ECOLE POLYTECHNIQUE

*Recueil*

# Introduction à l'anayse réelle

## Textes des contrôles des connaissances proposés l'année précédente

*Département de Mathématiques*

Promotion 2015
Année 1
Tronc Commun
MAT311

# Introduction à l'analyse réelle

Textes des contrôles des connaissances
proposés l'année antérieure

**Édition 2016**

**École polytechnique** **2014-2015**

**MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫**

**Contrôle blanc de préparation – fin juin 2015**
**Durée de l'épreuve préparée : 2 heures**

**Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

**Exercice 1.** Soit $H$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On se donne un opérateur (linéaire) borné $T : H \to H$, qu'on suppose auto-adjoint (i.e. $T = T^*$).

(1) Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in H$, on pose $P_n(x) = \dfrac{x + T(x) + \cdots + T^n(x)}{n+1}$.

(2) Montrer qu'on a :
$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) - x \| = 0$$
pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$.

On suppose désormais que $\| T \| \leqslant 1$.

(3) Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) \| = 0$$
quand $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$.

(4) Toujours sous l'hypothèse ≪ $\| T \| \leqslant 1$ ≫, montrer que pour tout $x \in H$ on a :
$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) - P(x) \| = 0,$$
où $P$ est un opérateur de projection orthogonale que l'on décrira précisément.

**Exercice 2.** Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $\Gamma$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^\times$.

(2) Calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0, a>0} \Gamma(a)$.

(3) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

(4) Montrer que $\Gamma(a+1) = a^{a+\frac{1}{2}} e^{-a} \displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{+\infty} \big(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} \, \mathrm{d}u$.

(5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{-\sqrt{a}}^{0} \big(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(6) Prouver que pour $a \geqslant 1$ et $u > 0$, on a : $\big(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} \leqslant (1+u)e^{-u}$.

(7) Montrer que $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} \int_{0}^{+\infty} \big(1 + \frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} \, \mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(8) En déduire que pour $a \to +\infty$, on a l'équivalent : $\Gamma(a+1) \sim \sqrt{2\pi a}\big(\frac{a}{e}\big)^a$.

**Exercice 3.** Pour $a, b > 0$, on pose :

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} u^{a-1} e^{-u} \, \mathrm{d}u \quad \text{ et } \quad I(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \, \mathrm{d}t.$$

On note $A$ le « quart de plan positif » $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x > 0 \text{ et } y > 0\}$.

(1) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : A \to \mathbf{R}_+$ et tous $a, b > 0$, on a :

$$\iint_A f(x+y) x^{a-1} y^{b-1} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; I(a,b) \int_0^{+\infty} u^{a+b-1} f(u) \, \mathrm{d}u.$$

(2) En déduire l'identité : $\Gamma(a) \cdot \Gamma(b) = \Gamma(a+b) \cdot I(a,b)$.

**Exercice 4.** Soit $h$ une fonction positive bornée sur $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x) \, \mathrm{d}x = 1$. On note $h_u(x) = uh(ux)$ pour $x \in \mathbf{R}$ et $u > 0$.

Le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions $f, g$ sur $\mathbf{R}$ est défini par la formule

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y) g(y) \, \mathrm{d}y$$

dès que celle-ci a un sens.

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$.

(1) Justifier que $f * h_u$ est bien défini.

(2) Montrer qu'on a :

$$|\,(f * h_u)(x) - f(x)\,| \quad \leqslant \quad \int_{\mathbf{R}} |\, f(x - \frac{t}{u}) - f(x) \,|\, h(t) \, \mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que pour tout $A > 0$, on a :

$$\lim_{u \to +\infty} \int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} |\, f(x - \frac{t}{u}) - f(x) \,|\, \mathrm{d}x \Big) \, \mathrm{d}t = 0.$$

On pourra se ramener à une classe de fonctions particulières en le justifiant.

(4) Montrer que $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} \|\,(f * h_u) - f\,\|_{L^1(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)} = 0$.

**École polytechnique** **2014-2015**

# MAT 311 « Introduction à l'analyse réelle »

**Contrôle du 3 juillet 2015**
**Durée : 2 heures**

**Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

**Exercice 1.** Soit $H$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On se donne un opérateur linéaire $P : H \to H$ qui satisfait $P \circ P = P$ : on dit que $P$ est un *projecteur*. On suppose que $\| P \| \leqslant 1$. Pour faire court, on omettra le signe de composition $\circ$ dans la suite de l'exercice ; autrement dit, on note $Q^2 = Q \circ Q$ pour tout opérateur $Q : H \to H$.

(1) Justifier que si $P$ n'est pas nul, les hypothèses « $P^2 = P$ et $\| P \| \leqslant 1$ » sont équivalentes aux hypothèses « $P^2 = P$ et $\| P \| = 1$ ».
(2) Montrer que $P^*$ est un projecteur de norme $\leqslant 1$.
(3) Montrer que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$ et que $\mathrm{Im}(P)$ est un sous-espace vectoriel fermé.
(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P^*)^{\perp}$.
(5) En calculant $\| x - P^*(x) \|^2$, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P^*) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$.
(6) Montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P)^{\perp}$ et en déduire que $P$ est un opérateur de projection orthogonale.

**Exercice 2.**

(1) Calculer la valeur numérique de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$.
(2) En déduire qu'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ (on pourra commencer par regarder les sommes partielles d'indice pair).
(3) En considérant la série $\displaystyle\sum_n (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$, calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.
(4) Au moyen des deux questions précédentes, prouver que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

**Exercice 3.** On note $C$ le carré $[0;1]^2$ dans $\mathbf{R}^2$, où l'on voit $\mathbf{R}^2$ comme un plan affine euclidien dont les points sont repérés par leurs coordonnées $(x,y)$. On considère la fonction $g : C \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \cdot \frac{1}{1+y^2t^2}.$$

(1) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est dans $L^2(\mathbf{R}_+^*)$ et montrer que

$$\iint_C \int_0^{+\infty} g(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(\frac{\arctan(t)}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t.$$

(2) Justifier que les diagonales de $C$ sont de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbf{R}^2$ et exprimer en fonction de $x$ et de $y$ des coefficients $a,b,c,d$ pour lesquels on a pour presque tous $x$ et $y$ l'identité :

$$g(x,y,t) = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+y^2t^2}$$

quel que soit $t \in \mathbf{R}_+^*$.

(3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$ en fonction de $x$ et de $y$.

(4) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\arctan(t)}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t = \pi\ln(2)$.

**Exercice 4.** On note $\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact et $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ celui des fonctions continues dont les limites en $\pm\infty$ valent 0. On se donne $p \in [1;+\infty[$ et on note $q$ son exposant conjugué, i.e. satisfaisant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(1) Montrer que si $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^q(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.

On note alors $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

(2) Montrer que si $f$ et $g$ sont continues à support compact, alors il en est de même pour la fonction $f * g$.

(3) On suppose que $p \in ]1;+\infty[$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^q(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ et $\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q$.

(4) Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $f * g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer que $f * g$ n'est pas dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ en général.

**École polytechnique** **2014-2015**

**MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫**

**Contrôle blanc de préparation – fin juin 2015**
**Durée de l'épreuve préparée : 2 heures**

**Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

**Exercice 1.** Soit $H$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On se donne un opérateur (linéaire) borné $T : H \to H$, qu'on suppose auto-adjoint (i.e. $T = T^*$).

(1) Montrer que $H = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$.

On sait que pour tout sous-espace fermé on a $H = F \oplus F^\perp$. Ici $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$ est fermé comme préimage du fermé $\{0\}$ par l'application $\mathrm{id}_H - T$, qui est continue car $T$ est borné. On a :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)^\perp = \{x \in H : \langle y - T(y), x\rangle = 0 \ \forall y \in H\} = \{x \in H : \langle y, x\rangle = \langle T(y), x\rangle \ \forall y \in H\},$$

et comme $T$ est auto-adjoint, cela donne aussi :

$$\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)^\perp = \{x \in H : \langle y, x - T(x)\rangle = 0 \, \forall y\} = \{x \in H : x - T(x) \in H^\perp = \{0\}\},$$

soit : $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$. On conclut en passant à l'orthogonal, ce qui donne $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$, et en faisant $F = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$ dans la remarque initiale.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout $x \in H$, on pose $P_n(x) = \dfrac{x + T(x) + \cdots + T^n(x)}{n+1}$.

(2) Montrer qu'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) - x \| = 0$$

pour tout $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$.

Si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$, on a $T(x) = x$ et par récurrence $T^n(x) = x$ pour tout $n \geqslant 0$. Ceci implique que pour un tel $x$, on a $P_n(x) = x$ et *a fortiori* la conclusion.

On suppose désormais que $\| T \| \leqslant 1$.

(3) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) \| = 0$$

quand $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$.

Déjà si $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)$, on peut l'écrire $x = T(z) - z$ et alors

$$P_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\big(T^{j+1}(z) - T^j(z)\big) = \frac{1}{n+1}\big(T^{n+1}(z) - z\big).$$

Ainsi, dans ce cas : $\| P_n(x) \| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\big(\| T^{n+1}(z) \| + \| z \|\big) \leqslant \dfrac{2\,\| z \|}{n+1}$ (car $\| T \| \leqslant 1$), et la conclusion est vérifiée pour le cas $x \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)$.

Dans le cas général, i.e si $x \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$, on se donne $\varepsilon > 0$ et on se donne $x' \in \mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)$ tel que $\| x - x' \| < \varepsilon$. Ceci permet décrire :

$$\| P_n(x) \| \leqslant \| P_n(x - x') \| + \| P_n(x') \| \leqslant \| x - x' \| + \| P_n(x') \| \leqslant \| P_n(x') \| + \varepsilon,$$

la deuxième inégalité résultant du fait que $P_n$ est un opérateur de norme $\leqslant 1$ par inégalité triangulaire. On conclut grâce au cas particulier déjà traité.

(4) Toujours sous l'hypothèse « $\| T \| \leqslant 1$ », montrer que pour tout $x \in H$ on a :

$$\lim_{n\to\infty} \| P_n(x) - P(x) \| = 0,$$

où $P$ est un opérateur de projection orthogonale que l'on décrira précisément.

Par 1, tout $x \in H$ admet une écriture unique $x = x' + x''$ avec $x' \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$ et $x'' \in \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{id}_H - T)}$. La projection orthogonale $P$ sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - T)$ est l'application qui à tout $x$ associe $x'$ dans l'écriture ci-dessus. On a :

$$P_n(x) - P(x) = \big(P_n(x') - P(x')\big) + \big(P_n(x'') - P(x'')\big) = \big(P_n(x') - x'\big) + P_n(x'').$$

On en déduit que

$$\| P_n(x) - P(x) \| \leqslant \| P_n(x') - x' \| + \| P_n(x'') \|,$$

et on conclut par 2 et 3.

**Exercice 2.** Pour $a > 0$, on pose $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

(1) Montrer que $\Gamma$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^\times$.

On applique le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre. Pour chaque $t > 0$, la fonction $a \mapsto t^{a-1}e^{-t}$ est continue. Pour obtenir une domination uniforme en $a$ convenable, il faut découper suivant que $t$ est $\leqslant 1$ ou $\geqslant 1$ et travailler avec $a \in ]\varepsilon; M[$ pour $0 < \varepsilon < M < +\infty$. Sur un tel intervalle on a :

$$|t^{a-1}e^{-t}| \quad\leqslant\quad t^{\varepsilon-1}e^{-t}\mathbf{1}_{[0;1]}(t) + t^{M-1}e^{-t}\mathbf{1}_{[1;+\infty]}(t),$$

ce qui est bien une domination par une fonction somme de deux fonctions intégrables indépendantes de $a$. Ceci permet d'appliquer le théorème annoncé, de conclure à la continuité sur tout intervalle $]\varepsilon; M[$ et donc finalement sur $\mathbf{R}_+^\times$ tout entier.

(2) Calculer $\displaystyle\lim_{a\to 0,\, a>0} \Gamma(a)$.

On combine le lemme de Fatou et le fait que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est non intégrable pour conclure que la limite cherchée est $+\infty$. Plus précisément, on utilise le critère séquentiel en se donnant une suite $a_n \in \mathbf{R}_+^\times$ telle que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, à laquelle on associe la suite des fonctions $f_n : t \mapsto t^{a_n-1}e^{-t}$. Par Fatou, on a :

$$\int_0^{+\infty} \liminf_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad \liminf_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

où dans ce cas $\liminf_{n\to\infty} f_n(t) = \dfrac{e^{-t}}{t}$ pour tout $t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \Gamma(a_n)$.

(3) Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

C'est une intégration par parties où les termes de bord sont nuls, à savoir :

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}xt^{x-1}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} xt^{x-1}(-e^{-t})\,\mathrm{d}t = 0 + x\Gamma(x),$$

qui permet de voir la première relation (pour justifier que les termes de bord sont nuls, on peut faire un passage à la limite sur les bornes). En calculant que $\Gamma(1) = 1$ on trouve par une récurrence immédiate que : $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

(4) Montrer que $\Gamma(a+1) = a^{a+\frac{1}{2}}e^{-a}\displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{+\infty}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u$.

Cette égalité provient du changement de variable $t = (a+\sqrt{a}u)$, avec $\mathrm{d}t = \sqrt{a}\mathrm{d}u$, qui donne :

$$\Gamma(a+1) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\sqrt{a}}^{+\infty} a^a\big(1+\frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-a}e^{-u\sqrt{a}}\,\sqrt{a}\mathrm{d}u,$$

soit finalement l'expression proposée, une fois qu'on a sorti de l'intégrale tous les facteurs indépendants de $u$.

(5) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_{-\sqrt{a}}^{0}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Afin d'intervertir, on commence par étudier la limite, à $u < 0$ fixé, de $(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}$ quand $a \to +\infty$, $\sqrt{a} > |u|$. Pour cela on fait un développement limité en $\frac{u}{\sqrt{a}}$, ce qui donne :

$$\big(1+\frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} = \exp\big(a(\frac{u}{\sqrt{a}} - \frac{u^2}{2a}) + \eta(a) - u\sqrt{a}\big) = \exp\big(-\frac{u^2}{2} + \eta(a)\big),$$

avec $\lim_{a\to+\infty}\eta(a) = 0$. Ceci implique que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}} = e^{-\frac{u^2}{2}}$, fonction en $u$ dont l'intégrale sur $\mathbf{R}_-$ vaut $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On va donc appliquer le théorème de convergence dominée sur $\mathbf{R}_-$ à la famille de fonctions $u \mapsto \mathbf{1}_{[-\sqrt{a};0]}(u)(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}$. On vient de vérifier la condition de convergence ponctuelle presque partout ; il reste à obtenir une domination uniforme en $a$. On essaie de dominer par la fonction limite, ce qui se fait par exemple en comparant les logarithmes et en utilisant l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2}$ pour $x \in ]-1;0]$ avec $x = \frac{u}{\sqrt{a}}$ (ce qui mérite d'être détaillé sur une copie, par exemple en faisant le tableau de variations de la fonction différence).

(6) Prouver que pour $a \geqslant 1$ et $u > 0$, on a : $\big(1+\frac{u}{\sqrt{a}}\big)^a e^{-u\sqrt{a}} \leqslant (1+u)e^{-u}$.

Puisque le logarithme est croissant, il revient au même de comparer $a\ln(1+\frac{u}{\sqrt{a}})-u\sqrt{a}$ et $\ln(1+u)-u$. Pour cela, on dérive $\phi(u)=a\ln(1+\frac{u}{\sqrt{a}})-u\sqrt{a}-\ln(1+u)+u$. Ceci donne pour $a>1$ :

$$\phi'(u)=\frac{(1-\sqrt{a})u^2}{(\sqrt{a}+u)(1+u)}\leqslant 0,$$

et finalement $\phi(u)\leqslant 0=\phi(0)$. D'où la conclusion.

(7) Montrer que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Le même calcul de développement limité qu'à la question 5 permet de conclure que $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}=e^{-\frac{u^2}{2}}$ pour tout $u>0$ : c'est la condition de convergence ponctuelle pour le théorème de convergence dominée. La condition de domination est satisfaite grâce à la question 6, d'où la conclusion.

(8) En déduire que pour $a\to+\infty$, on a l'équivalent : $\Gamma(a+1)\sim\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a$.

D'après 4, on a :

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\sqrt{a}\left(\frac{a}{e}\right)^a}=\int_{-\sqrt{a}}^{0}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u+\int_0^{+\infty}(1+\frac{u}{\sqrt{a}})^a e^{-u\sqrt{a}}\,\mathrm{d}u,$$

donc on peut conclure en mettant ensemble les questions 5 et 7.

**Exercice 3.** Pour $a,b>0$, on pose :

$$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}u^{a-1}e^{-u}\,\mathrm{d}u\quad\text{ et }\quad I(a,b)=\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t.$$

On note $A$ le « quart de plan positif » $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x>0 \text{ et } y>0\}$.

(1) Montrer que pour toute fonction mesurable $f:A\to\mathbf{R}_+$ et tous $a,b>0$, on a :

$$\iint_A f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\;=\;I(a,b)\cdot\int_0^{+\infty}u^{a+b-1}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Dans cet exercice, on travaille avec des fonctions continues, donc mesurables, et positives ou nulles. On peut donc appliquer le théorème de Tonelli sans précaution supplémentaire. D'abord en posant $u=x+y$, puis $x=ut$, on obtient par changement de variable, d'abord :

$$\iint_A f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}f(u)(\int_0^u x^{a-1}(u-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}u,$$

puis

$$\iint_A f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}f(u)u^{a-1+b-1}(\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,u\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}u,$$

ce qui permet de conclure.

(2) En déduire l'identité : $\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)=\Gamma(a+b)\cdot I(a,b)$.

En posant $f(t)=e^{-t}$, on obtient par la question qui précède :

$$\iint_A e^{x+y}x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \;=\; I(a,b)\int_0^{+\infty} u^{a+b-1}e^u\,\mathrm{d}u = I(a,b)\cdot\Gamma(a+b),$$

et le membre de gauche vaut par Tonelli :

$$\iint_A e^x e^y x^{a-1}y^{b-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} e^x x^{a-1}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty} e^y y^{b-1}\,\mathrm{d}y,$$

soit $\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)$.

**Exercice 4.** Soit $h$ une fonction positive bornée sur $\mathbf{R}$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On note $h_u(x) = uh(ux)$ pour $x\in\mathbf{R}$ et $u>0$.

Le produit de convolution $f*g$ de deux fonctions $f,g$ sur $\mathbf{R}$ est défini par la formule

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}y$$

dès que celle-ci a un sens.

Soit $f\in L^1(\mathbf{R},\mathrm{d}x)$.

(1) Justifier que $f*h_u$ est bien défini.

À $u>0$ fixé, on a par changement de variable $t=x-y$ pour calculer $\|f\|_{L^1}$ :

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x-y)h_u(y)|\,\mathrm{d}y \;\leqslant\; \|h_u\|_\infty\cdot\|f\|_{L^1} = |u|\cdot\|h\|_\infty\cdot\|f\|_{L^1} < +\infty,$$

car $h$ est bornée et $f$ est intégrable ; ainsi le produit de convolution $f*h_u$ est-il bien défini.

(2) Montrer qu'on a :

$$|(f*h_u)(x)-f(x)| \quad\leqslant\quad \int_{\mathbf{R}} |f(x-\frac{t}{u})-f(x)|\,h(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $uy=t$, puis parce que $h$ est positive de norme $L^1$ égale à 1, on obtient successivement :

$$(f*h_u)(x)-f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-\frac{t}{u})h(t)\,\mathrm{d}t - f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(x-\frac{t}{u})h(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathbf{R}} f(x)h(t)\,\mathrm{d}t,$$

ce qui permet de conclure en majorant la valeur absolue de l'intégrale par l'intégrale de la valeur absolue.

(3) Montrer que pour tout $A>0$, on a :

$$\lim_{u\to+\infty}\int_{-A}^{A} h(t)\Big(\int_{\mathbf{R}} |f(x-\frac{t}{u})-f(x)|\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On pourra se ramener à une classe de fonctions particulières en le justifiant.

On voit que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |f(x-\frac{t}{u})-f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f - f(\cdot-\frac{t}{u})\|_{L^1}$. Soit alors $\varepsilon>0$. Par continuité $L^1$ des translations, pour $|t|\leqslant A$, il existe $u_0>0$ tel que $\|f-f(\cdot-\frac{t}{u})\|_{L^1}\leqslant\varepsilon$

pour tout $u \geqslant u_0$. On conclut en intégrant sur $t \in [-A; A]$ cette inégalité multipliée par $h(t)$ et en utilisant le fait que $h$ est positive de norme $L^1$ égale à 1.

(4) Montrer que $\lim_{u\to+\infty} \| (f * h_u) - f \|_{L^1(\mathbf{R},\mathrm{d}x)} = 0$.

Grâce à 2, puis par Tonelli, on obtient :

$$\| (f*h_u) - f \|_{L^1(\mathbf{R},\mathrm{d}x)} \leqslant \int_{\mathbf{R}} \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \, h(t) \,\mathrm{d}t \Big) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbf{R}} h(t) \, \| f - f(\cdot - \frac{t}{u}) \|_{L^1} \,\mathrm{d}t,$$

En notant $\varphi_u(t)$ la dernière fonction intégrée, on a par continuité $L^1$ des translations : $\lim_{u\to+\infty} \varphi_u(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbf{R}$, ainsi qu'une domination uniforme en $u$ de $\varphi_u(t)$ par la fonction intégrable $2 \| f \|_{L^1} h$ : on peut donc conclure par convergence dominée.

**Remarque :** voici une façon d'argumenter si on est moins astucieux (auquel cas on a besoin de l'indication pour la question 3).

**Question 3.** Supposons que $f$ est continue à support compact, disons contenu dans $[-B; B]$ pour $B > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Par Heine, $f$ est uniformément continue et il existe $\delta > 0$ tel que si $|x - x'| < \delta$, alors $| f(x) - f(x') | < \varepsilon$. Dans ce cas, pour $u > \frac{A}{\delta}$, puisque $\frac{t}{u} < \delta$ quand $t \in [-A; A]$, on a :

$$\Big| \int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t \Big| \quad \leqslant \quad \int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{-B-\delta}^{B+\delta} \varepsilon \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad 2(B+\delta)\varepsilon,$$

puisque $h$ est norme $L^1$ égale à 1.

Si maintenant $f$ est quelconque dans $L^1(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, on utilise un argument de densité ; pour $\eta > 0$, on se donne une fonction $f_\eta \in \mathscr{C}_c(\mathbf{R})$ qui approche $f$ à $\eta$ près en norme $L^1$. On majore alors $\int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t$ par la somme

— du terme $\int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x) - f_\eta(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t$ qui est $\leqslant \eta$ par choix de $f_\eta$ et car $\| h \|_{L^1} = 1$ ;

— du terme $\int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f_\eta(x - \frac{t}{u}) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t$ qui est lui aussi $\leqslant \eta$ pour les mêmes raisons ;

— et du terme $\int_{-A}^{A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f_\eta(x - \frac{t}{u}) - f_\eta(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t$ qui tend vers 0 quand $u \to +\infty$ par le paragraphe précédent.

Ceci prouve la convergence demandée.

**Question 4.** Soit $\varepsilon > 0$. On choisit $A > 0$ tel que $\int_{|t|>A} h(x) \,\mathrm{d}x < \varepsilon$. Ceci introduit, grâce à 2 puis par Tonelli, on obtient :

$$\| (f*h_u) - f \|_{L^1(\mathbf{R},\mathrm{d}x)} \leqslant \int_{\mathbf{R}} \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \, h(t) \,\mathrm{d}t \Big) \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\mathbf{R}} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t,$$

et finalement on conclut par découpage :

$$(\ldots) \leqslant \int_{|t|>A} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t + \int_{[-A;A]} h(t) \Big( \int_{\mathbf{R}} | f(x - \frac{t}{u}) - f(x) | \,\mathrm{d}x \Big) \,\mathrm{d}t,$$

le premier terme étant $\leqslant 2\varepsilon \parallel f \parallel_{L^1}$ et le second ayant pour limite 0 quand $u \to +\infty$ d'après 3.

**École polytechnique** **2014-2015**

**MAT 311 ≪ Introduction à l'analyse réelle ≫**

**Contrôle du 3 juillet 2015**
**Durée : 2 heures**

**Avertissement :** l'utilisation d'appareils électroniques (calculatrices, téléphones portables, traducteurs, etc) est rigoureusement interdite. Le polycopié, les documents distribués en amphi et les notes de cours personnelles sont autorisés.

Les différents exercices sont indépendants et il est fortement recommandé de lire le sujet en entier. Il n'est nullement nécessaire de terminer le sujet pour avoir une excellente note. La rédaction doit être concise et précise et on énoncera clairement les théorèmes utilisés.

**Exercice 1.** Soit $H$ un espace de Hilbert sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On se donne un opérateur linéaire $P : H \to H$ qui satisfait $P \circ P = P$ : on dit que $P$ est un *projecteur*. On suppose que $\| P \| \leqslant 1$. Pour faire court, on omettra le signe de composition $\circ$ dans la suite de l'exercice ; autrement dit, on note $Q^2 = Q \circ Q$ pour tout opérateur $Q : H \to H$.

(1) Justifier que si $P$ n'est pas nul, les hypothèses ≪ $P^2 = P$ et $\| P \| \leqslant 1$ ≫ sont équivalentes aux hypothèses ≪ $P^2 = P$ et $\| P \| = 1$ ≫.

Le second ensemble d'hypothèses implique évidemment le premier. Maintenant, dire que $P \neq 0$ revient à supposer l'existence d'un vecteur $x$ tel que $P(x) \neq 0$. Puisque $P$ est un projecteur, ce vecteur est alors un vecteur propre $v = P(x)$, de valeur propre 1, pour lequel on a donc : $\| P(v) \| = \| v \|$, ce qui implique que $\| P \| = 1$.

(2) Montrer que $P^*$ est un projecteur de norme $\leqslant 1$.

Quand on passe à l'adjoint la relation $P^2 = P$, on obtient $(P^*)^2 = P^*$ (on peut re-prouver comme en TD que $(AB)^* = B^*A^*$, mais ce n'est pas nécessaire). Pour un opérateur $A$ d'un espace de Hilbert, on a $\| A \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} | \langle A(x), y \rangle |$. Mais par définition de l'adjoint, cette borne supérieure vaut aussi

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} | \langle x, A^*(y) \rangle | = \sup_{\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1} | \langle A^*(y), x \rangle |,$$

donc $\| A^* \| = \| A \|$.

(3) Montrer que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$ et que $\mathrm{Im}(P)$ est un sous-espace vectoriel fermé.

On a : $(\mathrm{id}_H - P)P = P - P^2 = 0$ donc $\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$ alors $x = P(x) \in \mathrm{Im}(P)$. D'où l'égalité, qui fait voir $\mathrm{Im}(P)$ comme le noyau, i.e. la préimage du fermé $\{0\}$, par l'application continue $\mathrm{id}_H - P$ : c'est donc un fermé.

(4) Montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P^*)^{\perp}$.

On a $x \in \mathrm{Ker}(P)$ si, et seulement si, on a $\langle P(x), y \rangle = 0$ pour tout $y \in H$, soit encore $\langle x, P^*(y) \rangle = 0$ pour tout $y \in H$, ce qui est finalement équivalent à $x \in \mathrm{Im}(P^*)^{\perp}$.

(5) En calculant $\| x - P^*(x) \|^2$, montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P^*) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$.

On a :

$$\| x - P^*(x) \|^2 = \| x \|^2 + \| P^*(x) \|^2 - 2\,\mathrm{Re}\big(\langle x, P^*(x) \rangle\big).$$

Pour $x \in \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)$, i.e. pour $x = P(x)$, le dernier terme se précise car :

$$\langle x, P^*(x) \rangle = \langle P(x), x \rangle = \langle x, x \rangle = \| x \|^2,$$

et en revenant au calcul précédent, on obtient dans ce cas :

$$0 \leqslant \| x - P^*(x) \|^2 = \| P^*(x) \|^2 - \| x \|^2,$$

qui est $\leqslant 0$ car on a vu que $P^*$ est de norme $\leqslant 1$. Ainsi $P^*(x) = x$ dès que $P(x) = x$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P^*)$ ; l'égalité s'obtient en intervertissant les rôles de $P$ et $P^*$ (on sait que ces rôles sont symétriques depuis 2, et on a $(P^*)^* = P$).

(6) Montrer que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$ et en déduire que $P$ est un opérateur de projection orthogonale.

Puisque $\mathrm{Im}(P)$ est fermé par 3, on a : $H = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)^\perp$ ; en outre, le point 3 dit aussi que pour tout $x \in \mathrm{Im}(P)$ on a $P(x) = x$. Il suffit donc de voir que $\mathrm{Ker}(P) = \mathrm{Im}(P)^\perp$ pour conclure que $P$ est l'opérateur de projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(P)$. Mais on a :

$$\mathrm{Im}(P)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P)^\perp = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_H - P^*)^\perp = \mathrm{Im}(P^*)^\perp,$$

la première égalité provenant de 3, la dernière de 3 appliqué à $P^*$ et la deuxième de 5 ; en appliquant 4 on obtient donc $\mathrm{Im}(P)^\perp = \mathrm{Ker}(P)$, cqfd.

**Exercice 2.**

(1) Calculer la valeur numérique de : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$.

Les fonctions considérées sont continues et positives ou nulles sur $[0;1]$, donc par convergence monotone on peut intervertir, ce qui donne :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}\,\mathrm{d}x.$$

Mais pour $x \in [0;1[$, i.e. pour presque tout $x \in [0;1]$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}$, et donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

(2) En déduire qu'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln(2)$ (on pourra commencer par regarder les sommes partielles d'indice pair).

Pour chaque entier $n \geqslant 0$, on a : $\displaystyle\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$, donc

$$\sum_{n=0}^{N} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{2N} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

pour tout $N \geqslant 0$. Par 1 on voit donc que les sommes partielles d'indice pair convergent vers $\ln(2)$, et comme le terme général converge vers 0 on a finalement l'identité demandée.

(3) En considérant la série $\sum_n (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x$, calculer : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$.

Cette fois il s'agit d'une série de fonctions de signe alternant, mais la question précédente fournit une domination uniforme des fonctions sommes partielles, puisque pour tout $N \geqslant 0$ et tout $x \in [0;1]$ on a :

$$|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n x^{2n}(1-x)| \leqslant \sum_{n=0}^{N} x^{2n}(1-x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x),$$

le dernier majorant étant une fonction intégrable sur $[0;1]$. On a par ailleurs convergence simple de la série sur $[0;1[$ : en effet $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}(1-x) = \frac{1-x}{1+x^2}$. Ceci permet d'appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour intervertir :

$$\sum_n (-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).$$

Il reste à remarquer que pour chaque entier $n \geqslant 0$, on a :

$$\int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)},$$

pour conclure que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$.

(4) Au moyen des deux questions précédentes, prouver que : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Vu les valeurs des sommes de séries déjà calculées, on calcule :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2(n+1)} = \frac{\pi}{4},$$

et le membre de gauche est la somme de la série proposée.

**Exercice 3.** On note $C$ le carré $[0;1]^2$ dans $\mathbf{R}^2$, où l'on voit $\mathbf{R}^2$ comme un plan affine euclidien dont les points sont repérés par leurs coordonnées $(x,y)$. On considère la fonction $g : C \times \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ définie par

$$g(x,y,t) = \frac{1}{1+x^2t^2} \cdot \frac{1}{1+y^2t^2}.$$

(1) Justifier que la fonction $t \mapsto \dfrac{\arctan(t)}{t}$ est dans $L^2(\mathbf{R}_+^*)$ et montrer que

$$\iint_C \int_0^{+\infty} g(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\frac{\arctan(t)}{t})^2\,\mathrm{d}t.$$

La fonction $t \mapsto \left(\frac{\arctan(t)}{t}\right)^2$ est intégrable car elle se prolonge par continuité en 0 (par la valeur 1), et elle est équivalente en $+\infty$ à $\frac{\pi^2}{4t^2}$, qui est inégrable sur tout intervalle $[M, +\infty[$ avec $M > 0$. L'intégrale triple proposée met en jeu une fonction positive ou nulle et continue, donc mesurable ; on peut donc appliquer Tonelli pour obtenir :

$$\iint_C \int_0^{+\infty} g(x,y,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^1 \frac{1}{1+u^2t^2}\,\mathrm{d}u\Big)^2\,\mathrm{d}t,$$

et le changement de variable $v = ut$ fait voir que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+u^2t^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\arctan(t)}{t}$.

(2) Justifier que les diagonales de $C$ sont de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbf{R}^2$ et exprimer en fonction de $x$ et de $y$ des coefficients $a, b, c, d$ pour lesquels on a pour presque tous $x$ et $y$ l'identité :

$$g(x,y,t) = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+y^2t^2}$$

quel que soit $t \in \mathbf{R}_+^*$.

Les diagonales de $C$ sont contenues dans des sous-espaces affines de dimension 1 (des droites), elles sont donc de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^2$. En réduisant l'écriture proposée au même dénominateur et en identifiant degré par degré, on trouve les équations :

$$b + d = 1, \quad a + c = 0, \quad by^2 + dx^2 = 0 \quad \text{et} \quad ay^2 + cx^2 = 0,$$

soit finalement :

$$a = c = 0, \quad b = \frac{x^2}{x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad d = \frac{-y^2}{x^2 - y^2}.$$

On a l'égalité demandée pour presque tous $x$ et $y$ car il faut juste exclure la diagonale $\{x = y\}$ de $C$, qui est de mesure de Lebesgue nulle donc négligeable.

(3) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$ en fonction de $x$ et de $y$.

C'est du calcul, qui utilise l'écriture de la question précédente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{x^2}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+x^2t^2} - \frac{y^2}{x^2-y^2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+y^2t^2},$$

ce qui donne, avec les changements de variable $u = xt$, $v = yt$ et le fait qu'une primitive de $z \mapsto \frac{1}{1+z^2}$ est $z \mapsto \arctan(z)$ :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)} = \frac{x}{x^2-y^2}\frac{\pi}{2} - \frac{y}{x^2-y^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+y)}.$$

(4) Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\arctan(t)}{t}\Big)^2\,\mathrm{d}t = \pi\ln(2)$.

Par la question 1, il suffit pour conclure de calculer l'intégrale sur $C$ de la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{\pi}{2(x+y)}$. En se rappelant qu'une primitive de $z \mapsto \ln(z)$ est $z \mapsto z\ln(z) - z$, et en passant à la limite sur les bornes d'intégration (si on le juge utile) on obtient par Tonelli :

$$\int_C \frac{\pi}{2(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}\int_0^1 \big(\ln(x+1) - \ln(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2\ln(2),$$

ce qui conduit bien au résultat cherché.

**Exercice 4.** On note $\mathscr{C}_c(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues à support compact et $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ celui des fonctions continues dont les limites en $\pm\infty$ valent 0. On se donne $p \in [1; +\infty[$ et on note $q$ son exposant conjugué, i.e. satisfaisant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(1) Montrer que si $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^q(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$ a un sens pour tout $x \in \mathbf{R}$.

D'après Hölder, on a :

$$| \int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t \,| \leqslant \int_{\mathbf{R}} | f(x-t)g(t) |\,\mathrm{d}t \leqslant \| g \|_q \int_{\mathbf{R}} | f(x-t) |^p \,\mathrm{d}t,$$

et la dernière intégrale vaut $\| f \|_p$ par invariance par translation de la mesure de Lebesgue (i.e. changement de variable affine de constante multiplicative $\pm 1$).

On note alors $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Avec cette écriture, la question 1 dit que $(f * g)(x)$ a un sens et que

$$\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q \,.$$

(2) Montrer que si $f$ et $g$ sont continues à support compact, alors il en est de même pour la fonction $f * g$.

Supposons $f \in L^p(\mathbf{R})$ nulle hors du segment $[-A; A]$ (pour un $A > 0$ convenable) et $g \in L^q(\mathbf{R})$ nulle hors du segment $[-B; B]$ (pour un $B > 0$ convenable). Si $x$ satisfait $| x | > A + B$, on a alors : $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-B}^{B} f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Maintenant pour $t \in [-B; B]$, on a : $| x - t | > A + B - B = A$, donc $f(x-t) = 0$ et finalement $(f * g)(x) = 0$. Ceci montre que $f * g$ est nulle hors du segment $[-(A+B); A+B]$.

Si on suppose en outre que $f$ et $g$ sont continues et si on se donne une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ et $x \in \mathbf{R}$ tels que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, alors on peut écrire :

$$(f * g)(x_n) = \int_{-B}^{B} f(x_n - t)g(t)\,\mathrm{d}t \to (f * g)(x) \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

par convergence dominée appliquée à la suite de fonctions $t \mapsto f(x_n - t)g(t)$, qui converge ponctuellement vers $t \mapsto f(x-t)g(t)$ pour tout $t$ et qui est uniformément dominée par $t \mapsto \| f \|_\infty \cdot \| g \|_\infty \cdot \mathbf{1}_{[-B;B]}(t)$.

(3) On suppose que $p \in ]1; +\infty[$. Montrer que si $f \in L^p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^q(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ et $\| f * g \|_\infty \leqslant \| f \|_p \cdot \| g \|_q$.

L'inégalité de fin d'énoncé découle de 1. Par densité, on peut choisir des suites $(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans $L^p(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et $(g_n)_{n\geqslant 0}$ dans $L^q(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ telles que :

$$\lim_{n\to\infty} \| f - f_n \|_p = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} \| g - g_n \|_q = 0,$$

de sorte que par 1, on peut écrire :

$$\| f*g - f_n*g_n \|_\infty \leqslant \| f*g - f*g_n \|_\infty + \| f*g_n - f_n*g_n \|_\infty \leqslant \| f \|_p \cdot \| g - g_n \|_q + \| f - f_n \|_p \cdot \| g_n \|_q,$$

ce qui prouve que $\lim_{n\to\infty} \| f * g - f_n * g_n \|_\infty = 0$ car $\lim_{n\to\infty} \| g_n \|_q = \| g \|_q$. Ainsi, la fonction $f*g$ est-elle limite uniforme des fonctions $f_n*g_n$, qui sont continues et à support compact par 2 : on en conclut que $f * g \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R})$.

(4) Montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$ et si $g \in L^\infty(\mathbf{R}, \mathrm{d}x)$, alors $f*g$ est uniformément continue et bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer que $f * g$ n'est pas dans $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$ en général.

On suppose $1 \leqslant p < +\infty$. Par 1, la fonction $f * g$ est uniformément bornée sur $\mathbf{R}$. On a en outre :

$$|(f*g)(x)-(f*g)(x')| \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x-t)-f(x'-t)| \cdot |g(t)| \ \mathrm{d}t \leqslant \int_{\mathbf{R}} |f(x-t)-f\big((x-t)+(x'-x)\big)| \cdot |g(t)| \ \mathrm{d}t,$$

ce qui se majore d'après 1 par : $\| f(\cdot + x' - x) - f \|_p \cdot \| g \|_q$, et la continuité $L^p$ des translations implique la continuité uniforme de $f * g$.

Si $f$ est intégrable et $g$ constante égale à 1, alors la fonction $f * g$ est constante égale à $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{d}t$ et ne tend donc pas vers 0 à l'infini dès que $\int_{\mathbf{R}} f(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$.