MAT 452 **2017**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle
Contrôle final
Vendredi 9 juin 2017, 9h-12h

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice. Soit E un espace de Banach et soit F un espace vectoriel normé. Soit $(L_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'applications linéaires continues $E \to F$ telles que pour tout $x \in E$ la suite correspondante $\big(L_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$de vecteurs de F soit convergente, disons de limite $L(x)$. Montrer que l'application $L : E \to F$ ainsi obtenue est linéaire et continue.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et soit G un groupe abélien. On note $B(E)$ l'ensemble des opérateurs bornés de E dans lui-même et $\mathrm{Aut}(E)$ le groupe des inversibles de $B(E)$ pour la composition. On se donne $\pi : G \to \mathrm{Aut}(E)$ un homomorphisme de groupes, c'est-à-dire une application satisfaisant $\pi(gg') = \pi(g) \circ \pi(g')$ pour tous $g, g' \in G$.

On se donne une partie convexe, compacte, non vide A dans E. On suppose que A est stable sous l'action de G, i.e. telle que $\pi(g)(A) \subseteq A$ pour tout $g \in G$. On veut démontrer que l'action de G admet un point fixe dans A, c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in A$ tel que $\pi(g)(x) = x$ pour tout $g \in G$ (théorème de Markov-Kakutani).

1°) Pour tout $g \in G$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $M_{n,g} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \pi(g^i) \in B(E)$. Justifier que A est stable sous chaque opérateur $M_{n,g}$.

2°) On note G^* l'ensemble des compositions finies d'opérateurs de la forme $M_{n,g}$. Justifier que les opérateurs dans G^* commutent entre eux et que pour tout $T \in G^*$ on a $T(A) \subseteq A$.

3°) Soit $k \geqslant 1$ un entier et soient $T_1, T_2, \dots T_k \in G^*$. On note $S = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k$. Prouver que l'on a $S(A) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} T_i(A)$.

4°) En déduire que $\displaystyle\bigcap_{T\in G^*} T(A)$ est non vide.

5°) Conclure en montrant que tout élément de $\bigcap_{T\in G^*} T(A)$ est un point fixe sous G. Pour z dans cette intersection et $g \in G$, on pourra estimer la distance de z à $\pi(g)(z)$ en utilisant les opérateurs $T = M_{n,g}$ comme ci-dessus.

Problème. Dans ce qui suit, si A une algèbre de Banach commutative avec unité e, on note $\widehat{A}$ son spectre de Gelfand. C'est un espace muni d'une topologie qui en fait un espace compact dans lequel une suite d'éléments $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers le caractère $\chi \in \widehat{A}$ si, et seulement si, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_n(x) = \chi(x)$ pour tout $x \in A$. Ainsi tous les résultats de ce cours et du cours de tronc commun sur l'espace des fonctions continues sur un espace compact (compacité par Ascoli, densité par Stone-Weierstrass réel et complexe etc.) sont susceptibles d'être utilisés en ce qui concerne la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach $\mathcal{C}(\widehat{A}, \mathbf{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur $\widehat{A}$, munie de la norme $\| - \|_\infty$ de la convergence uniforme.

I. Tout d'abord, introduisons et étudions sommairement la notion suivante.

Définition. *Une* C^*-algèbre (unitaire) *est une algèbre de Banach unitaire complexe A, disons de norme $\| - \|$, munie d'une application continue $* : A \to A; a \mapsto a^*$ qui est*

- *antilinéaire, i.e. additive et telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ pour tous $\lambda \in \mathbf{C}$ et $a \in A$;*
- *telle que $(ab)^* = b^* a^*$ et $a^{**} = a$ pour tous $a, b \in A$;*
- *et telle que $\| a^* a \| = \| a \|^2$ pour tout $a \in A$.*

1°) Justifier que dans une C^*-algèbre (unitaire) comme ci-dessus, on a $\| x \| = \| x^* \|$ pour tout $x \in A$.

2°) Justifier que l'algèbre $B(H)$ des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert complexe H dans lui-même est une C^*-algèbre pour l'opération $*$ qui à $T \in B(H)$ attache son adjoint T^*.

3°) Soit X un espace compact. Justifier que $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ munie de la norme $\| - \|_\infty$ admet une structure naturelle de C^*-algèbre commutative.

II. Le but de ce qui suit est de démontrer que dans le cas commutatif, le dernier exemple, proposé dans 3°), est en quelque sorte universel. Plus précisément, on veut prouver l'énoncé suivant.

Théorème. *Soit A une C^*-algèbre (unitaire) commutative, de spectre de Gelfand $X = \widehat{A}$. Alors la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : A \to \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ est un isomorphisme qui est isométrique et compatible aux involutions $*$, i.e. tel que $\mathcal{G}_{x^*} = \overline{\mathcal{G}_x}$ pour tout $x \in A$.*

On se place désormais dans le contexte de l'énoncé du théorème.

1°) Justifier la convergence de la série exponentielle $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, ainsi que l'inégalité : $\| e^z \| \leqslant e^{\|z\|}$ pour tout $z \in A$. Prouver aussi que $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous $x, y \in A$.

On dit qu'un élément $z \in A$ est *auto-adjoint* s'il satisfait $z^* = z$ et qu'il est *unitaire* s'il est inversible d'inverse z^*.

2°) Montrer que si x est auto-adjoint, alors $u_x = e^{itx}$ est unitaire pour tout $t \in \mathbf{R}$ et qu'on a $|\chi(u_x)| \leqslant 1$ pour tout $\chi \in X$.

3°) En déduire que dans ce cas $\chi(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $\chi \in X$.

4°) En déduire la compatibilité de la transformation de Gelfand aux involutions $*$ annoncée dans le théorème.

5°) Prouver que la transformation de Gelfand est isométrique.

6°) Prouver que la transformation de Gelfand est d'image dense.

7°) Conclure.