MAT 452 **2017**
École polytechnique

Analyse fonctionnelle
Contrôle final
Vendredi 9 juin 2017, 9h-12h

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice. Soit E un espace de Banach et soit F un espace vectoriel normé. Soit $(L_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'applications linéaires continues $E \to F$ telles que pour tout $x \in E$ la suite correspondante $\big(L_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ de vecteurs de F soit convergente, disons de limite $L(x)$. Montrer que l'application $L : E \to F$ ainsi obtenue est linéaire et continue.

Il est clair que L est une application linéaire de E dans F : pour tous scalaires λ, λ' et tous vecteurs $x, x' \in E$ on a :

$$L(\lambda x+\lambda' x') = \lim_{n\to\infty} L_n(\lambda x+\lambda' x') = \lim_{n\to\infty} \lambda L_n(x)+\lambda' L_n(x') = \lambda \lim_{n\to\infty} L_n(x)+\lambda' \lim_{n\to\infty} L_n(x') = \lambda L(x)+\lambda' L(x').$$

Pour tout $x \in E$, la suite $\big(L_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans F ; en particulier, elle est bornée :

$$\sup_{n\geqslant 1} \| L_n(x) \| < +\infty.$$

Par le théorème de Banach-Steinhaus, cela implique que $\sup\limits_{n\geqslant 1} |||L_n||| < +\infty$, autrement dit qu'il existe $M > 0$ tel que $|||L_n||| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi pour tout $x \in E$ et tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\| L_n(x) \| \leqslant M \cdot \| x \|,$$

et en passant à la limite quand n tend vers l'infini, on voit que L est continue de norme $\leqslant M$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel normé et soit G un groupe abélien. On note $B(E)$ l'ensemble des opérateurs bornés de E dans lui-même et $\mathrm{Aut}(E)$ le groupe des inversibles de $B(E)$ pour la composition. On se donne $\pi : G \to \mathrm{Aut}(E)$ un homomorphisme de groupes, c'est-à-dire une application satisfaisant $\pi(gg') = \pi(g) \circ \pi(g')$ pour tous $g, g' \in G$.

On se donne une partie convexe, compacte, non vide A dans E. On suppose que A est stable sous l'action de G, i.e. telle que $\pi(g)(A) \subseteq A$ pour tout $g \in G$. On veut démontrer que l'action de G admet un point fixe dans A, c'est-à-dire qu'il existe un point $x \in A$ tel que $\pi(g)(x) = x$ pour tout $g \in G$ (théorème de Markov-Kakutani).

1°) Pour tout $g \in G$ et tout entier $n \geqslant 1$, on note $M_{n,g} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \pi(g^i) \in B(E)$. Justifier que A est stable sous chaque opérateur $M_{n,g}$.

Soit $a \in A$. Son image par $M_{n,g}$ est l'isobarycentre des points $\pi(g^i)(a)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Chacun de ces points est dans A par G-stabilité de A et donc $M_{n,g}(a) \in A$ par convexité.

2°) On note G^* l'ensemble des compositions finies d'opérateurs de la forme $M_{n,g}$. Justifier que les opérateurs dans G^* commutent entre eux et que pour tout $T \in G^*$ on a $T(A) \subseteq A$.

La stabilité demandée provient directement de la stabilité précédente, par composition. Pour les commutations entre éléments de G^*, il suffit de voir que les opérateurs $M_{n,g}$ commutent entre eux. Soient $g, h \in G$ et m, n des entiers $\geqslant 1$. Alors :

$$M_{m,g} \circ M_{n,h} = \Big(\frac{1}{m}\sum_{i=0}^{m-1} \pi(g^i)\Big) \circ \Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \pi(h^j)\Big) = \frac{1}{mn}\sum_{i,j} \pi(g^i) \circ \pi(h^j) = \frac{1}{mn}\sum_{i,j} \pi(g^i h^j),$$

où pour la dernière égalité on a utilisé le fait que π est un homomorphisme de groupes. Dans le dernier membre de l'égalité, comme le groupe G est abélien on peut écrire $\pi(h^j g^i)$ au lieu de $\pi(g^i h^j)$, et en remontant les égalités on obtient bien que $M_{m,g} \circ M_{n,h} = M_{n,h} \circ M_{m,g}$.

3°) Soit $k \geqslant 1$ un entier et soient $T_1, T_2, \dots T_k \in G^*$. On note $S = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_k$. Prouver que l'on a $S(A) \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k} T_i(A)$.

Comme les T_i commutent entre eux, on peut écrire la composition des T_i définissant S dans l'ordre qu'on veut ; une écriture de S commençant par T_i montre que $S(A) \subseteq T_i(A)$; on fait varier i pour conclure.

4°) En déduire que $\displaystyle\bigcap_{T \in G^*} T(A)$ est non vide.

C'est une conséquence de la compacité de A (précisément le passage au complémentaire de la possibilité d'extraire un sous-recouvrement fini de tout recouvrement ouvert), puisque que la question précédente fait voir que les intersections partielles indéxées par les parties finies de G^* sont non vides.

5°) Conclure en montrant que tout élément de $\bigcap_{T \in G^*} T(A)$ est un point fixe sous G. Pour z dans cette intersection et $g \in G$, on pourra estimer la distance de z à $\pi(g)(z)$ en utilisant les opérateurs $T = M_{n,g}$ comme ci-dessus.

Soit $z \in \bigcap_{T \in G^*} T(A)$ comme suggéré. Pour $g \in G$ et n entier $\geqslant 1$, il existe $x \in A$ tel que

$$z = M_{n,g}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \pi(g^i)(x).$$

Alors, puisque π est un homomorphisme de groupes, on a $\pi(g)\big(\pi(g^i)(x)\big) = \pi(g^{i+1})(x)$, et par simplification télescopique, on a :

$$\pi(g)(z) - z = \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=0}^{n-1} \pi(g^{i+1})(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \pi(g^i)(x)\Big) = \frac{1}{n}\big(\pi(g^n)(x) - x\big).$$

Comme la partie A est compacte, elle contenue dans une boule centrée à l'origine, disons de rayon R, de sorte que pour tout $n \geqslant 1$ on a : $\parallel \pi(g)(z) - z \parallel \leqslant \dfrac{1}{n}\big(\parallel x \parallel + \parallel \pi(g^n)(x) \parallel\big) \leqslant \dfrac{2R}{n}$, puisque $\pi(g^n)(x) \in A$ par G-stabilité de A. Il reste à faire tendre n vers l'infini pour voir que $\pi(g)(z) = z$ pour tout $g \in G$, et donc que tout élément de $\bigcap_{T \in G^*} T(A) \neq \varnothing$ est un point fixe sous l'action du groupe abélien G.

Problème. Dans ce qui suit, si A une algèbre de Banach commutative avec unité e, on note $\widehat{A}$ son spectre de Gelfand. C'est un espace muni d'une topologie qui en fait un espace compact dans lequel une suite d'éléments $(\chi_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers le caractère $\chi \in \widehat{A}$ si, et seulement si, on a $\lim_{n\to\infty} \chi_n(x) = \chi(x)$ pour tout $x \in A$. Ainsi tous les résultats de ce cours et du cours de tronc commun sur l'espace des fonctions continues sur un espace compact (compacité par Ascoli, densité par Stone-Weierstrass réel et complexe etc.) sont susceptibles d'être utilisés en ce qui concerne la $\mathbf{C}$-algèbre de Banach $\mathcal{C}(\widehat{A}, \mathbf{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur $\widehat{A}$, munie de la norme $\| - \|_\infty$ de la convergence uniforme.

I. Tout d'abord, introduisons et étudions sommairement la notion suivante.

Définition. *Une* C^*-algèbre (unitaire) *est une algèbre de Banach unitaire complexe A, disons de norme $\| - \|$, munie d'une application continue $* : A \to A; a \mapsto a^*$ qui est*

- *antilinéaire, i.e. additive et telle que $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$ pour tous $\lambda \in \mathbf{C}$ et $a \in A$;*
- *telle que $(ab)^* = b^* a^*$ et $a^{**} = a$ pour tous $a, b \in A$;*
- *et telle que $\| a^* a \| = \| a \|^2$ pour tout $a \in A$.*

1°) Justifier que dans une C^*-algèbre (unitaire) comme ci-dessus, on a $\| x \| = \| x^* \|$ pour tout $x \in A$.

C'est évident pour $x = 0$, cas désormais exclu. Par sous-multiplicativité d'une norme d'algèbre de Banach (par définition) et par le troisième point • ci-dessus, on a :

$$\| x \|^2 \leqslant \| x \| \cdot \| x^* \|,$$

soit $\| x \| \leqslant \| x^* \|$ pour tout x. L'inégalité complémentaire s'obtient en appliquant l'involution $*$ aux arguments des normes et en utilisant $x^{**} = x$.

2°) Justifier que l'algèbre $B(H)$ des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert complexe H dans lui-même est une C^*-algèbre pour l'opération $*$ qui à $T \in B(H)$ attache son adjoint T^*.

On sait déjà que $B(H)$ est une algèbre de Banach pour la norme d'opérateur. Rappelons que l'adjoint T^* de $T \in B(H)$ est défini et caractérisé par : $\langle Tx|y\rangle = \langle x|T^*y\rangle$ pour tous $x, y \in H$, où $\langle -|-\rangle$ désigne le produit scalaire hermitien de H. Le premier point • à vérifier provient de ce que $\langle -|-\rangle$ est antilinéaire par rapport l'un de ses arguments et linéaire par rapport à l'autre. Le second point vient du fait qu'intervertir les arguments de $\langle -|-\rangle$ revient à conjuguer sa valeur :

$$\langle x|T^{**}y\rangle = \langle T^*x|y\rangle = \overline{\langle y|T^*x\rangle} = \overline{\langle Ty|x\rangle} = \langle x|Ty\rangle.$$

Par ailleurs, la norme d'opérateur $|||T|||$ de T se calcule ainsi : $|||T||| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |\langle Tx|y\rangle|$. Pour $\| x \| = 1$, on a : $\| Tx \|^2 = \langle Tx|Tx\rangle = \langle T^*Tx|x\rangle \leqslant |||T^*T|||$, ce qui fournit déjà $|||T|||^2 \leqslant |||T^*T|||$. Dans l'autre sens, pour $\| x \| = \| y \| = 1$, on a $|\langle T^*Tx|y\rangle| = |\langle Tx|Yy\rangle| \leqslant \| Tx \| \cdot \| Ty \| \leqslant |||T|||^2$, et on passe au sup sur x et y.

3°) Soit X un espace compact. Justifier que $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ munie de la norme $\| - \|_\infty$ admet une structure naturelle de C^*-algèbre commutative.

On sait déjà que $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ est une algèbre de Banach pour la norme de la convergence uniforme. Ici l'involution $*$ à choisir est l'application qui conjugue point par point les valeurs des fonctions. Avec cette involution, les deux premiers points • à vérifier sont évidents, et le dernier provient de :

$$\| f\bar{f} = |f|^2 \|_\infty = \sup_X |f|^2 = (\sup_X |f|)^2 = (\| f \|_\infty)^2.$$

II. Le but de ce qui suit est de démontrer que dans le cas commutatif, le dernier exemple, proposé dans 3°), est en quelque sorte universel. Plus précisément, on veut prouver l'énoncé suivant.

Théorème. *Soit A une C^*-algèbre (unitaire) commutative, de spectre de Gelfand $X = \widehat{A}$. Alors la transformation de Gelfand $\mathcal{G} : A \to \mathcal{C}(X, \mathbf{C})$ est un isomorphisme qui est isométrique et compatible aux involutions $*$, i.e. tel que $\mathcal{G}_{x^*} = \overline{\mathcal{G}_x}$ pour tout $x \in A$.*

On se place désormais dans le contexte de l'énoncé du théorème.

1°) Justifier la convergence de la série exponentielle $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, ainsi que l'inégalité : $\| e^z \| \leqslant e^{\|z\|}$ pour tout $z \in A$. Prouver aussi que $e^{x+y} = e^x e^y$ pour tous $x, y \in A$.

Pour tout $z \in A$, on a par sous-multiplicativité de la norme de A : $\| \frac{z^n}{n!} \| \leqslant \frac{\|z\|^n}{n!}$; d'où la convergence absolue de la série exponentielle dans A, car on sait que la série exponentielle numérique converge normalement. De plus, pour tout entier $N \geqslant 1$, on a :

$$\| \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \| \leqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{\| z \|^n}{n!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| z \|^n}{n!} = e^{\|z\|},$$

et on obtient l'inégalité demandée en faisant $N \to \infty$. Par convergence absolue, on peut réarranger l'ordre des facteurs dans le calcul des termes de la série produit $e^x e^y$; pour l'indice n, et puisque x et y commutent car A est commutative, on peut utiliser la formule du binôme, qui fournit :

$$\frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{p+q=n} \frac{x^p}{p!} \frac{y^q}{q!},$$

ce qui identifie les termes des deux séries e^{x+y} et $e^x e^y$ à comparer.

On dit qu'un élément $z \in A$ est *auto-adjoint* s'il satisfait $z^* = z$ et qu'il est *unitaire* s'il est inversible d'inverse z^*.

2°) Montrer que si x est auto-adjoint, alors $u_x = e^{itx}$ est unitaire pour tout $t \in \mathbf{R}$ et qu'on a $|\chi(u_x)| \leqslant 1$ pour tout $\chi \in X$.

Pour commencer, c'est un calcul, qui utilise la continuité, l'antilinéarité de l'involution $*$ et son comportement vis-à-vis de la multiplication (sachant que A est commutative), ainsi que le fait que x est auto-adjoint :

$$(u_x)^* = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!})^* = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{(itx)^n}{n!})^* = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itx^*)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-itx)^n}{n!} = e^{-itx}.$$

Par la dernière formule de la question précédente, on sait que $e^{-itx} = (u_x)^*$ est l'inverse de $e^{itx} = u_x$, d'où l'unitarité de u_x pour tout x auto-adjoint et tout $t \in \mathbf{R}$. La troisième condition $\bullet$ sur les C^*-algèbres implique que $1 = \| e \|^2 = \| (u_x)^* u_x \| = (\| u_x \|)^2$, et donc $\| u_x \| = 1$. Ainsi le spectre de u_x est contenu dans le disque unité $\overline{D}$ de $\mathbf{C}$, et donc $|\chi(u_x)| \leqslant 1$ pour tout $\chi \in X$ puisque les valeurs des caractères de A sur u_x sont dans $\mathrm{sp}_A(u_x) \subseteq \overline{D}$.

3°) En déduire que dans ce cas $\chi(x) \in \mathbf{R}$ pour tout $\chi \in X$.

Un caractère est un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbre, et est automatiquement continu ; on peut donc écrire : $\chi(u_x) = \chi(e^{itx}) = e^{it\chi(x)}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ (quitte à développer l'exponentielle si besoin est pour s'en convaincre). Ainsi $|\chi(u_x)| = e^{\mathrm{Re}\left(it\chi(x)\right)} = e^{-t\mathrm{Im}\left(\chi(x)\right)}$. La condition $|\chi(u_x)| \leqslant 1$ pour tout $t \in \mathbf{R}$ impose donc $\mathrm{Im}\big(\chi(x)\big) = 0$ pour tout $\chi \in X$ dès que x est auto-adjoint.

4°) En déduire la compatibilité de la transformation de Gelfand aux involutions $*$ annoncée dans le théorème.

Pour l'instant, on n'a de bonnes informations que pour les x auto-adjoints, mais on s'y ramène en écrivant $x \in A$ quelconque sous la forme

$$x = \frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i},$$

l'intérêt étant que $\frac{x+x^*}{2}$ et $\frac{x-x^*}{2i}$ sont auto-adjoints. Alors :

$$\overline{\mathcal{G}_x}(\chi) = \overline{\mathcal{G}_x(\chi)} = \overline{\chi(\frac{x+x^*}{2} + i\frac{x-x^*}{2i})} = \overline{\chi(\frac{x+x^*}{2}) + i\chi(\frac{x-x^*}{2i})} = \chi(\frac{x+x^*}{2}) - i\chi(\frac{x-x^*}{2i}),$$

la dernière égalité étant justifiée par le fait que les valeurs de caractères sur les éléments auto-adjoints sont réelles. On continue :

$$\overline{\mathcal{G}_x}(\chi) = \chi(\frac{x+x^*}{2}) - i\chi(\frac{x-x^*}{2i}) = \chi(\frac{x+x^*}{2} - i\frac{x-x^*}{2i}) = \chi(x^*),$$

qui vaut bien $\mathcal{G}_{x^*}(\chi)$. On conclut en remarquant que ceci est vrai pour tout $\chi \in X$.

5°) Prouver que la transformation de Gelfand est isométrique.

On a $\| \mathcal{G}_x \|_\infty = \sup_{\chi \in X} |\mathcal{G}_x(\chi)| = \sup_{\chi\in X} |\chi(x)| = \rho(x)$, où $\rho(x)$ est le rayon spectral de x. La formule du rayon spectral dit par ailleurs que $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$. Pour z adjoint, la troisième condition $\bullet$ implique que que $\| z^2 \| = \| z \|^2$. Comme x^*x est auto-adjoint pour tout $x \in A$, on a : $\| (xx^*)^2 \| = \| xx^* \|^2$. Puisque A est commutative, le membre de gauche vaut aussi $\| (x^2)^* x^2 \| = \| x^2 \|^2$; et par la troisième condition $\bullet$, le membre de droite vaut $\| x \|^4$. En passant à la racine carrée, on obtient que $\| x^2 \| = \| x \|^2$ pour tout $x \in A$, donc $\| x^{2^n} \| = \| x \|^{2^n}$ pour tout entier $n \geqslant 0$ par récurrence. Finalement la formule du rayon spectrale donne $\rho(x) = \| x \|$, et en revenant au début on obtient bien : $\| \mathcal{G}_x \|_\infty = \| x \|$.

6°) Prouver que la transformation de Gelfand est d'image dense.

On applique pour cela la version complexe du théorème de Stone-Weierstrass à l'image de la transformation de Gelfand : $\{\mathcal{G}_x\}_{x\in A}$, dans $\mathcal{C}(X, \mathbf{C})$. Cette image est une $\mathbf{C}$-algèbre au titre d'image d'un homomorphisme d'une telle structure. Elle contient les constantes car $\mathcal{G}_e$ est la fonction constante égale à 1 (puisque tout caractère vaut 1 sur l'élément neutre e). Cette image est aussi stable par conjugaison puisqu'on a vu que $\overline{\mathcal{G}_x} = \mathcal{G}_{x^*}$. Enfin, elle sépare les points puisque dire que $\chi \neq \chi'$ dans X, c'est dire qu'il existe $x \in A$ tel que $\chi(x) \neq \chi'(x)$, autrement dit que $\mathcal{G}_x$ sépare χ et χ', soit $\mathcal{G}_x(\chi) \neq \mathcal{G}_x(\chi')$.

7°) Conclure.

On sait que $\mathcal{G}$ est continue et injective car isométrique. En montrant qu'elle est surjective, on aura terminé ; ceci découle de l'observation plus générale suivante : si E et F sont deux espaces de Banach et si $\phi : E \to F$ est une application isométrique d'image dense, alors ϕ est surjective. En effet, soit $y \in F$. Par densité, il existe $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans E telle que $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = y$. Par isométrie $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy dans E complet, donc converge, disons vers $x \in E$; et par continuité $\phi(x) = y$.