École polytechnique **2015-2016**

MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫

Contrôle du 6 juillet 2016
Durée : 2 heures

Avertissement : l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les exercices 2 et 3 ne sont pas indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une base hilbertienne de H.

(1) On considère S l'opérateur de H dans lui-même défini par $S(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer que la norme d'opérateur de $S + \mathrm{id}_H$ est $\leqslant 2$, où id_H est l'identité de H.

(2) Montrer qu'en fait $\| S + \mathrm{id}_H \| = 2$.

(3) Soit T un opérateur compact de H dans lui-même. Montrer que la suite des $T(e_n)$ tend vers le vecteur nul de H.

Exercice 2. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ une fonction mesurable et $x_0 \in \mathbf{R}$. On suppose que :

— la fonction f est intégrable sur tout intervalle borné de $\mathbf{R}_+$;
— l'application $t \mapsto e^{-tx_0} f(t)$ est bornée au voisinage de $+\infty$ i.e. admet un majorant sur un intervalle de borne supérieure égale à $+\infty$.

(1) Montrer que l'application $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur l'intervalle $]x_0; +\infty[$.

(2) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

(3) Établir que F est de classe C^1 sur $]x_0; +\infty[$ et que $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -te^{-tx} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(4) Justifier que F est de classe C^∞ sur $]x_0; +\infty[$ et donner l'expression de $F^{(p)}$ (la dérivée p-ième de F).

Exercice 3. On reprend les notations de l'exercice précédent. On travaille cette fois spécifiquement avec la fonction $f(t) = \frac{\sin(t)}{t}$.

(1) Justifier que cette fonction satisfait les deux hypothèses de l'exercice précédent en proposant une valeur de x_0 la meilleure possible.

(2) Montrer que F est définie sur $]0;+\infty[$ et que $F'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

(3) Montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $]0;+\infty[$.

(4) Montrer que cependant la limite $\displaystyle\lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ existe.

(5) Montrer que si φ est une fonction positive décroissante de classe C^1 sur un intervalle $[B;C]$, on a :

$$\left|\int_B^C \varphi(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad \leqslant \quad 2\varphi(B)$$

et en déduire qu'on a :

$$\left|\int_B^{+\infty} e^{-tx}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \quad \leqslant \quad \frac{2}{B}$$

pour tous $B > 0$ et $x > 0$.

(6) Prouver que $\displaystyle\lim_{B\to\infty}\int_0^B \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \;=\; \frac{\pi}{2}$. On pourra faire intervenir des quantités intermédiaires $F(x)$ pour $x > 0$, judicieusement compensées et découpées.

Exercice 4.

(1) On se donne une fonction f de classe C^1 et 2π-périodique. Montrer qu'on a :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}(1+k^2)|c_k(f)|^2 \;<\; +\infty,$$

où $c_k(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{[0;2\pi]} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ désigne le k-ième coefficient de Fourier de f.

(2) Soit $(f^n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de classe C^1 et 2π-périodiques, telle que la suite numérique des $\|f^n\|_{L^2} + \|(f^n)'\|_{L^2([0,2\pi])}$ est bornée. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K(\varepsilon)$ tel que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{|k|\geqslant K(\varepsilon)} |c_k(f^n)|^2 < \varepsilon.$$

(3) Pour une suite $(f^n)_{n\geqslant 0}$ comme dans 2, montrer qu'on peut extraire une sous-suite $(f^{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ telle que $f^{\phi(n)} \to f$ dans $L^2([0,2\pi])$ et que f satisfait :

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2|c_k(f)|^2 \;\leqslant\; \limsup_{n\to\infty}\sum_{k\in\mathbf{Z}} k^2|c_k(f_n)|^2.$$

(4) Soit une fonction $\psi \in C^1([0,2\pi])$ à valeurs réelles avec $\psi(0) = \psi(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi}\psi = 1$. Démontrer l'*inégalité de Poincaré*, à savoir qu'il existe une constante $C_\psi > 0$ telle que pour toutes les fonctions f de classe C^1 et 2π-périodiques, on a :

$$\int_{[0;2\pi]} |f - M_\psi(f)|^2 \;\leqslant\; C_\psi\int_{[0;2\pi]} |f'|^2 \quad \text{avec} \quad M_\psi(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\psi(x)dx.$$

On pourra raisonner par l'absurde, en utilisant une suite $(f^n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$M_\psi(f^n) = 0, \quad \|f^n\|_{L^2[0,2\pi]} = 1, \quad \|(f^n)'\|_{L^2([0,2\pi])} \leqslant \frac{1}{n}.$$

.