École polytechnique **2015-2016**

MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫

Contrôle blanc de préparation – début juillet 2016
Durée de l'épreuve préparée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. On se donne une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes telle que la suite de modules correspondante $(|z_n|)_{n\geqslant 1}$ soit croissante et que :

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad |z_i - z_j| \geqslant 1.$$

(1) En considérant les ensembles $D_j = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_j| < \frac{1}{2}\}$ pour $j \leqslant n$, montrer qu'on a :

$$\frac{n\pi}{4} \quad \leqslant \quad \pi\big(|z_n| + \frac{1}{2}\big)^2.$$

(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{|z_n|^{2+\varepsilon}}$ converge.

(3) L'hypothèse de croissance des modules est-elle indispensable ?

(4) Peut-on obtenir le résultat de convergence de (2) avec $\varepsilon = 0$?

Exercice 2.

(1) Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est finie, i.e. que $\mu(X) < +\infty$, et pour tout $r \in [1; +\infty]$ on utilise la notation abrégée L^r pour $L^r(X, \mathscr{A}, \mu)$. Montrer que :

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$$

pour tous $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $p < q$.

(2) Pour $r \in [1; +\infty[$ on note $\ell^r(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites complexes $(z_n)_{n\geqslant 0}$ telles que la série de terme général $|z_n|^r$ converge, et $\ell_0(\mathbf{N})$ celui des suites qui tendent vers 0 à l'infini. Montrer qu'on a :

$$\ell^1(\mathbf{N}) \subset \ell^p(\mathbf{N}) \subset \ell^q(\mathbf{N}) \subset \ell_0(\mathbf{N})$$

pour tous $p, q \in [1; +\infty[$ tels que $p < q$.

(3) Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ n'est pas inclus dans $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ et que $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ n'est pas inclus dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$. On pourra considérer des fonctions particulières, par exemple les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^\beta(1 + x^\alpha)}$ pour $\alpha, \beta > 0$.

Exercice 3. Soit H l'espace de Hilbert $L^2([0;1], \mathrm{d}x)$ où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue. Déterminer l'adjoint T^* de l'opérateur T de H dans lui-même dans chacun des cas suivants, en justifiant systématiquement l'existence de T^*.

(1) On se donne $h \in L^\infty([0;1], \mathrm{d}x)$ et T est défini par $T(f) = hf$.

(2) On se donne $K \in L^\infty([0;1] \times [0;1], \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ et T est défini par

$$T(f) : x \mapsto \int_{[0;1]} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

(3) On définit T par $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Soit $p \in]1;+\infty[$ et soit q l'exposant conjugué de p. Soit $f \in L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue. On associe à f la fonction $H(f)$ définie par :

$$H(f) : x \mapsto \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x > 0$ et $F(0) = 0$.

(1) On suppose f continue, et nulle hors de $[\varepsilon; A]$ pour $0 < \varepsilon < A$ jusqu'à la question 3 incluse. On note $F = H(f)$. Montrer que F est dans $L^p(\mathbf{R}_+)$ et que $F(x) = f(x) - xF'(x)$ pour tout $x > 0$.

(2) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,\mathrm{d}x = q \cdot \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(3) Montrer que l'on a :

$$\| F \|_{L^p} \quad \leqslant \quad q \, \| f \|_{L^p} .$$

(4) Justifier qu'il existe une suite de fonctions f_n avec les mêmes propriétés que la fonction f du point 1 et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - f_n \|_{L^p} = 0$.

(5) Montrer que pour $x > 0$ on a : $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, en notant $F_n = H(f_n)$, et que $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n \|_{L^p} = \| f \|_{L^p}$.

(6) Montrer que H est un opérateur borné de $L^p(\mathbf{R}_+)$ dans lui-même, de norme q. On pourra considérer les fonctions $f_A : x \mapsto x^{-\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{[1;A]}(x)$ pour $A \geqslant 1$.