École polytechnique **2016-2017**

MAT 311 « Introduction à l'analyse réelle »

Contrôle du 5 juillet 2017

Durée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les exercices sont indépendants mais il est fortement recommandé de lire le sujet en entier avant de commencer à le traiter. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. On travaille avec les mesures de Lebesgue sur $\mathbf{R}^2$ et sur $\mathbf{R}$.

(1) Justifier que la fonction $(x, y) \mapsto e^{-y} \sin(2xy)$ est intégrable sur $[0;1]\times]0;+\infty[$.

Il suffit de majorer $|\sin(2xy)|$ par 1 et d'utiliser Tonelli :

$$\int_{[0;1]\times]0;+\infty[} |e^{-y}\sin(2xy)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-y}\,\mathrm{d}y < +\infty.$$

(2) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\sin y)^2 e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$.

Par Fubini, on peut donc calculer de deux façons différentes la même intégrale :

$$I = \int_{[0;1]\times]0;+\infty[} e^{-y}\sin(2xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-y}\left(\int_0^1 \sin(2xy)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^{-y}[-\frac{\cos(2xy)}{2y}]_0^1\,\mathrm{d}y,$$

qui vaut bien l'intégrale proposée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{2y}(1-\cos 2y)\,\mathrm{d}y$, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(\sin y)^2 e^{-y}}{y}\,\mathrm{d}y$; mais on a aussi :

$$I = \int_0^1\left(\int_0^{+\infty} e^{-y}\sin(2xy)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{Im}(e^{y(-1+2xi)})\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{Im}(\frac{1}{1-2xi})\,\mathrm{d}x,$$

soit

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln 5}{4}.$$

Exercice 2. On pose

$$F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On pose $f(x,t) = \frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2}$.

(1) Montrer que $F(t)$ est bien définie pour $t > 0$.

À $t > 0$ fixé, on a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+tx^2)}{\sqrt{x}} = 0$, donc il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \geqslant K$ on ait : $\frac{\ln(1+tx^2)}{1+x^2} \leqslant \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$. Le majorant sur $[K;+\infty[$ est une fonction intégrable en x, et la fonction $f(x,t)$ est continue en x sur $[0;K]$.

(2) Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Il suffit de prouver la continuité de F sur les intervalles $[0;T]$ pour $T \geqslant 0$ quelconque. Et pour cela, puisque $f(x,t)$ est continue en t, il suffit de majorer $|f(x,t)| = f(x,t)$ par une fonction intégrable indépendante de t (par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre). Or sur $[0;T]$, on peut écrire : $f(x,t) \leqslant \dfrac{\ln(1+Tx^2)}{1+x^2}$ et le majorant est intégrable en x par ce qui précède.

(3) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^\times$.

Cette fois, pour la dérivabilité du moins, il suffit de travailler sur les intervalles $[\varepsilon;+\infty[$ pour $\varepsilon > 0$ quelconque. Et pour cela, puisque $f(x,t)$ est dérivable en t, il suffit de majorer $|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)|$ par une fonction intégrable indépendante de t (par le théorème de dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre). Or sur $[\varepsilon;+\infty[$, on peut écrire :

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)} \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)(1+\varepsilon x^2)} \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon x^2}$$

et le majorant est clairement intégrable en x. La continuité de la dérivée se règle comme précédemment.

(4) Soit $t > 0$, $t \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle en x donnée par $\frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)}$ en éléments simples (i.e. sous forme de somme de fractions $\frac{a}{1+x^2} + \frac{b}{1+tx^2}$ avec a et b indépendants de x).

C'est un calcul, par exemple par identification de coefficients, qui donne :

$$\frac{x^2}{(1+x^2)(1+tx^2)} = \frac{1}{t-1}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+tx^2}\right).$$

(5) En déduire la valeur de $F'(t)$ pour $t > 0$.

Pour $t > 0$, $t \neq 1$, on calcule (avec des primitives « arc tangente » et un changement de variable facile) :

$$F'(t) = \frac{1}{t-1}\left(\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} - \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+tx^2}\right) = \frac{1}{t-1}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{t-1}\frac{\sqrt{t}-1}{\sqrt{t}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{t}(\sqrt{t}+1)},$$

qui se prolonge à $t = 1$ par continuité.

(6) Calculer $F(t)$ pour $t > 0$.

C'est un calcul de primitive standard : $F(t) = \pi\ln(1+\sqrt{t})) +$ constante, avec la constante qui vaut 0 car $F(1) = 0$ par la formule intégrale.

Exercice 3. Soit $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de X vers $\mathbf{R}$ *converge en mesure* vers f mesurable de X vers $\mathbf{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\}\big) = 0.$$

On veut montrer que, dans ce cas, il existe une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge μ-presque partout vers f.

(1) Montrer qu'il existe une extraction (i.e. une suite strictement croissante de nombres entiers) $k \mapsto n_k$ telle que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant n_k$ on ait :

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}\big) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On utilise la seule hypothèse dont on dispose, à savoir la convergence en mesure. Comme $\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \frac{1}{2}\}\big) = 0$, il existe n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2}\}\big) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Par récurrence supposons déterminées les valeurs n_j jusqu'au rang $j = k-1$. Comme $\lim_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in X : |f(x) - f_n(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}\big) = 0$, il existe n_k (qu'on choisit $> n_{k-1}$), tel que :

$$\mu\big(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2^k}\}\big) \leqslant \frac{1}{2^k}$$

pour tout $n \geqslant n_k$. On construit ainsi l'extraction par récurrence.

(2) On note $B_k = \bigcup_{j\geqslant k} \{|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\}$ et on note A l'intersection des B_k. Montrer que A est de μ-mesure nulle.

Par construction, la suite des B_k est décroissante (plus k est grand, plus la famille dont on prend la réunion est petite) et les B_k sont des parties mesurables au titre de préimages de fermés par des fonctions mesurables. On a $\mu(B_1) < +\infty$, donc par continuité des mesures $\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k)$. En fait, pour chaque $k \geqslant 1$, on a :

$$\mu(B_k) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \mu\big(\{|f_{n_j} - f| \geqslant \frac{1}{2^j}\}\big) \leqslant \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}},$$

et donc $\mu(A) = 0$.

(3) Conclure en considérant le complémentaire de A.

On a :

$$X \setminus A = X \setminus \bigcap_{k\geqslant 1} B_k = \bigcup_{k\geqslant 1} (X \setminus B_k) = \bigcup_{k\geqslant 1} \bigcap_{j\geqslant k} \{|f_{n_j} - f| < \frac{1}{2^j}\}.$$

Ainsi, si x est hors de l'ensemble négligeable A, il existe un rang k tel que pour tout $j \geqslant k$ on a : $|f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j}$; autrement dit, $X \setminus A$ est une partie de complémentaire négligeable sur laquelle la sous-suite $(f_{n_j})_{j\geqslant 1}$ converge ponctuellement.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, dont on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ (sans indice) la norme associée. Soient $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des bases hilbertiennes de H. Soit T un opérateur linéaire continu de H dans lui-même.

(1) Montrer que, dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \| T^*(g_p) \|^2 .$$

Comme $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base hilbertienne, on peut écrire pour chaque indice n :

$$T(e_n) = \sum_{p=0}^{\infty} \langle T(e_n)|g_p\rangle g_p.$$

Par Parseval et définition de l'adjoint de T, il vient alors :

$$\| T(e_n) \|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} |\langle T(e_n)|g_p\rangle|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} |\langle e_n|T^*(g_p)\rangle|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} |\langle T^*(g_p)|e_n\rangle|^2.$$

On peut sommer sur n et intervertir les sommations puisque tous les termes sont $\geqslant 0$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} |\langle T^*(g_p)|e_n\rangle|^2 = \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |\langle T^*(g_p)|e_n\rangle|^2 = \sum_{p=0}^{\infty} \| T^*(g_p) \|^2 .$$

(2) En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \| T(f_n) \|^2$.

On applique la question précédente en prenant la base des f_n au lieu de celle des e_n ; la seconde égalité obtenue a le même membre de droite que la première, ce qui permet d'égaler les deux membres de gauche.

On note $B(H)$ l'espace des opérateurs linéaires continus de H dans lui-même et $\| \cdot \|_{B(H)}$ la norme d'opérateur associée. On dit que $T \in B(H)$ est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* sur H si : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 < +\infty$.

(3) Justifier que cette propriété ne dépend pas de la base hilbertienne choisie.

C'est exactement ce que dit la question précédente.

On note $\mathrm{HS}(H)$ l'ensemble des opérateurs de Hilbert-Schmidt sur H, et pour $T \in \mathrm{HS}(H)$ on note

$$\| T \|_2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \| T(e_n) \|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

(4) Montrer que $\| T \|_{B(H)} \leqslant \| T \|_2$ et que $\mathrm{HS}(H) \neq B(H)$

Pour $x \in H$, on calcule :

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle T(x)|e_n\rangle e_n,$$

et donc par Parseval, définition de l'adjoint de T et Cauchy-Schwarz :

$$\| T(x) \|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle T(x)|e_n\rangle|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle x|T^*(e_n)\rangle|^2 \leqslant \| x \|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \| T^*(e_n) \|^2 .$$

Comme par la question (1), on a : $\sum_{n=0}^{\infty} \| T^*(e_n) \|^2 = (\| T \|_2)^2$, l'inégalité demandée en découle. Enfin, l'opérateur identité de H n'est pas de Hilbert-Schmidt.

(5) Justifier que $\| \cdot \|_2$ est une norme et montrer que $\mathrm{HS}(H)$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$ est un espace de Hilbert (on précisera le produit scalaire associé).

Pour prouver que $\| \cdot \|_2$ est une norme, le seul point sérieux est l'inégalité triangulaire et celui-ci découle du fait qu'un opérateur T est de Hilbert-Schmidt si et seulement si dans une/toute base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des coefficients $\| T(e_n) \|$ est dans $\ell^2(\mathbf{N})$.

Si S et T sont de Hilbert-Schmidt, on définit leur produit scalaire par

$$\langle S|T\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle S(e_n)|T(e_n)\rangle.$$

Par l'inégalité des normes qui précède, une suite de Cauchy $(T_n)_{n\geqslant 1}$ pour la norme de Hilbert-Schmidt est automatiquement une suite de Cauchy, et donc converge pour la norme d'opérateur, disons vers $T \in B(H)$. Il reste à voir que T est de Hilbert-Schmidt, et que la convergence a lieu aussi en norme de Hilbert-Schmidt. On se donne $\varepsilon > 0$. Il existe $N \geqslant 0$ tel que pour $p, q \geqslant N$, pour tout $m \geqslant 1$, on ait :

$$\sum_{n=0}^{m} \| T_p(e_n) - T_q(e_n) \|^2 \leqslant (\| T_p - T_q \|_2)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

On fait $q \to \infty$ dans cette somme finie, pour obtenir :

$$\sum_{n=0}^{m} \| T_p(e_n) - T(e_n) \|^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

On fait $m \to \infty$ et on obtient : $\| T - T_p \|_2 \leqslant \varepsilon$. Ceci implique les deux assertions recherchées.

(6) Soit $T \in \mathrm{HS}(H)$. On note P_n le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}(e_0, \dots e_n)$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a : $T \circ P_n \in \mathrm{HS}(H)$ et que $\| T - T \circ P_n \|_2 \to 0$ quand $n \to \infty$. En déduire que les opérateurs de rang fini sont denses dans $\mathrm{HS}(H)$.

L'opérateur $T\circ P_n$ est de rang fini puisque son image est engendrée par $T(e_0), \dots, T(e_n)$. Maintenant :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| (T \circ P_n)(e_k) \|^2 = \sum_{k=0}^{n} \| T(e_k) \|^2,$$

et donc $T \circ P_n$ est de Hilbert-Schmidt. Enfin, on a

$$(\| T - T \circ P_n \|_2)^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \| T(e_k) \|^2,$$

et cette quantité tend vers 0 quand $n \to \infty$.