MAT 452 **2017**

Analyse fonctionnelle
Devoir à la maison

Devoir à rendre pour le :

— lundi 29 mai à midi.

Problème.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Il est connu que, si une dérivé n-ième de f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, alors f est une fonction polynomiale (de degré $\leqslant n-1$). Le but de ce problème est de faire démontrer le résultat plus subtil suivant.

Théorème. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe un entier n, dépendant éventuellement de x, tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est une fonction polynomiale.*

I. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, on dit que g est un *polynôme sur* I s'il existe un polynôme $p(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $g(x) = p(x)$ pour tout $x \in I$.

1°) Soient I_1 et I_2 deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ tels que $I_1 \cap I_2$ soit non vide. Montrer que si g est un polynôme sur I_1 et un polynôme sur I_2, c'est un polynôme sur $I_1 \cup I_2$.

2°) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$ il existe un intervalle ouvert I_x non vide tel que g soit un polynôme sur I_x. Montrer qu'alors g est un polynôme sur I.

3°) Soient $a < b < c$. On suppose que g est un polynôme sur $]a;b[$ et un polynôme sur $]b;c[$. Montrer qu'alors g est un polynôme sur $]a;c[$.

II. Soit f une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème. Soit G l'ouvert des $x \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe un intervalle ouvert I_x contenant x et sur lequel f soit un polynôme. Soit F le fermé complémentaire de G dans $\mathbf{R}$. Par l'absurde supposons que F n'est pas vide.

1°) Montrer que F n'a pas de point isolé.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit

$$F_n = \{x \in F : f^{(n)}(x) = 0\}.$$

2°) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J de $\mathbf{R}$ et un entier N tels que

$$F \cap J \text{ n'est pas vide et } F \cap J \subset F_N.$$

3°) Montrer qu'en fait $F \cap J \subset F_n$ pour tout $n \geqslant N$.

4°) Montrer que chaque F_n est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$. En déduire que $F \cap J$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$.

5°) Montrer que si J_0 est l'un des intervalles ouverts composantes connexes de l'ouvert $G \cap J$, alors pour tout $x \in J_0$ on a : $f^{(N)}(x) = 0$ (on pourra considérer un point de $(\overline{J_0} \setminus J_0) \cap J$).

6°) En déduire que, pour tout $x \in J$, on a : $f^{(N)}(x) = 0$.

7°) Conclure.

Exercice.

Dans cet exercice, les algèbres de Banach – sauf $B(A)$ ci-dessous – sont commutatives, unitaires et les morphismes d'algèbres envoient unité sur unité.

Soit A une algèbre de Banach commutative. On note $\mathrm{Rad}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A. De façon équivalente, $\mathrm{Rad}(A)$ est l'intersection des $\ker(\chi)$, pour χ parcourant l'ensemble $\widehat{A}$ des caractères de A. On dit que A est *semi-simple* si $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

1°) Soit $A = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, munie de la norme $||-||_\infty$ de la convergence uniforme.

a) Montrer que A elle-même est semi-simple.

b) On note $B(A)$ la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach des opérateurs bornés $A \to A$. Pour $\phi \in B(A)$, on désigne par $\overline{\mathbf{C}[\phi]}$ l'adhérence dans $B(A)$ de la sous-algèbre des polynômes en ϕ. Soit $\phi \in B(A)$ l'opérateur « de primitivation » défini par

$$\phi(a) : t \mapsto \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0,1],\ a \in A).$$

Montrer que

$$|\phi^n(a)(t)| \leqslant ||a||_\infty \frac{t^n}{n!} \quad (t \in [0,1],\ a \in A).$$

c) En déduire que $\phi \in \mathrm{Rad}(\overline{\mathbf{C}[\phi]})$.

2°) Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach commutatives. On suppose B semi-simple. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que ϕ est continue.

3°) On note $A = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0,1]$. L'objectif de cette question est de montrer qu'on ne peut pas mettre de norme d'algèbre de Banach sur A. On raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle norme, disons $||-||$, existe.

a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $||a||_\infty \leqslant C \cdot ||a|| \quad (a \in A)$.

b) On note $\delta : A \to A$, $a \mapsto a'$ l'opérateur de dérivation. En utilisant a) et, à nouveau, le théorème du graphe fermé, montrer que δ est continue ; autrement dit qu'il existe $D > 0$ tel que : $||a'|| \leqslant D \cdot ||a|| \quad (a \in A)$.

c) Conclure en considérant l'élément $a : t \mapsto e^{2Dt} \in A$.

Exercice.

Dans cet exercice, on utilisera librement la version de dimension infinie du théorème de Krein-Milman. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et K un convexe compact non vide de E. On veut montrer que pour tout $x \in K$, il existe une mesure de probabilité μ_x sur K, supportée sur l'adhérence $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$ des points extrémaux $\mathrm{Extr}(K)$, telle que pour toute forme linéaire continue $f : E \to \mathbf{R}$ on ait :

$$f(x) = \int_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} f(e)\,\mathrm{d}\mu_x(e).$$

Par le théorème de représentation de Riesz, cela revient à montrer qu'il existe une forme linéaire F_x sur $\mathcal{C}(\overline{\mathrm{Extr}(K)}, \mathbf{R})$ qui est positive (*i.e.* $\geqslant 0$ sur les fonctions $\geqslant 0$) telle que $F_x(1) = 1$ et que pour toute forme linéaire continue $f : E \to \mathbf{R}$ on ait

$$f(x) = F_x(f\,|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}}).$$

On note L (resp. L_e) l'ensemble des restrictions à K (resp. à $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$) des formes linéaires continues $E \to \mathbf{R}$.

1°) Montrer que toute $f \in L$ atteint son maximum et son minimum sur $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$. En déduire que l'application de restriction $r :=: -|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} : L \to L_e$ est un isomorphisme.

2°) Pour tout $x \in K$, notons

$$\tilde{F}_x : L_e \overset{r^{-1}}{\to} L \overset{\mathrm{ev}_x}{\to} \mathbf{R},\ f|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} \mapsto f(x)$$

l'application d'évaluation. Montrer que si L_e contient la fonction constante f_0 égale à 1 sur $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$ alors $\tilde{F}_x(f_0) = 1$. Si L_e ne contient pas f_0, on remplace L_e par $L_e \oplus \mathbf{R}f_0$ et on pose $\tilde{F}_x(f_0) = 1$.

3°) Montrer que $\tilde{F}_x : L_e \to \mathbf{R}$ s'étend en une forme linéaire $F_x : \mathcal{C}(K) \to \mathbf{R}$ ayant les propriétés souhaitées.

4°) Quand E est de dimension finie, expliciter la mesure μ_x comme un barycentre convenable.