MAT 452 **2017**

Analyse fonctionnelle
Devoir à la maison

Devoir à rendre pour le :

— lundi 29 mai à midi.

Problème.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Il est connu que, si une dérivé n-ième de f est identiquement nulle sur $\mathbf{R}$, alors f est une fonction polynomiale (de degré $\leqslant n-1$). Le but de ce problème est de faire démontrer le résultat plus subtil suivant.

Théorème. *Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. On suppose que pour tout $x \in \mathbf{R}$ il existe un entier n, dépendant éventuellement de x, tel que $f^{(n)}(x) = 0$. Alors f est une fonction polynomiale.*

I. Soit $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction indéfiniment dérivable. Si I est un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$, on dit que g est un *polynôme sur* I s'il existe un polynôme $p(X) \in \mathbf{R}[X]$ tel que $g(x) = p(x)$ pour tout $x \in I$.

Faisons d'abord la remarque suivante. Soit n un entier $\geqslant 1$. Soit g une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. Alors par des arguments élémentaires de dérivation et de primitivation, on voit que g est un polynôme sur I de degré $\leqslant n-1$ si, et seulement si, $g^{(n)}$ est identiquement nulle sur I ; auquel cas $g^{(p)}$ est identiquement nulle sur I pour tout entier $p \geqslant n$.

1°) Soient I_1 et I_2 deux intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ tels que $I_1 \cap I_2$ soit non vide. Montrer que si g est un polynôme sur I_1 et un polynôme sur I_2, c'est un polynôme sur $I_1 \cup I_2$.

L'hypothèse $I_1 \cap I_2 \neq \varnothing$ implique par convexité que $I_1 \cup I_2$ est un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Par la remarque préliminaire, il existe sur I_1 (resp. sur I_2) un entier n_1 (resp. n_2) pour lequel $g^{(n_1)}$ est identiquement nulle sur I_1 (resp. pour lequel $g^{(n_2)}$ est identiquement nulle sur I_2). En prenant $n = \max\{n_1; n_2\}$ et $I = I_1 \cup I_2$, la remarque permet de voir que g est un polynôme sur I, de degré $\leqslant n-1$.

2°) Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. On suppose que pour tout $x \in I$ il existe un intervalle ouvert I_x non vide tel que g soit un polynôme sur I_x. Montrer qu'alors g est un polynôme sur I.

Choisissons $x_0 \in I$. Par hypothèse, il existe $n \geqslant 0$ tel que $g^{(n)}$ est identiquement nulle au voisinage de x_0. Montrons que $g^{(n)}$ est identiquement nulle sur I tout entier. Par l'absurde, supposons qu'il existe des $x \in I$, par exemple à droite de x_0, tels que $g^{(n)}(x) \neq 0$. Soit x_1 la borne inférieure de ces x. On a $x_1 > x_0$; de plus $g^{(n)}(y) = 0$ pour tout $y \in]x_0; x_1[$. D'autre part, il existe un intervalle ouvert I_{x_1} contenant x_1 tel que g soit un polynôme sur I_{x_1}. Ainsi $g^{(n)}$ est polynôme sur I_{x_1} qui est identiquement nul sur $I_{x_1} \cap]x_0; x_1[$, donc en une infinité de points. Donc le polynôme $g^{(n)}$ est identiquement nul sur tout I_{x_1}, ce qui contredit la définition de x_1.

3°) Soient $a < b < c$. On suppose que g est un polynôme sur $]a; b[$ et un polynôme sur $]b; c[$. Montrer qu'alors g est un polynôme sur $]a; c[$.

En effet, il existe un entier n_1 (resp. n_2) pour lequel $g^{(n_1)}$ est identiquement nulle sur $]a; b[$, donc par continuité sur $]a; b]$ (resp. pour lequel $g^{(n_2)}$ est identiquement nulle sur $]b; c[$, donc par continuité sur $[b; c[$). En prenant $n = \max\{n_1; n_2\}$, on voit que g est un polynôme sur $]a; c[$, de degré $\leqslant n - 1$.

II. Soit f une fonction satisfaisant aux hypothèses du théorème. Soit G l'ouvert des $x \in \mathbf{R}$ tels qu'il existe un intervalle ouvert I_x contenant x et sur lequel f soit un polynôme. Soit F le fermé complémentaire de G dans $\mathbf{R}$. Par l'absurde supposons que F n'est pas vide.

1°) Montrer que F n'a pas de point isolé.

Car, si b était un tel point il existerait $a < b < c$ tels que $]a; b[$ et $]b; c[$ seraient contenus dans G. D'après la définition de G et **I.** 2°), f serait un polynôme sur $]a; b[$ et sur $]b; c[$, donc un polynôme sur $]a; c[$ d'après **I.** 3°) ; donc b serait dans G et non dans F.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, soit

$$F_n = \{x \in F : f^{(n)}(x) = 0\}.$$

2°) Montrer qu'il existe un intervalle ouvert J de $\mathbf{R}$ et un entier N tels que

$$F \cap J \text{ n'est pas vide et } F \cap J \subset F_N.$$

Au titre de préimage d'un fermé par une application continue, chaque F_n est fermé dans F (qui est lui-même complet car fermé dans $\mathbf{R}$) et, par hypothèse sur la fonction f on a : $F = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n$. D'après le théorème de Baire appliqué dans F, l'un au moins des F_n, disons F_N, est d'intérieur non vide dans F. L'énoncé en découle car un ouvert relatif de F est la trace sur F d'un ouvert de $\mathbf{R}$, et contient donc une intersection $F \cap J$ pour un intervalle ouvert J de $\mathbf{R}$ convenable.

3°) Montrer qu'en fait $F \cap J \subset F_n$ pour tout $n \geqslant N$.

On le prouve par récurrence sur $n \geqslant N$. Soit $x \in F \cap J$. D'après **II.** 1°), le point x n'est pas isolé dans F, donc il existe une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ dans $F \cap J$ ne prenant pas la valeur x et de limite x. Par hypothèse de récurrence, on a $F \cap J \subset F_n$ donc $f^{(n)}(x_k) = 0 = f^{(n)}(x)$ pour tout k. Par conséquent

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{f^{(n)}(x_k) - f^{(n)}(x)}{x_k - x} = 0,$$

et $x \in F_{n+1}$.

4°) Montrer que chaque F_n est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$. En déduire que $F \cap J$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$.

Chaque F_n est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$, car le fait que $f^{(n)}$ est identiquement nulle sur un intervalle ouvert non vide I implique $I \subset G$, donc que I ne coupe pas F, et donc pas F_n. Il en résulte que $F \cap J$ est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$, car contenu dans F_N qui est d'intérieur vide dans $\mathbf{R}$.

5°) Montrer que si J_0 est l'un des intervalles ouverts composantes connexes de l'ouvert $G \cap J$, alors pour tout $x \in J_0$ on a : $f^{(N)}(x) = 0$ (on pourra considérer un point de $(\overline{J_0} \setminus J_0) \cap J$).

Maintenant étudions $J = (G \cap J) \cup (F \cap J)$; $F \cap J$ n'est pas vide, et aussi $G \cap J$ est un ouvert non vide de $\mathbf{R}$ car $F \cap J \neq J$, n'ayant pas d'intérieur dans $\mathbf{R}$. Donc $G \cap J$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints, qui sont ses composantes connexes. Soit J_0 l'une d'entre elles. Puisque $F \cap J \neq \varnothing$, on a $J_0 \neq J$ donc il existe $x_0 \in (\overline{J_0} \setminus J_0) \cap J$. Nécessairement $x_0 \in F \cap J$, donc d'après **II.** 3°) on a $f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \geqslant N$. D'autre part, d'après **I.** 2°), f est un polynôme sur J_0 car $J_0 \subset G$; soit p ce polynôme. Par continuité de f, on a $p^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) = 0$ pour tout $n \geqslant N$; d'après la formule de Taylor des polynômes au point x_0, on a : $p^{(N)}(x) = 0$ pour tout $x \in J_0$. Donc $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout $x \in J_0$.

6°) En déduire que, pour tout $x \in J$, on a : $f^{(N)}(x) = 0$.

Ainsi, $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout $x \in F \cap J$ car $F \cap J \subset F_N$, et $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout $x \in G \cap J$ car on vient de le voir sur chaque composante connexe de $G \cap J$. Par conséquent $f^{(N)}(x) = 0$ pour tout $x \in J$ et donc f est un polynôme sur J.

7°) Conclure.

Mais ceci est contradictoire avec le fait que $F \cap J$ n'est pas vide.

Exercice.

Dans cet exercice, les algèbres de Banach – sauf $B(A)$ ci-dessous – sont commutatives, unitaires et les morphismes d'algèbres envoient unité sur unité.

Soit A une algèbre de Banach commutative. On note $\mathrm{Rad}(A)$ l'intersection des idéaux maximaux de A. De façon équivalente, $\mathrm{Rad}(A)$ est l'intersection des $\ker(\chi)$, pour χ parcourant l'ensemble $\widehat{A}$ des caractères de A. On dit que A est *semi-simple* si $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$.

1°) Soit $A = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, munie de la norme $|| - ||_\infty$ de la convergence uniforme.

a) Montrer que A elle-même est semi-simple.

Soit a une fonction dans A. Dire que a est dans le radical de A, c'est dire que tous les caractères de A s'annulent sur a. Mais comme par le cours, ces caractères sont les évaluations en les points de $[0;1]$, c'est aussi dire que a est identiquement nulle. Bref, $\mathrm{Rad}(A) = \{0\}$, soit A est semi-simple, dans ce cas.

b) On note $B(A)$ la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach des opérateurs bornés $A \to A$. Pour $\phi \in B(A)$, on désigne par $\overline{\mathbf{C}[\phi]}$ l'adhérence dans $B(A)$ de la sous-algèbre des polynômes en ϕ. Soit $\phi \in B(A)$ l'opérateur « de primitivation » défini par

$$\phi(a) : t \mapsto \int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0,1],\ a \in A).$$

Montrer que

$$|\phi^n(a)(t)| \leqslant ||a||_\infty \frac{t^n}{n!} \quad (t \in [0,1],\ a \in A).$$

On fait cette preuve par récurrence sur n, l'initalisation pour $n = 0$ ou 1 étant facile :

$$|\phi(a)(t)| = |\int_0^t a(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant \int_0^t |a(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant ||a||_\infty t.$$

Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$|\phi^n(a)(t)| = |\int_0^t \phi^{n-1}(a)(s)\,\mathrm{d}s| \leqslant \int_0^t |\phi^{n-1}(a)(s)|\,\mathrm{d}s,$$

et l'assertion de récurrence au rang n permet d'écrire :

$$\int_0^t |\phi^{n-1}(a)(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t ||a||_\infty \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}s = ||a||_\infty \frac{t^n}{n!},$$

ce qui fait conclure.

c) En déduire que $\phi \in \mathrm{Rad}(\overline{\mathbf{C}[\phi]})$.

Ainsi pour toute $a \in A$ on a : $\| \phi^n(a) \|_\infty \leqslant \dfrac{||a||_\infty}{n!}$; ce qui peut se reformuler en termes de norme d'opérateur par : $\| \phi^n \| \leqslant \frac{1}{n!}$; cette norme est celle qu'on utilise sur $\overline{\mathbf{C}[\phi]}$. La formule du rayon spectral $\lim\limits_{n\to\infty} \| \phi^n \|^{\frac{1}{n}} = \rho(\phi)$ dit alors ici que le rayon spectral $\rho(\phi)$ de ϕ dans $\overline{\mathbf{C}[\phi]}$ vaut 0 car par exemple $n! \geqslant (\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}$, et donc $(n!)^{\frac{1}{n}} \geqslant (\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}$. Bref, $\mathrm{sp}_{\overline{\mathbf{C}[\phi]}}(\phi) = \{0\}$ et comme les valeurs des caractères de $\overline{\mathbf{C}[\phi]}$ sur ϕ sont à valeurs dans $\mathrm{sp}_{\overline{\mathbf{C}[\phi]}}(\phi) = \{0\}$, on en déduit que pour tout $\chi \in \widehat{\overline{\mathbf{C}[\phi]}}$, on a $\chi(\phi) = 0$;soit $\phi \in \mathrm{Rad}(\overline{\mathbf{C}[\phi]})$.

2°) Soit $\phi : A \to B$ un morphisme d'algèbres de Banach commutatives. On suppose B semi-simple. En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que ϕ est continue.

Soit ϕ un homomorphisme unitaire de $\mathbf{C}$-algèbres $A \to B$. Il s'agit de voir que ϕ est continu en utilisant (comme suggéré) le critère du graphe fermé. Comme par linéarité il suffit de vérifier la continuité en 0, on se donne une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ dans A telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ et telle que la suite des $\phi(x_n)$ converge, disons vers $y \in B$. Le critère requiert de voir que $y = 0$, ce qui par semi-simplicité de B peut se vérifier en prouvant que pour tout $\chi \in \widehat{B}$, on a : $\chi(y) = 0$. Pour $\chi \in \widehat{B}$ donné, la fonction $\phi^*(\chi) = \chi \circ \phi$ est nulle ou est un caractère de A : on rappelle que les axiomes sont purement algébriques, mais qu'on a automatiquement continuité des caractères. Ceci permet d'écrire :

$$\chi(y) = \chi\big(\lim_{n\to\infty} \phi(x_n)\big) = \lim_{n\to\infty} (\chi \circ \phi)(x_n) = 0,$$

d'où la conclusion.

3°) On note $A = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbf{C})$ la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions indéfiniment dérivables sur $[0,1]$. L'objectif de cette question est de montrer qu'on ne peut pas mettre de norme d'algèbre de Banach sur A. On raisonne par l'absurde en supposant qu'une telle norme, disons $||-||$, existe.

a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que : $||a||_\infty \leqslant C \cdot ||a|| \quad (a \in A)$.

Cela ressemble grandement à une inégalité de continuité et c'en est une, en effet. L'application $a \mapsto a$ de A (munie de $||-||$) vers $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{C})$ (munie de $||-||_\infty$) est un homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres, de but une $\mathbf{C}$-algèbre de Banach semi-simple par 1°) a), donc est une application continue par 2°). Cette continuité fournit l'inégalité demandée.

b) On note $\delta : A \to A$, $a \mapsto a'$ l'opérateur de dérivation. En utilisant a) et, à nouveau, le théorème du graphe fermé, montrer que δ est continue ; autrement dit qu'il existe $D > 0$ tel que : $||a'|| \leqslant D \cdot ||a|| \quad (a \in A)$.

Il suffit de prouver que l'endomorphisme de dérivation est une application continue de A dans A. Pour cela, on utilise à nouveau le critère du graphe fermé et on se donne une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ et g dans A telles que $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n|| = 0$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} ||f_n' - g|| = 0$; il s'agit de voir que g est la fonction nulle. Soient $x, y \in [0;1]$ et soit $n \geqslant 1$. On a :

$$\Big|\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant \Big|\int_x^y (g - f_n')(t)\,\mathrm{d}t\Big| + \Big|\int_x^y f_n'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant |y-x| \, \| g - f_n' \|_\infty + 2 \, \| f_n \|_\infty .$$

On utilise a) pour remplacer les normes de convergence uniforme dans le majorant par la norme mystérieuse $||-||$ et on fait $n \to \infty$ pour en tirer que g est une fonction de classe C^∞ telle que $\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tous $x, y \in [0;1]$, ce qui permet de conclure.

c) Conclure en considérant l'élément $a : t \mapsto e^{2Dt} \in A$.

Cette question est un cadeau : en dérivant la fonction proposée, on aboutit à la contradiction $2D \leqslant D$. On aurait aussi pu prendre une fonction bornée mais oscillant beacoup.

Exercice.

Dans cet exercice, on utilisera librement la version de dimension infinie du théorème de Krein-Milman. Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé et K un convexe compact non vide de E. On veut montrer que pour tout $x \in K$, il existe une mesure de probabilité μ_x sur K, supportée sur l'adhérence $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$ des points extrémaux $\mathrm{Extr}(K)$, telle que pour toute forme linéaire continue $f : E \to \mathbf{R}$ on ait :

$$f(x) = \int_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} f(e)\,\mathrm{d}\mu_x(e).$$

Par le théorème de représentation de Riesz, cela revient à montrer qu'il existe une forme linéaire F_x sur $\mathcal{C}(\overline{\mathrm{Extr}(K)}, \mathbf{R})$ qui est positive (*i.e.* $\geqslant 0$ sur les fonctions $\geqslant 0$) telle que $F_x(1) = 1$ et que pour toute forme linéaire continue $f : E \to \mathbf{R}$ on ait

$$f(x) = F_x(f\,|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}}).$$

On note L (resp. L_e) l'ensemble des restrictions à K (resp. à $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$) des formes linéaires continues $E \to \mathbf{R}$.

1°) Montrer que toute $f \in L$ atteint son maximum et son minimum sur $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$. En déduire que l'application de restriction $r :=: -|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} : L \to L_e$ est un isomorphisme.

Notons α le maximum de f sur K, disons atteint en $x \in K$, et notons β la borne supérieure de f sur $\mathrm{Extr}(K)$. Il s'agit de voir que $\beta = \alpha$. Supposons que ce ne soit pas le cas, et donc que $\beta < \alpha$. Par Krein-Milman, on peut écrire $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ où chaque x_n est une combinaison convexe finie $\sum_n \lambda_{e_n} e_n$ pour des points extrémaux e_n et des coordonnées barycentriques λ_{e_n} convenables (et presque toutes nulles). Alors pour tout n, on a :

$$f(x_n) = \sum_n \lambda_{e_n} f(e_n) \leqslant (\sum_n \lambda_{e_n})\beta = \beta.$$

Par passage à la limite et continuité de f, on en déduirait que $\alpha = f(x) \leqslant \beta < \alpha$, ce qui est absurde. Le cas du minimum se traite de la même façon.

L'application r est linéaire et surjective par construction. Elle est injective car si $f, f' \in L$ sont telles que $f - f'$ est nulle sur $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$, donc sur $\mathrm{Extr}(K)$, alors $f - f'$ est nulle sur K d'après ce qui précède.

2°) Pour tout $x \in K$, notons

$$\tilde{F}_x : L_e \overset{r^{-1}}{\to} L \overset{\mathrm{ev}_x}{\to} \mathbf{R},\ f\,|_{\overline{\mathrm{Extr}(K)}} \mapsto f(x)$$

l'application d'évaluation. Montrer que si L_e contient la fonction constante f_0 égale à 1 sur $\overline{\mathrm{Extr}(K)}$ alors $\tilde{F}_x(f_0) = 1$. Si L_e ne contient pas f_0, on remplace L_e par $L_e \oplus \mathbf{R} f_0$ et on pose $\tilde{F}_x(f_0) = 1$.

Si $f_0 \in L_e$, c'est le même argument que ci-dessus : toute $f \in L$ d'image une fonction constante $\tilde{\lambda}$ dans L_e est constante sur K.

3°) Montrer que $\tilde{F}_x : L_e \to \mathbf{R}$ s'étend en une forme linéaire $F_x : \mathcal{C}(K) \to \mathbf{R}$ ayant les propriétés souhaitées.

Par construction L_e est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\overline{\text{Extr}(K)})$ et pour tout $r(f) \in L_e$, on a

$$\tilde{F}_x = f(x) \leqslant ||f||_\infty = ||r(f)||_\infty \text{ (toujours par 1°)).}$$

Ainsi, par Hahn-Banach, $\tilde{F}_x$ se prolonge en une forme linéaire $F_x : \mathcal{C}(\overline{\text{Extr}(K)}) \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}(\overline{\text{Extr}(K)})$, on ait $F_x(f) \leqslant ||f||_\infty$. On a bien $F_x(1) = \tilde{F}_x(f_0) = 1$. Il faut vérifier la positivité : s'il existe $f \in \mathcal{C}(\overline{\text{Extr}(K)})$ telle que $f \geqslant 0$ mais $F_x(f) < 0$ alors, quitte à remplacer f par $\frac{f}{||f||_\infty}$, on se ramène à $0 \leqslant f \leqslant 1$ et on a $F_x(f_0 - f) = 1 - F_x(f) > 1$ alors que $F_x(f_0 - f) \leqslant ||f_0 - f||_\infty \leqslant 1$.

4°) Quand E est de dimension finie, expliciter la mesure μ_x comme un barycentre convenable.

En dimension finie, par Krein-Milman un point $x \in K$ s'écrit comme combinaison convexe (finie) de points extrémaux (sans passage à la limite). Une mesure convenable est la somme des masses de Dirac centrées aux points extrémaux concernés, avec les coefficients barycentriques correspondants. En maths, cela donne : si $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i e_i$ avec e_i extrémal, alors la mesure atomique $\mu_x = \sum_{i=1}^p \alpha_i \delta_{e_i}$ convient car pour toute $f \in E'$, on a par linéarité :

$$f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^p \alpha_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f(e_i) = \Big(\sum_{i=1}^p \alpha_i \delta_{e_i}\Big)(f) = \mu_x(f),$$

sachant que $\mu_x(f) = \displaystyle\int f \, \mathrm{d}\mu_x$.