École polytechnique **2016-2017**

MAT 311 « Introduction à l'analyse réelle »

Devoir Maison – fin juin 2017
À rendre en PC à la séance du 30 juin 2017

Avertissement : ce sujet ne constitue pas un sujet blanc (suffisamment de tels sujets sont désormais disponibles dans les annales de MAT 311).

C'est un devoir facultatif offrant la possibilité d'obtenir une note de contrôle continu. La note de MAT 311 est le maximum entre la note de contrôle final seule, et la moyenne pondérée de la note de contrôle final (coefficient : 0,75) et de la note du présent devoir maison (coefficient : 0,25).

La seule façon de rendre sa copie pour ce devoir maison est de le faire au cours de la dernière séance de PC (vendredi 30 juin 2017), auprès de l'enseignant de PC lui-même.

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique.

(1) On se donne $(F_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de fermés de X. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite convergente dans X, disons de limite $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, telle que $x_n \in F_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $x \in \bigcap\limits_{n\geqslant 0} F_n$.

On fixe un entier $N \geqslant 1$. Alors pour tout $n \geqslant N$, par décroissance de $(F_n)_{n\geqslant 1}$ on a : $x_n \in F_N$; et en passant à la limite, il vient $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \in F_N$ puisque F_N est fermé. Comme N était arbitraire, on obtient le résultat demandé.

(2) Donner un exemple pour lequel $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} F_n$ est vide.

On peut supposer les F_n vides à partir d'un certain rang : acceptable mais pas très instructif. On peut aussi fixer un point $z \in X$ et regarder les complémentaires F_n des boules ouvertes de centre z et de rayon n. Il ne peut y avoir de point dans l'intersection des F_n car tout point dans X est à distance finie de z.

(3) Soit maintenant $(K_n)_{n\geqslant 1}$ une suite décroissante de parties compactes non vides de X. Vérifier que $K = \bigcap_{n\geqslant 1} K_n$ est non vide et montrer que tout ouvert Ω qui contient K, contient tous les K_n à partir d'un certain rang.

Pour chaque entier $n \geqslant 1$ on se donne un point $x_n \in K_n$, ce qui est possible car chaque compact K_n est supposé non vide. Par décroissance, chaque x_n est dans le compact K_1 et par conséquent la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 1}$ convergente, disons de limite x. Par la première question le point x est dans $\bigcap_{n\geqslant 1} K_{\varphi(n)}$, et cette intersection est la même que $\bigcap_{n\geqslant 1} K_n$ par décroissance.

Pour la seconde assertion à démontrer, on procède par l'absurde : on se donne Ω ouvert contenant K mais on suppose que pour tout indice n il existe $m \geqslant n$ pour lequel on puisse trouver $x_m \in K_m$ hors de Ω. Cela permet de trouver une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ et des points $x_{\varphi(n)} \in K_{\varphi(n)} \setminus \Omega$. Par le point précédent, cette suite admet une valeur d'adhérence dans $\bigcap_{n\geqslant 1} K_{\varphi(n)}$, et donc dans $K \subset \Omega$, alors que cette valeur d'adhérence doit aussi être dans le compact $K_{\varphi(1)} \setminus \Omega$.

Exercice 2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $f_n(t) = \sin(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$ pour $t \in [0;+\infty[$.

(1) Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinue, convergeant simplement vers la fonction nulle.

On peut oublier la première fonction et travailler avec les indices $n \geqslant 1$. On a : $f_n'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+4(n\pi)^2}} \cos(\sqrt{t+4(n\pi)^2})$, et donc $|f_n'(t)| \leqslant \frac{1}{4n\pi} \leqslant \frac{1}{4\pi}$; ce dernier majorant fournit, par le théorème des accroissements finis, une constante de Lipschitz $\frac{1}{4\pi}$ indépendante de n pour toutes les fonctions f_n avec $n \geqslant 1$, ce qui implique l'équicontinuité de la suite proposée.

Pour prouver la convergence simple (i.e. ponctuelle) demandée, on fixe $t \in [0;+\infty[$ et on écrit au moyen d'un développement limité :

$$f_n(t) = \sin\left(2\pi n\sqrt{1+\frac{t}{4(n\pi)^2}}\right) = \sin\left(2\pi n\big(1+\frac{t}{8\pi^2 n^2} + o(\frac{1}{n^2})\big)\right) = \sin\big(\frac{t}{4\pi n} + o(\frac{1}{n})\big).$$

.

(2) La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est-elle relativement compacte dans l'espace $\big(\mathcal{C}([0,+\infty[), \|.\|_\infty\big)$ des fonctions continues sur $[0,+\infty[$ muni de la norme de la convergence uniforme ?

Si cette suite était relativement compacte, autrement dit si l'ensemble des fonctions dans cette suite était d'adhérence compacte, alors par Bolzano-Weierstrass on en déduirait l'existence d'une sous-suite uniformément convergente. La limite uniforme de cette sous-suite serait nécessairement la limite simple, à savoir la fonction nulle. Mais ceci est exclu car pour chaque $n \geqslant 1$ la borne supérieure des valeurs de f_n est 1.

(3) Y a-t-il une contradiction avec le théorème d'Ascoli ?

Pas de contradiction avec Ascoli car $[0;+\infty[$ n'est pas compact.

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to \mathbf{R}_+$ une fonction mesurable positive. Pour tout $E \in \mathcal{A}$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu.$$

Montrer que λ est une mesure sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$.

Tout d'abord, on a :

$$\lambda(\varnothing) = \int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_\varnothing f \,\mathrm{d}\mu = \int 0 \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \int 0 \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

ce qui est le premier axiome à vérifier pour justifier que λ est une mesure. Ensuite, on se donne une famille $\{E_i\}_{i\in I}$ au plus dénombrable de parties mesurables (i.e. I est fini ou en bijection avec $\mathbf{N}$) deux à deux disjointes. On calcule :

$$\lambda\left(\bigsqcup_{i\in I} E_i\right) = \int_{\bigsqcup_{i\in I} E_i} f \,\mathrm{d}\mu = \int \mathbf{1}_{\bigsqcup_{i\in I} E_i} f \,\mathrm{d}\mu,$$

et comme $\mathbf{1}_{\bigsqcup_{i\in I} E_i} = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{E_i}$, par convergence monotone, on peut écrire (puisque I est au plus dénombrable) :

$$\lambda\left(\bigsqcup_{i\in I} E_i\right) = \int \left(\sum_{i\in I} \mathbf{1}_{E_i} f\right) \mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I}\left(\int \mathbf{1}_{E_i} f \,\mathrm{d}\mu\right) = \sum_{i\in I}\left(\int_{E_i} f\,\mathrm{d}\mu\right) = \sum_{i\in I}\lambda(E_i),$$

ce qui est le second axiome à vérifier pour justifier que λ est une mesure.

Exercice 4. Soit λ la mesure de Lebesgue de dimension 2, i.e. sur $\mathbf{R}^2$. On se donne des nombres réels a et b tels que $0 \leqslant a < b$ et l'on introduit la partie D du plan définie par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

(1) Montrer que D est un borélien du plan.

C'est lourd mais pas difficile : on observe que la partie D proposée est définie par un nombre fini d'inégalités strictes portant sur des valeurs de fonctions continues en x et y ; ceci implique que D est ouvert, donc borélien. Plus précisément, un point (x,y) dans le plan appartient à D si, et seulement si, il satisfait les conditions suivantes : $0 < x < y < \sqrt{x^2+1}$ (qui équivaut à $x > 0$ et $0 < y^2 - x^2 < 1$, et implique $y > 0$) et $a < xy < b$. On peut reformuler cela en disant que D est l'intersection de l'ouvert $\{x > 0\}$, de l'ouvert image réciproque de $]0;1[$ par la fonction continue $(x,y) \mapsto y^2 - x^2$ et de l'ouvert image réciproque de $]a;b[$ par $(x,y) \mapsto xy$.

(2) Justifier que $u = y^2 - x^2$ et $v = xy$ est un changement de variables de D vers son image.

La fonction Φ définie sur D par $(x,y) \mapsto \big(u(x,y) = y^2 - x^2, v(x,y) = xy\big)$ est de classe C^1, d'ailleurs sa matrice jacobienne en (x,y) est $J_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} -2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$, de déterminant $-2(x^2+y^2)$. L'image de D par cette fonction est dans la partie $]0;1[\times]a;b[$ de $\mathbf{R}^2$ muni du système de coordonnées (u,v). On cherche à prouver la bijectivité et à calculer la fonction réciproque de Φ ; donnons-nous pour cela $(u,v) \in]0;1[\times]a;b[$ et cherchons $(x,y) \in D$ tel que $u = y^2 - x^2$ et $v = xy$. En injectant $x = \frac{v}{y}$ (ce qui est licite car $y > 0$ pour les $(x,y) \in D$), on obtient une équation en x^2 qui est $x^4 + ux^2 - v^2 = 0$, et dont la solution positive est $x^2 = \frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}$. Finalement, puisque $x > 0$ on a : $x = \sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}$ et $y = \frac{v}{\sqrt{\frac{-u+\sqrt{u^2+4v^2}}{2}}}$ et ces deux expressions sont de classe C^1 en $(u,v) \in]0;1[\times]a;b[$.

(3) Calculer l'intégrale

$$\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\lambda(x,y) = \int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en fonction de a et b.

Tout est en place pour appliquer la formule de changement de variable ; ainsi, en écrivant $\mathrm{d}u\mathrm{d}v = |J_\Phi(x,y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, il vient :

$$\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{]0;1[\times]a;b[} u^v\,\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

soit par Fubini :

$$\int_D (y^2-x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{v=a}^{b}\int_{u=0}^{1} \frac{u^v}{2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{v=a}^{b} \frac{\mathrm{d}v}{v+1} = \log\left(\sqrt{\frac{b+1}{a+1}}\right).$$

Exercice 5. On considère dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ le sous-espace

$$F = \{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) \,:\, f(-t) = -f(t) \text{ presque partout}\}.$$

Déterminer l'opérateur de projection orthogonale de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ sur F.

Notons

$$G = \{[f] \in \mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) \,:\, f(-t) = f(t) \text{ presque partout}\}.$$

Les sous-espaces F et G sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel de $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R})$ car le produit d'une fonction impaire sur $\mathbf{R}$ par une fonction paire sur $\mathbf{R}$ est une fonction impaire sur $\mathbf{R}$, donc d'intégrale nulle. Si f est de carré intégrable, alors les fonctions $f_p : t \mapsto \frac{f(t)+f(-t)}{2}$ et $f_i : t \mapsto \frac{f(t)-f(-t)}{2}$ sont aussi de carré intégrable, et $[f_p] \in G$ et $[f_i] \in F$. En outre $F \cap G = \{0\}$ car une fonction représentant une classe dans cette intersection doit être nulle presque partout. Ainsi on peut écrire une somme directe orthogonale : $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) = F \oplus G$ puis, en passant à la limite, une autre : $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) = \overline{F} \oplus G$ (en effet, si $[f] \in G$ s'écrit aussi $[f] = \lim\limits_{n\to\infty} [f_n]$ avec $[f_n] \in F$, on a $\| f \|^2 = \lim\limits_{n\to\infty} \langle f | f_n \rangle = 0$), et enfin une dernière somme directe orthogonale : $\mathrm{L}^2(\mathbf{R};\mathbf{R}) = \overline{F} \oplus \overline{G}$ (argument similaire). Ceci implique que $F = \overline{F}$ et que $G = \overline{G}$ et finalement que la projection demandée est l'application $[f] \mapsto [f_i]$.