothing$. Montrer que $\overline{A} = \overline{A^\circ}$ et $A^\circ = \overline{A}^\circ$.

Exercice 2. Soit A un sous-ensemble convexe compact de $\mathbb{R}^n$ tel que le point 0 soit dans l'intérieur de A. Soit $S = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| = 1\}$ la sphère unité.

1. Montrer que, pour tout $y \in S$, la demi-droite d'origine 0 passant par y coupe la frontière $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus A^\circ$ de A en un point et un seul, noté $\delta(y)$.
2. Montrer que l'application $y \mapsto \delta(y)$ est une application continue de S sur $\mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 3. Soit A une partie d'un espace vectoriel réel normé E.

1. Si A est fermée, est-il toujours vrai que $\mathrm{conv}(A)$ soit fermée ?
2. Si A est ouverte, est-il toujours vrai que $\mathrm{conv}(A)$ soit ouverte ?

Exercice 4. Soit $P(z)$ un polynôme à coefficients complexes et soit $P'(z)$ son polynôme dérivé. Montrer que dans $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, toute racine de P' est dans l'enveloppe convexe de l'ensemble des racines de P.

Exercice 5. Dans l'espace de suites $\ell^\infty(\mathbb{N})$, montrer que l'ensemble $\left\{\frac{e_n}{n}\right\}_{n \geqslant 1} \cup \{0\}$ est compact mais que son enveloppe convexe n'est pas fermée. Ici, $e_n(k) = \delta_n(k)$ est la suite qui vaut 0 pour tout $k \geqslant 0$, sauf pour $k = n$ où on a $e_n(k) = 1$.

Exercice 6 (Une application du théorème de Helly)**.** Soit F une partie finie de $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un point x tel que tout hyperplan passant par x et ne rencontrant pas F, sépare F en deux parties F_1 et F_2 contenant chacune au moins $|F|/(d+2)$ points de F.

Exercice 7 (Moyenne de Banach)**.**

1. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue F, de norme égale à 1, invariante par translations sur $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ et qui vaut 1 sur la fonction constante égale à 1.
2. En déduite l'existence d'une probabilité "finiment additive", invariante par translations sur $\mathbb{Z}$, c'est à dire une application $P : \mathcal{P}(\mathbb{Z}) \to [0,1]$ où $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{Z}$ vérifiant :
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;
   - $P(P) \geqslant 0$;
   - $P(\mathbb{Z}) = 1$;

Exercice 8.

1. Quel est le bidual de l'espace c_0 des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme sup ?
2. Citer des espaces vectoriels normés égaux à leur bidual (ces espaces vectoriels normés sont dits réflexifs).
3. On considère le sous-espace vectoriel V de $\ell^\infty(\mathbb{N})$, formé des suites réelles qui admettent une limite quand $n \to \infty$. Sur V on définit la forme linéaire

   $$x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim_{n \to \infty} x_n.$$

   Montrer que cette forme linéaire est continue sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$ et non nulle, mais qu'elle est identiquement nulle sur c_0. En déduire que l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$ n'est pas réflexif.

Exercice 9. Montrer que tout sous-espace affine fermé est l'intersection des hyperplans affines qui le contiennent.

Exercice 10. Dans $\ell^2(\mathbb{N})$ soit A l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\left\{\pm\frac{e_n}{n}\right\}_{n\geqslant 1}$. Montrer que A est compact, que $0 \in \mathrm{Fr}(A)$ mais que par 0 ne passe aucun hyperplan d'appui de A.

Exercice 11.

1. Montrer que les points extrémaux de la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ sont les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $|x_n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que la boule unité fermée de c_0 (les suites qui tendent vers 0 à l'infini) n'a pas de point extrémal.

Exercice 12. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ soit A l'enveloppe convexe de la réunion du cercle $\{x_3 = 0\ ;\ x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 = 0\}$ et des deux points $(0,0,1)$ et $(0,0,-1)$. Montrer que A est convexe compact. Déterminer $\mathrm{Extr}(A)$ et constater que cet ensemble n'est pas fermé.

Exercice 13. Soit A un ensemble convexe compact non vide dans $\mathbb{R}^n$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe sur A, ce qui signifie que

$$f\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

pour tous $x, y \in A$ et $\lambda \in [0;1]$. Montrer que le maximum de A est atteint sur $\mathrm{Extr}(A)$; en particulier, si A est un polyèdre il suffit de tester un nombre fini de points.

Exercice 14. Dans l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de dimension $n(n+1)/2$ des matrices symétriques réelles $S = [S_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $S_{ij} = S_{ji}$, déterminer les points extrémaux des ensembles convexes suivants :

- $\mathcal{K}_1$ formé des matrices vérifiant $S \geqslant 0$ (c'est-à-dire dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}^+$) et $\mathrm{tr}\,(S) = 1$;
- $\mathcal{K}_N$ formé des matrices vérifiant $0 \leqslant S \leqslant 1$ (c'est-à-dire dont le spectre est inclus dans $[0,1]$) et $\mathrm{tr}\,(S) = N$, pour $N = 2, ..., n$.

Soit A une matrice symétrique réelle quelconque. Que vaut $\min\limits_{S\in\mathcal{K}_N} \mathrm{tr}\,(AS)$?

Exercice 15. Dans l'espace $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension n^2 des matrices réelles $[M_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on considère l'ensemble convexe :

$$\mathcal{C} = \Big\{ M = [M_{ij}]_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telles que } M_{ij} \geqslant 0,\ \forall 1 \leqslant i,j \leqslant n \\ \text{et } \sum_{i=1}^n M_{ik} = \sum_{j=1}^n M_{kj} = 1,\ \forall 1 \leqslant k \leqslant n. \Big\}.$$

Les matrices de $\mathcal{C}$ sont appelées *bistochastiques*. Soit P l'ensemble des matrices de permutation, c'est-à-dire qui ont un seul coefficient égal à 1 sur chaque ligne et sur chaque colonne, les autres coefficients étant nuls.

1. Montrer que $P = \mathrm{Extr}(\mathcal{C})$.
2. En déduire un théorème de Birkhoff : toute matrice bistochastique est combinaison linéaire convexes de matrices de permutations, et même d'au plus $(n-1)^2 + 1$ d'entre elles.