École polytechnique **2016-2017**

MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫

Devoir Maison – fin juin 2017

À rendre en PC à la séance du 30 juin 2017

Avertissement : ce sujet ne constitue pas un sujet blanc (suffisamment de tels sujets sont désormais disponibles dans les annales de MAT 311).

C'est un devoir facultatif offrant la possibilité d'obtenir une note de contrôle continu. La note de MAT 311 est le maximum entre la note de contrôle final seule, et la moyenne pondérée de la note de contrôle final (coefficient : 0,75) et de la note du présent devoir maison (coefficient : 0,25).

La seule façon de rendre sa copie pour ce devoir maison est de le faire au cours de la dernière séance de PC (vendredi 30 juin 2017), auprès de l'enseignant de PC lui-même.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique.

(1) On se donne $(F_n)_n$ une suite décroissante de fermés de X. Soit $(x_n)_n$ une suite convergente dans X, disons de limite $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que $x \in \bigcap_{n\geqslant 0} F_n$.

(2) Donner un exemple pour lequel $\bigcap_{n\geqslant 0} F_n$ est vide.

(3) Soit maintenant $(K_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n$ est non vide et montrer que tout ouvert Ω qui contient K contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$ pour $t \in [0, \infty[$.

(1) Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinue, convergeant simplement vers la fonction nulle.

(2) La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle relativement compacte dans l'espace $\big(\mathcal{C}([0, +\infty[), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ muni de la norme de la convergence uniforme ?

(3) Y a-t-il une contradiction avec le théorème d'Ascoli ?

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable positive. Pour tout $E \in \mathcal{A}$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Montrer que λ est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

Exercice 4. Soit λ la mesure de Lebesgue de dimension 2, i.e. sur $\mathbf{R}^2$. On se donne des nombres réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$ et l'on introduit la partie D du plan définie par :

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y < \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(1) Montrer que D est un borélien du plan.

(2) Justifier que $u = y^2 - x^2$ et $v = xy$ est un changement de variables de D vers son image.

(3) Calculer l'intégrale

$$\int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}\lambda(x, y) = \int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en fonction de a et b.

Exercice 5. On considère dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ le sous-espace

$$F = \{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathbf{R}) \;:\; f(-t) = -f(t) \text{ presque partout}\}.$$

Déterminer l'opérateur de projection orthogonale de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ sur F.