École polytechnique **2015-2016**

MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫

Contrôle blanc de préparation – début juillet 2016

Durée de l'épreuve préparée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. On se donne une suite $(z_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes telle que la suite de modules correspondante $(|\,z_n\,|)_{n\geqslant 1}$ soit croissante et que :

$$i \neq j \quad \Rightarrow \quad |\,z_i - z_j\,| \geqslant 1.$$

(1) En considérant les ensembles $D_j = \{z \in \mathbf{C} : |\,z - z_j\,| < \frac{1}{2}\}$ pour $j \leqslant n$, montrer qu'on a :

$$\frac{n\pi}{4} \quad \leqslant \quad \pi\big(|\,z_n\,| + \frac{1}{2}\big)^2.$$

Les ensembles $D_j = \{z \in \mathbf{C} : |\,z - z_j\,| < \frac{1}{2}\}$ sont tous des disques de rayon $\frac{1}{2}$, donc d'aire (c'est-à-dire de mesure de Lebesgue) égale à $\frac{\pi}{4}$. L'hypothèse faite sur les distances entre les centres z_j et l'inégalité triangulaire font que ces disques sont deux à deux disjoints. Par l'hypothèse de croissance du module des centres, les n premiers disques sont contenus dans le disque centré à l'orgine et de rayon $|\,z_n\,| + \frac{1}{2}$, qu'on appelle B_n. On a donc, en notant λ_2 la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$:

$$\frac{n\pi}{4} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_2(D_j) = \lambda_2\Big(\bigsqcup_{j=1}^{n} D_j\Big) \leqslant \lambda_2(B_n) = \pi\big(|\,z_n\,| + \frac{1}{2}\big)^2.$$

(2) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{|\,z_n\,|^{2+\varepsilon}}$ converge.

Par (1) il existe une constante $C > 0$ pour laquelle $|\,z_n\,| \geqslant C\sqrt{n}$ à partir d'un certain rang, ce qui implique que pour tout $\varepsilon > 0$ le terme général de la série proposée est majoré à une constante multiplicative près par $\frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}$; d'où la convergence de la série.

(3) L'hypothèse de croissance des modules est-elle indispensable ?

Au final, non (pour la convergence de la série) ; en effet la somme de la série est aussi la borne supérieure dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ des sommes finies de la série, et cet ensemble de sommes finies ne prend pas en compte l'ordre des z_n.

(4) Peut-on obtenir le résultat de convergence de (2) avec $\varepsilon = 0$?

Considérons comme ensemble de points z_n l'ensemble des points à coordonnées entières dans la base $(1, i)$, privé de l'origine ; l'hypothèse sur les distances mutuelles est satisfaite : un point est à distance 1 ou $\sqrt{2}$ de ses voisins. Pour voir qu'on ne peut pas avoir convergence de la série avec $\varepsilon = 0$, il suffit de voir que la somme partielle sur l'ensemble, disons Λ_+^*, des points à coordonnées (entières) toutes deux $\geqslant 0$ vaut $+\infty$. Par équivalence des normes sur $\mathbf{C}$ vu comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 2, il existe une constante $C > 0$ telle que $\sqrt{p^2+q^2} \leqslant C(|p|+|q|)$ pour tout $z = p + iq \in \mathbf{C}$; donc $\frac{1}{p^2+q^2}$ est minoré (à constante multiplicative près) par $\frac{1}{(|p|+|q|)^2}$. On a une partition des $p + iq \in \Lambda_+^*$ suivant la valeur de la somme $p+q$ et pour chaque $k \in \mathbf{N}_{\geqslant 1}$: il y a $k+1$ points $p + iq \in \Lambda_+^*$ tels que $p + q = k$. Ceci permet de voir que

$$\sum_{p+iq \in \Lambda_+^*} \frac{1}{p^2+q^2} \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k^2},$$

et donc la divergence de la série proposée pour $\varepsilon = 0$.

Exercice 2.

(1) Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose que μ est finie, i.e. que $\mu(X) < +\infty$, et pour tout $r \in [1; +\infty]$ on utilise la notation abrégée L^r pour $L^r(X, \mathscr{A}, \mu)$. Montrer que :

$$L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$$

pour tous $p, q \in]1; +\infty[$ tels que $p < q$.

L'inclusion de L^∞ dans tous les espaces L^p vient du fait que $\mu(X) < +\infty$, car on a $\| f \|_{L^p} \leqslant \mu(X)^{\frac{1}{p}} \| f \|_{L^\infty}$. Maintenant on suppose que $1 \leqslant p < q$ et on se donne $f \in L^q$. En notant $q' = \frac{q}{p}$, et $p' = \frac{1}{1-\frac{p}{q}}$ son exposant conjugué, l'inégalité de Hölder pour la fonction $| f |^p$ fournit :

$$\int | f |^p \, \mathrm{d}\mu = \int | f |^p \, \mathbf{1}_X \, \mathrm{d}\mu \leqslant \left(\int (| f |^p)^{q'} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \left(\int (\mathbf{1}_X)^{p'} \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \left(\int | f |^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q'}} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p'}} = (\| f \|_{L^q})^{\frac{q}{q'}(=p)} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

ce qui implique les inclusions restant à démontrer (et en plus $\| f \|_{L^p} = \| f \|_{L^q} \cdot \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$).

(2) Pour $r \in [1; +\infty[$ on note $\ell^r(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites complexes $(z_n)_{n \geqslant 0}$ telles que la série de terme général $| z_n |^r$ converge, et $\ell_0(\mathbf{N})$ celui des suites qui tendent vers 0 à l'infini. Montrer qu'on a :

$$\ell^1(\mathbf{N}) \subset \ell^p(\mathbf{N}) \subset \ell^q(\mathbf{N}) \subset \ell_0(\mathbf{N})$$

pour tous $p, q \in [1; +\infty[$ tels que $p < q$.

Tous les espaces proposés sont inclus dans $\ell_0(\mathbf{N})$ car le terme général d'une série convergente tend vers 0. Maintenant on suppose que $1 \leqslant p < q$ et on se donne une suite $(z_n)_{n \geqslant 0} \in \ell^p(\mathbf{N})$. À partir d'un certain rang on a $| z_n | \leqslant 1$ et donc $| z_n |^q \leqslant | z_n |^p$, ce qui implique les inclusions restant à démontrer.

Remarque : si on veut comparer les normes d'une même suite dans deux espaces, on peut commencer par prendre $(z_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\| (z_n)_{n\geqslant 0} \|_{\ell^p}= 1$, donc telle que $| z_n |\leqslant 1$, impliquant $| z_n |^q \leqslant | z_n |^p$ et finalement $\| (z_n)_{n\geqslant 0} \|_{\ell^q}\leqslant 1$. Par normalisation, cela prouve que pour toute $(z_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^p(\mathbf{N})$, on a : $\| (z_n)_{n\geqslant 0} \|_{\ell^q} \leqslant \| (z_n)_{n\geqslant 0} \|_{\ell^p}$.

(3) Soit $1 \leqslant p < q \leqslant +\infty$. Montrer que $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ n'est pas inclus dans $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ et que $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ n'est pas inclus dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$. On pourra considérer des fonctions particulières, par exemple les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x^\beta(1 + x^\alpha)}$ pour $\alpha, \beta > 0$.

D'après les critères usuels, la fonction $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto \dfrac{1}{x^\beta(1 + x^\alpha)}$ est dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ si et seulement si $0 < p\beta < 1$ (convergence en 0) et $p(\alpha + \beta) > 1$ (convergence en $+\infty$).

On suppose que $1 \leqslant p < q < \infty$. Alors on peut choisir $\beta > 0$ tel que $p\beta < 1$ mais $q\beta > 1$, puis α tel que $p(\alpha + \beta) > 1$ (et donc $q(\alpha + \beta) > 1$) ; dans ce cas f est dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ mais pas dans $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$. On peut aussi choisir $\beta > 0$ tel que $p\beta < q\beta < 1$, puis α tel que $q(\alpha + \beta) > 1$ mais $p(\alpha + \beta) < 1$; dans ce cas f est dans $L^q(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ mais pas dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$.

Pour le cas $q = \infty$, on remarque d'abord que la fonction constante égale à 1 est dans $L^\infty(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ mais dans aucun autre espace $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$. Il reste à produire pour chaque $p \geqslant 1$ une fonction qui n'est pas dans $L^\infty(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ mais qui est dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$. Considérons pour chaque entier $k \geqslant 1$ la fonction $g_k = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbf{1}_{[n;n+\frac{1}{n^k}]}$. Elle n'est pas essentiellement bornée, mais par convergence monotone, on a $\int (g_k)^p = \sum_{n\geqslant 1} n^{p-k}$, donc on peut choisir k assez grand pour avoir $g_k \in L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$.

Exercice 3. Soit H l'espace de Hilbert $L^2([0; 1], \mathrm{d}x)$ où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue. Déterminer l'adjoint T^* de l'opérateur T de H dans lui-même dans chacun des cas suivants, en justifiant systématiquement l'existence de T^*.

(1) On se donne $h \in L^\infty([0; 1], \mathrm{d}x)$ et T est défini par $T(f) = hf$.

Déjà, l'opérateur proposé est borné de norme $\leqslant \| h \|_{L^\infty}$ (par majoration d'intégrale standard) ; donc il admet bien un adjoint. Ensuite, on se donne $f, g \in L^2([0; 1], \mathrm{d}x)$ et on calcule :

$$\langle T(f), g\rangle = \int_{[0;1]} f(x)h(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{[0;1]} f(x)\overline{\overline{h(x)}g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui montre que T^* est défini par $T^*(f) = \overline{h}f$.

(2) On se donne $K \in L^\infty([0; 1] \times [0; 1], \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$ et T est défini par

$$T(f) : x \mapsto \int_{[0;1]} K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Pour $f \in L^2([0; 1], \mathrm{d}x)$ on commence par calculer grâce à Cauchy-Schwarz :

$$(\| T(f) \|_{L^2})^2 = \int_{[0;1]} \left| \int_{[0;1]} K(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y \right|^2 \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} | K(x, y) |^2 \,\mathrm{d}y\right) \left(\int_{[0;1]} | f(y) |^2 \,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x = (\| f \|_{L^2})^2 \cdot \left(\int_{[0;1]^2} | K(x, y) |^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right).$$

Ainsi l'opérateur proposé est borné de norme $\leqslant \| K \|_{L^\infty}$; donc il admet bien un adjoint. Ensuite, pour $f, g \in L^2([0;1], \mathrm{d}x)$ on a :

$$\langle T(f), g\rangle \;=\; \int_{[0;1]} \left(\int_{[0;1]} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y \right) \overline{g(x)}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui suggère d'utiliser Fubini. Pour ce faire, on vérifie l'intégrabilité de la fonction $(x,y) \mapsto K(x,y)f(y)\overline{g(x)}$ en utilisant Tonelli :

$$\int_{[0;1]^2} |\, K(x,y)f(y)\overline{g(x)}\,|\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;\leqslant \| K \|_{L^\infty} \cdot \int_{[0;1]^2} |\, f(y)\overline{g(x)}\,|\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;= \| K \|_{L^\infty} \cdot \| f \|_{L^1} \cdot \| g \|_{L^1}$$

et par Cauchy-Schwarz ceci se majore par $\| K \|_{L^\infty} \cdot \| f \|_{L^2} \cdot \| g \|_{L^2} < \; +\infty$.

On peut donc appliquer Fubini :

$$\langle T(f), g\rangle \;=\; \int_{[0;1]^2} f(y)\overline{\overline{K(x,y)}g(x)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; \int_{[0;1]} f(y)\overline{\left(\int_{[0;1]} \overline{K(x,y)}g(x)\,\mathrm{d}x \right)}\,\mathrm{d}y,$$

prouvant que T^* est défini par $T^*(f) : x \mapsto \displaystyle\int_{[0;1]} \overline{K(t,x)}g(t)\,\mathrm{d}t$.

(3) On définit T par $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

On est dans la situation du point précédent pour la fonction $K(x,y) = \mathbf{1}_{\{y \leqslant x\}}$, ce qui montre que T^* est défini par $T^*(f) : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4. Soit $p \in]1;+\infty[$ et soit q l'exposant conjugué de p. Soit $f \in L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ où $\mathrm{d}x$ désigne la mesure de Lebesgue. On associe à f la fonction $H(f)$ définie par :

$$H(f) : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour $x > 0$ et $F(0) = 0$.

(1) On suppose f continue, et nulle hors de $[\varepsilon; A]$ pour $0 < \varepsilon < A$ jusqu'à la question 3 incluse. On note $F = H(f)$. Montrer que F est dans $L^p(\mathbf{R}_+)$ et que $F(x) = f(x) - xF'(x)$ pour tout $x > 0$.

Déjà, F est nulle sur $[0;\varepsilon]$ car f l'est ; en particulier, il n'y a pas de problème d'intégrabilité autour de 0. Ensuite, on a : $C = \displaystyle\int_0^{+\infty} |\, f(t) \,|\; \mathrm{d}t = \int_\varepsilon^A |\, f(t) \,|\; \mathrm{d}t < +\infty$, donc

$$|\, F(x) \,| \leqslant \frac{1}{x} \cdot \int_0^x |\, f(t) \,|\; \mathrm{d}t \;\leqslant\; \frac{C}{x},$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} |\, F(x) \,|^p\; \mathrm{d}x \;\leqslant\; C^p \cdot \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} < +\infty$$

puisque $p > 1$. Enfin, par définition on a $xF(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$; le second membre est de classe C^1 puisque f est continue, donc F est dérivable pour $x > 0$ et on peut dériver l'égalité pour obtenir que $F(x) = f(x) - xF'(x)$ pour tout $x > 0$.

(2) Montrer que
$$\int_0^{+\infty} F(x)^p \,\mathrm{d}x \;=\; q \cdot \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $B \geqslant 0$. On a :
$$\int_0^B F(x)^p \,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^B F(x)\cdot F(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^B f(x)\cdot F(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x - \int_0^B xF'(x)\cdot F(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x.$$

Le premier terme du membre de droite tend vers $\int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x$ quand $B \to +\infty$; on travaille sur le second terme, en faisant une intégration par parties :
$$\int_0^B xF'(x)\cdot F(x)^{p-1}\,\mathrm{d}x = \frac{BF(B)^p}{p} - \frac{1}{p}\int_0^B F(x)^p\,\mathrm{d}x.$$

Pour la question précédente on a vu que $|\,F(x)\,|^p \leqslant \frac{C^p}{x^p}$, donc le terme de bord tend vers 0 quand $B \to +\infty$. En revenant à la première égalité et en faisant $B \to +\infty$, on obtient finalement :
$$\int_0^{+\infty} F(x)^p\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^{+\infty} F(x)^{p-1} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} F(x)^p\,\mathrm{d}x,$$

et on conclut en se rappelant que q est l'exposant conjugué de p, i.e. que $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$.

(3) Montrer que l'on a :
$$\|\,F\,\|_{L^p} \quad\leqslant\quad q\,\|\,f\,\|_{L^p}\;.$$

Si f est $\geqslant 0$, alors F est $\geqslant 0$ et on peut appliquer Hölder au membre de droite de l'égalité de (2) :
$$(\|\,F\,\|_{L^p})^p \;\leqslant\; q\cdot \|\,f\,\|_{L^p}\cdot\|\,F^{p-1}\,\|_{L^q} = q\cdot\|\,f\,\|_{L^p}\cdot(\|\,F\,\|_{L^p})^{\frac{p}{q}},$$

ce qui fournit l'inégalité voulue quand f est $\geqslant 0$. Dans le cas général d'une fonction f continue à support compact et à valeurs complexes, on applique ce qui précède à la fonction continue à support compact $|\,f\,|$:
$$\|\,F = H(f)\,\|_{L^p} \leqslant \|\,H(|\,f\,|)\,\|_{L^p} \leqslant\; q\;\|\,|\,f\,|\,\|_{L^p} = q\;\|\,f\,\|_{L^p}\;.$$

(4) Justifier qu'il existe une suite de fonctions f_n avec les mêmes propriétés que la fonction f du point 1 et telle que $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,f - f_n\,\|_{L^p} = 0$.

C'est la densité dans $L^p(\mathbf{R}_+, \mathrm{d}x)$ en norme L^p des fonctions continues à support compact.

(5) Montrer que pour $x > 0$ on a : $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, en notant $F_n = H(f_n)$, et que $\lim\limits_{n\to\infty}\|\,f_n\,\|_{L^p} = \|\,f\,\|_{L^p}$.

La dernière limite provient de l'inégalité triangulaire à l'envers :
$$|\|\,f_n\,\|_{L^p} - \|\,f\,\|_{L^p}| \leqslant \|\,f_n - f\,\|_{L^p}\;.$$

Pour le premier point, on évalue :
$$|\;F(x) - F_n(x)\;| \leqslant\; \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} |\,f_n(t) - f(t)\,|\;\mathrm{d}t \;\leqslant\; \frac{1}{x}\cdot\|\,f_n - f\,\|_{L^p}\cdot\|\,\mathbf{1}_{[0;x]}\,\|_{L^q}$$

par Hölder. On a : $\|\,\mathbf{1}_{[0;x]}\,\|_{L^q} = x^{\frac{1}{q}}$ pour tout $x > 0$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ à x fixé.

(6) Montrer que H est un opérateur borné de $L^p(\mathbf{R}_+)$ dans lui-même, de norme q. On pourra considérer les fonctions $f_A : x \mapsto x^{-\frac{1}{p}}\mathbf{1}_{[1;A]}(x)$ pour $A \geqslant 1$.

L'application H est clairement linéaire. En reprenant les notations précédentes, on a par la question 5 combinée au lemme de Fatou, puis par la question 3 :

$$\int_0^{+\infty} |F(x)|^p \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} |F_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} |F_n(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant q^p \cdot \liminf_{n\to\infty} (\| f_n \|_{L^p})^p,$$

d'où

$$\| F \|_{L^p} \leqslant q \, \| f \|_{L^p} .$$

L'application H est donc continue de norme $\leqslant q$.

On veut prouver qu'on en fait égalité. On a déjà : $\| f_A \|_{L^p} = (\log A)^{\frac{1}{p}}$. En notant $F_A = H(f_A)$, on a :

$$F_A(x) = q\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{1}_{[1;A]}(x) + \frac{q}{x}(A^{\frac{1}{q}} - 1)\mathbf{1}_{[A;+\infty[}(x)$$

et

$$\int_0^{+\infty} F_A(x)^p \, \mathrm{d}x = q^p \cdot \int_1^A \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x + \frac{q^p}{p-1}\frac{(A^{\frac{1}{q}} - 1)^p}{A^{p-1}}.$$

Le second terme tend vers $\dfrac{q^p}{p-1}$ quand $A \to +\infty$, et donc :

$$\lim_{A\to+\infty} \frac{\| F_A \|_{L^p}}{\| f_A \|_{L^p}} = q \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{\displaystyle\int_1^A \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x}\right)^p \mathrm{d}x}{\log(A)}\right)^{\frac{1}{p}} = q.$$