**École polytechnique** **2015-2016**

**MAT 311 « Introduction à l'analyse réelle »**

**Examen de rattrapage du 12 octobre 2016**

**Durée : 2 heures**

**Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour valider ce rattrapage. La rédaction doit être concise et précise, et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

**Exercice 1.** Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$ et soit $A$ un borélien de $\mathbf{R}$ tel que $\lambda(A) > 1$. On se propose de montrer qu'il existe $x, y \in A$ tels que $x - y \in \mathbf{Z}$. Pour chaque partie $B$ de $\mathbf{R}$ et chaque nombre réel $z$, on note

$$z + B = \{z + b : b \in B\}.$$

(1) Soit $P$ l'intervalle $[0;1[$. Prouver que $\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda\big((n + A) \cap P\big)$.

Par définition de $P$, on a la réunion disjointe $\mathbf{R} = \bigsqcup_{n\in\mathbf{Z}} (n+P)$. En prenant l'intersection avec $A$, ceci fournit une partition de $A$ en ensembles mesurables : $A = \bigsqcup_{n\in\mathbf{Z}} \big((n+P)\cap A\big)$, pour laquelle on peut passer à la mesure : $\lambda(A) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda\big((n+P)\cap A\big)$. Il reste à utiliser le fait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation, ce qui implique que $\lambda\big((n+P)\cap A\big) = \lambda\big(P \cap (-n + A)\big)$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$, et donc l'égalité recherchée.

(2) Montrer que les ensembles $n + A$ ne sont pas deux à deux disjoints quand $n$ parcourt $\mathbf{Z}$.

Si les ensembles en question étaient deux à deux disjoints, leurs intersections avec $P$ fournirait un famille de parties mesurables dans $P$ deux à deux disjointes. La mesure de Lebesgue de la réunion des $(n + A) \cap P$ serait alors $\sum_{n\in\mathbf{Z}} \lambda\big((n + A) \cap P\big)$, soit $\lambda(A)$ par la question qui précède. La contradiction vient du fait que $\bigsqcup_{n\in\mathbf{Z}} \big((n + A) \cap P\big)$ est contenue dans $P$ qui est de mesurable de Lebesgue $\leqslant 1$, alors qu'on a supposé $\lambda(A) > 1$.

(3) Conclure.

Par la question qui précède, il existe donc deux indices $m$ et $n$ dans $\mathbf{Z}$ tels que $(m+A)\cap(n+A) \neq \varnothing$, autrement dit tels qu'il existe $x, y \in A$ pour lesquels $m+x = n+y$.

**Exercice 2.** On note $H = \mathrm{L}^2(\mathbb{T})$ l'espace des (classes de) fonctions $2\pi$-périodiques $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ et telles que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t < +\infty,$$

et on rappelle que cet espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f|g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \,\mathrm{d}t,$$

admet pour base hilbertienne la famille des fonctions $e_n : t \mapsto e^{int}$ pour $n$ parcourant $\mathbf{Z}$. On note :

$$H^+ = \{f \in H : \langle f|e_n\rangle = 0 \,\text{pour tout}\, n < 0\}.$$

(1) Montrer que $H^+$ est fermé dans $H$ et que $(e_n)_{n\geqslant 0}$ en est une base hilbertienne.

Par définition, $H^+$ est l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\leqslant -1}$, et donc en tant qu'orthogonal c'est un sous-espace vectoriel fermé. En développant une fonction $f \in H$ quelconque sous la forme $f = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \langle f|e_n\rangle e_n$, on voit que $f$ appartient à $H_+$ si et seulement si elle s'écrit $f = \sum_{n\in\mathbf{N}} \langle f|e_n\rangle e_n$, ce qui prouve que la famille orthonormée $(e_n)_{n\geqslant 0}$ est une base hilbertienne de $H_+$.

(2) Caractériser $(H^+)^\perp$ au moyen des fonctions $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$.

Par définition, $H^+$ est l'orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\leqslant -1}$ ; donc $(H^+)^\perp$ est le double orthogonal du sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\leqslant -1}$, par le cours c'est donc l'adhérence du sous-espace vectoriel engendré par $(e_n)_{n\leqslant -1}$.

(3) Montrer que si $f \in H^+$ est à valeurs réelles, alors $f$ est constante.

De manière générale, si $f \in H$, en posant :

$$c_n(f) = \langle f|e_n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int} \,\mathrm{d}t,$$

on a :

$$\overline{c_n(f)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}e^{int} \,\mathrm{d}t = \langle \overline{f}|e_{-n}\rangle = c_{-n}(\overline{f}).$$

Par conséquent, pour toute $f \in H$, si $f$ est à valeurs réelles, on a : $c_n(f) = c_{-n}(f)$. Donc si $f$ est en outre dans $H_+$, son seul coefficient de Fourier éventuellement non nul est $c_0(f)$ ; autrement dit, une fonction de $H_+$ à valeurs réelles est automatiquement constante.

(4) Montrer que si $f \in H^+$ alors $t \mapsto e^{int}f(t)$ est dans $H^+$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Pour $f \in H_+$, $n \in \mathbf{N}$ et $m$ entier $\leqslant -1$, on calcule :

$$\langle e_n f|e_m\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}f(t)e^{-imt} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i(m-n)t} \,\mathrm{d}t = \langle f|e_{m-n}\rangle,$$

qui est nul puisque $m - n \leqslant -1$ et $f \in H_+$. Comme ceci est vrai pour tout $m$ entier $\leqslant -1$, on en déduit que $e_n f$ appartient bien à $H_+$ dès que $f \in H^+$ et $n \in \mathbf{N}$.

NB : on peut aussi dire que la multiplication par $e_n$ procède juste à un décalage « dans le bon sens par rapport à la définition de $H_+$ » des coefficients de Fourier.

(5) Soit $A$ un borélien de $[-\pi;\pi]$ et soit

$$V_A = \{f \in H^+ : f \text{ est nulle presque partout sur } A \text{ pour la mesure de Lebesgue}\}.$$

Justifier que $V_A$ est sous-espace vectoriel fermé dans $H^+$.

Déjà $V_A$ est clairement un sous-espace vectoriel. Vérifions qu'il est fermé au moyen du critère séquentiel. Donnons-nous donc une suite de $f_n \in V_A$ convergeant vers $f$ dans $H_+$ et vérifions que $f \in V_A$. Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|\mathbf{1}_A f\|_H \leqslant \|\mathbf{1}_A(f - f_n)\|_H + \|\mathbf{1}_A f_n\|_H.$$

Comme les $f_n$ sont dans $V_A$, le second terme du majorant est nul, et on a

$$\|\mathbf{1}_A(f - f_n)\|_H \leqslant \|f - f_n\|_H$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. Ainsi $\|\mathbf{1}_A f\|_H = 0$, soit $\displaystyle\int_A |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$, ce qui impose que $|f|$, et donc $f$, est nulle presque partout sur $A$ ; soit $f \in V_A$.

(6) On note $\varphi$ la projection de $e_0$ sur $V_A$. Prouver que $|\varphi|$ est constante.

Comme $V_A$ est un sous-espace vectoriel fermé dans $H^+$, la définition de la projection implique que $\varphi - e_0$ est orthogonal à $V_A$. Par ce qui précède, comme $\varphi$ est dans $V_A$ donc dans $H_+$, on a $e_n\varphi \in H_+$ pour tout $n \geqslant 0$ ; et comme $\varphi$ est dans $V_A$, c'est-à-dire nulle presque partout sur $A$, on a aussi $e_n\varphi \in V_A$ pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi la fonction $\varphi - e_0$ est orthogonale à toutes les fonctions $e_n\varphi$, ce qui implique pour tout $n \geqslant 0$ :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\varphi(t)\overline{\varphi(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme $\varphi \in H_+$, le second membre de ces égalités est systématiquement nul ; autrement dit, $|\varphi|^2$ est dans $H_+$. Par ce qui précède, cela implique que $|\varphi|^2$, qui est évidemment à valeurs réelles, est constante.

(7) On suppose que $A$ est non négligeable. Montrer que dans ce cas $V_A = \{0\}$.

On vient de voir que $|\varphi|$ est constante. Comme $\varphi$ est nulle sur $A$ presque partout, et qu'ici $A$ est supposé non négligeable, on en déduit que $\varphi$ est nulle presque partout. Par définition de $\varphi$, on en déduit que $e_0$ est orthogonal à $V_A$.

Maintenant, au titre de fonction de $H_+$, une fonction $f \in V_A$ se développe en

$$f = \sum_{n \geqslant 0} \langle f | e_n \rangle e_n.$$

Mais ici comme $e_0$ est orthogonal à $V_A$, on en déduit qu'en fait

$$f = \sum_{n > 0} \langle f | e_n \rangle e_n,$$

ce qui permet d'en déduire comme à la question précédente que $e_{-1}f$ est dans $V_A$, donc orthogonale à $e_0$, donc sans terme constant, ce qui permet d'en déduire que $e_{-2}f$ est dans $V_A$ donc sans terme constant etc. En itérant, on voit qu'une fonction dans $V_A$, si $A$ est non négligeable, ne peut avoir de coefficient de Fourier non nul, donc doit être nulle presque partout.

**Exercice 3.** On se donne un nombre réel $\theta$ non multiple entier de $2\pi$.

(1) Calculer la partie réelle de $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x$.

On calcule la partie réelle de l'intégrande en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée du dénominateur. Cela donne $\mathrm{Re}\left(\dfrac{e^{i\theta}-x}{1-2x\cos\theta+x^2}\right)$. Ainsi,

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x\right) = \int_0^1 \frac{\cos\theta - x}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

et reconnaissant une dérivée logarithmique (i.e. de la forme $\frac{v'}{v}$), on obtient

$$\mathrm{Re}\left(\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x\right) = -\frac{1}{2}[\log(x^2-2x\cos\theta+1)]_0^1 = -\log|2\sin(\frac{\theta}{2})|.$$

(2) Montrer que le théorème de convergence dominée s'applique aux sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{i(n+1)\theta}x^n$. Quelle identité cela fournit-il ?

On note $S_N(x)$ la somme partielle

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} e^{i(n+1)\theta}x^n = e^{i\theta}\cdot\frac{1-x^{N+1}e^{i(N+1)\theta}}{1-xe^{\theta}}.$$

Ces fonctions se majorent indépendamment de $N$ par la fonction $\dfrac{2}{|1-xe^{i\theta}|}$, qui est intégrable pour $x\in[0;1]$ par choix de $\theta$ non multiple entier de $\pi$. On applique alors le théorème de convergence dominée :

$$\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{i\theta}\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta}x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\theta}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.$$

(3) En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n} = -\log|2\sin(\frac{\theta}{2})|$.

Ceci s'obtient par la première question, en prenant la partie réelle de l'égalité complexe précédente :

$$\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{i(n+1)\theta}}{n+1}.$$

(4) Montrer de même que pour tout $\theta\in]0;\pi[$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$.

Cette fois, on doit prendre la partie imaginaire de l'identité complexe précédente et il reste à travailler sur la partie imaginaire de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1-xe^{i\theta}}\,\mathrm{d}x$, qui vaut

$$\int_0^1 \frac{\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin\theta}{(x-\cos\theta)^2+(1-\cos^2\theta)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{\sin\theta}\right)}{(\frac{x}{\sin\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin\theta})^2+1},$$

soit

$$\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}} \frac{\mathrm{d}u}{(u-\frac{1}{\tan\theta})^2+1} = \arctan\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right).$$

Pour $\theta \in ]0;\pi[$ on a bien : $\arctan\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\theta}{2}$ et, par exemple en dérivant, on voit que $\arctan\left(\frac{1}{\tan\theta}\right) = \frac{\pi}{2} - \theta$.

**Exercice 4.** Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathscr{A})$ qui converge $\mu$-presque partout sur $X$ vers une fonction $f$ sur $X$.

(1) En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge en mesure vers $f$, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse de convergence ponctuelle des $f_n$, la suite des fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\{|f-f_n|>\varepsilon\}}$ tend vers la fonction nulle presque partout. En outre, on dispose d'une majoration uniforme par la fonction constante égale à 1, qui est intégrable puisque $\mu(X) < +\infty$. Le théorème de convergence dominée implique donc que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) = 0$, puisque $\mu(\{|f - f_n| > \varepsilon\}) = \int_X \mathbf{1}_{\{|f-f_n|>\varepsilon\}}\,\mathrm{d}\mu$.

On se donne $p$ tel que $1 < p < +\infty$ et on note $\mathrm{L}^p = \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$. On suppose qu'il existe une constante $M$ telle que $\|f_n\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 0$.

(2) Montrer que $\|f\|_{\mathrm{L}^p} \leqslant M$.

On applique le lemme de Fatou à la suite de fonctions mesurables positives $(|f_n|^p)_{n\geqslant 0}$ :

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu \leqslant M^p.$$

En particulier, $f$ est dans $\mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$.

(3) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a :

$$\int_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \ \leqslant\ 2M\|\mathbf{1}_A\|_{\mathrm{L}^q}$$

où $q$ est l'exposant conjugué de $p$.

On a :

$$\int_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_X \mathbf{1}_A |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \|f - f_n\|_{\mathrm{L}^p} \cdot \|\mathbf{1}_A\|_{\mathrm{L}^q} \leqslant 2M\|\mathbf{1}_A\|_{\mathrm{L}^q},$$

où la première inégalité est l'inégalité de Hölder et où la seconde vient de l'inégalité triangulaire et de la majoration des normes $\mathrm{L}^p$ des fonctions $f_n$ et $f$.

(4) Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f$ en norme $\mathrm{L}^1$.

Soit $\varepsilon > 0$. On prend ici $A = A_\varepsilon = \{|f - f_n| > \varepsilon\}$. Alors, on a :

$$\int_X |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = \int_{X - A_\varepsilon} |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_\varepsilon} |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon\mu(X) + 2M\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{q}},$$

où le second terme du majorant provient de la question précédente. En ce qui concerne ce terme justement, la première question assure qu'on peut le supposer $\leqslant \varepsilon$ pour $n$ assez grand. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire dans ce raisonnement, ceci prouve la convergence demandée.

On vient de démontrer le théorème suivant : *soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur $(X, \mathscr{A})$, uniformément bornée en norme $\mathrm{L}^p$ pour un exposant $p \in ]1; +\infty[$, qui converge $\mu$-presque partout vers une fonction $f$ ; alors $f \in \mathrm{L}^p(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $f$ en norme $\mathrm{L}^1$.*

(5) Fournir un contre-exemple si la mesure $\mu$ est de masse totale infinie, par exemple si $\mu$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

L'idée est de faire glisser une bosse, ou même un plateau : on prend pour $f_n$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[n; n+1]$ pour tout $n \geqslant 0$, et pour fonction limite $f$ la fonction nulle. Il n'y a ni convergence en norme $\mathrm{L}^p$ ni même convergence en mesure.