École polytechnique **2015-2016**

MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫

Examen de rattrapage du 12 octobre 2016
Durée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour valider ce rattrapage. La rédaction doit être concise et précise, et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et soit A un borélien de $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(A) > 1$. On se propose de montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que $x - y \in \mathbf{Z}$. Pour chaque partie B de $\mathbf{R}$ et chaque nombre réel z, on note

$$z + B = \{z + b : b \in B\}.$$

(1) Soit P l'intervalle $[0; 1[$. Prouver que $\lambda(A) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \lambda\big((n + A) \cap P\big)$.

(2) Montrer que les ensembles $n + A$ ne sont pas deux à deux disjoints quand n parcourt $\mathbf{Z}$.

(3) Conclure.

Exercice 2. On note $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ l'espace des (classes de) fonctions 2π-périodiques $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et telles que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty,$$

et on rappelle que cet espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \,\mathrm{d}t,$$

admet pour base hilbertienne la famille des fonctions $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour n parcourant $\mathbf{Z}$. On note :

$$H^+ = \{f \in H : \langle f|e_n\rangle = 0 \text{ pour tout } n < 0\}.$$

(1) Montrer que H^+ est fermé dans H et que $(e_n)_{n \geqslant 0}$ en est une base hilbertienne.

(2) Caractériser $(H^+)^\perp$ au moyen des fonctions $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

(3) Montrer que si $f \in H^+$ est à valeurs réelles, alors f est constante.

(4) Montrer que si $f \in H^+$ alors $t \mapsto e^{int} f(t)$ est dans H^+ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(5) Soit A un borélien de $[-\pi; \pi]$ et soit

$$V_A = \{f \in H^+ : f \text{ est nulle presque partout sur } A \text{ pour la mesure de Lebesgue}\}.$$

Justifier que V_A est sous-espace vectoriel fermé dans H^+.

(6) On note φ la projection de e_0 sur V_A. Prouver que $|\varphi|$ est constante.

(7) On suppose que A est non négligeable. Montrer que dans ce cas $V_A = \{0\}$.

Exercice 3. On se donne un nombre réel θ non multiple entier de 2π.

(1) Calculer la partie réelle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x$.

(2) Montrer que le théorème de convergence dominée s'applique aux sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{i(n+1)\theta}x^n$. Quelle identité cela fournit-il ?

(3) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log|2\sin(\frac{\theta}{2})|$.

(4) Montrer de même que pour tout $\theta \in]0;\pi[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$.

Exercice 4. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathscr{A})$ qui converge μ-presque partout sur X vers une fonction f sur X.

(1) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge en mesure vers f, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) = 0$.

On se donne p tel que $1 < p < +\infty$ et on note $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\|f_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 0$.

(2) Montrer que $\|f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M$.

(3) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a :

$$\int_A |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu \leqslant 2M\|\mathbf{1}_A\|_{\mathrm{L}^q}$$

où q est l'exposant conjugué de p.

(4) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f en norme L^1.

On vient de démontrer le théorème suivant : *soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathscr{A})$, uniformément bornée en norme L^p pour un exposant $p \in]1;+\infty[$, qui converge μ-presque partout vers une fonction f ; alors $f \in \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f en norme L^1.*

(5) Fournir un contre-exemple si la mesure μ est de masse totale infinie, par exemple si μ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.