École polytechnique **2016-2017**

MAT 311 « Introduction à l'analyse réelle »

Contrôle du 5 juillet 2017

Durée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les exercices sont indépendants mais il est fortement recommandé de lire le sujet en entier avant de commencer à le traiter. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. On travaille avec les mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{R}$.

(1) Justifier que la fonction $(x,y) \mapsto e^{-y}\sin(2xy)$ est intégrable sur $[0;1]\times]0;+\infty[$.

(2) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2 e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

Exercice 2. On pose

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

(1) Montrer que $F(t)$ est bien définie pour $t > 0$.

(2) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}_+$.

(3) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^\times$.

(4) Soit $t > 0$, $t \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle en x donnée par $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}$ en éléments simples (i.e. sous forme de somme de fractions $\frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{1+tx^2}$ avec a et b indépendants de x).

(5) En déduire la valeur de $F'(t)$ pour $t > 0$.

(6) Calculer $F(t)$ pour $t > 0$.

Exercice 3. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de X vers $\mathbf{R}$ *converge en mesure* vers f mesurable de X vers $\mathbf{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

On veut montrer que, dans ce cas, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge μ-presque partout vers f.

(1) Montrer qu'il existe une extraction (i.e. une suite strictement croissante de nombres entiers) $k \mapsto n_k$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant n_k$ on ait :

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}\big) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

(2) On note $B_k = \bigcup_{j \geqslant k} \{|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\}$ et on note A l'intersection des B_k. Montrer que A est de μ-mesure nulle.

(3) Conclure en considérant le complémentaire de A.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, dont on note $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ (sans indice) la norme associée. Soient $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ des bases hilbertiennes de H. Soit T un opérateur linéaire continu de H dans lui-même.

(1) Montrer que, dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \| T^*(g_p) \|^2 .$$

(2) En déduire que $\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| T(f_n) \|^2$.

On note $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de H dans lui-même et $\| \cdot \|_{B(H)}$ la norme d'opérateur associée. On dit que $T \in B(H)$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* sur H si : $\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 < +\infty$.

(3) Justifier que cette propriété ne dépend pas de la base hilbertienne choisie.

On note $\mathrm{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H, et pour $T \in \mathrm{HS}(H)$ on note

$$\| T \|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(4) Montrer que $\| T \|_{B(H)} \leqslant \| T \|_2$ et que $\mathrm{HS}(H) \neq B(H)$

(5) Justifier que $\| \cdot \|_2$ est une norme et montrer que $\mathrm{HS}(H)$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$ est un espace de Hilbert (on précisera le produit scalaire associé).

(6) Soit $T \in \mathrm{HS}(H)$. On note P_n le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0, \ldots e_n)$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a : $T \circ P_n \in \mathrm{HS}(H)$ et que $\| T - T \circ P_n \|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. En déduire que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathrm{HS}(H)$.