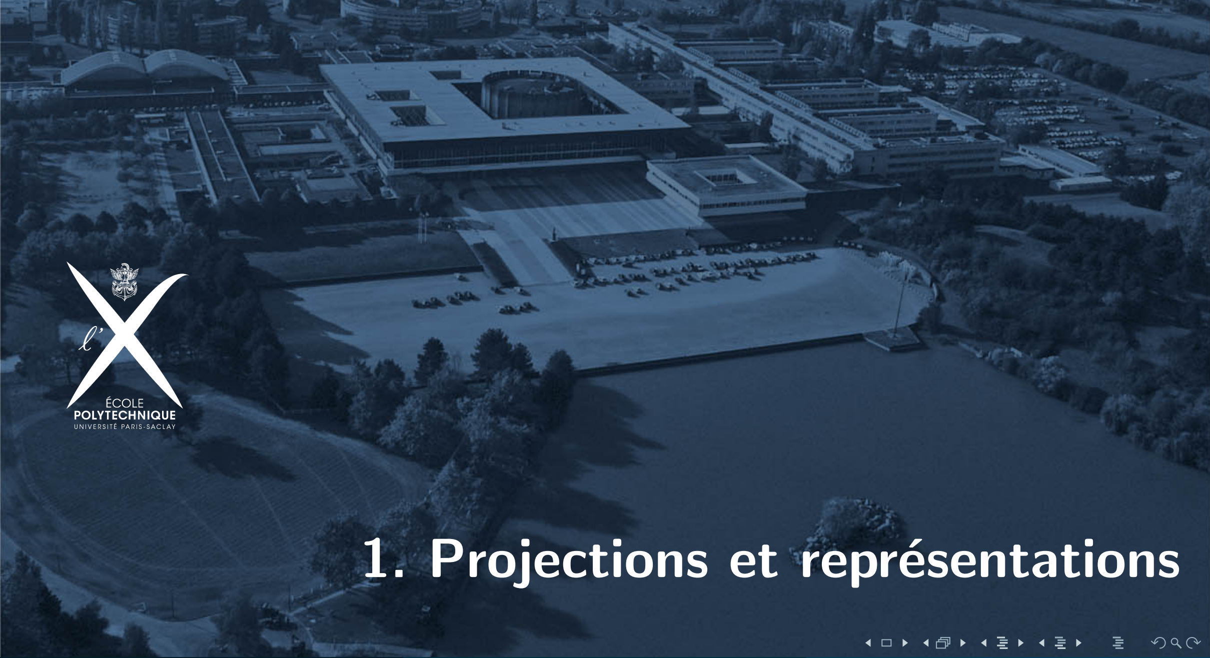
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Espaces de Hilbert, analyse



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

1. Projections et représentations

Forme linéaire associée à un vecteur

Pour tout $a \in H$, on note Λ_a la forme linéaire définie sur H par

$$\Lambda_a(x) := \langle x, a \rangle.$$

Lemme

Avec la définition ci-dessus, $\Lambda_a \in H'$ et $\|\Lambda_a\|_{H'} = \|a\|_H$.

Preuve. On a $|\Lambda_a(x)| = |\langle x, a \rangle| \leqslant \|a\| \, \|x\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) donc

$$\|\Lambda_a\|_{H'} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} |\Lambda_a(x)| \leqslant \|a\|.$$

Enfin, $\Lambda_a(a) = \|a\|^2$ ce qui montre que $\|\Lambda_a\|_{H'} \geqslant \|a\|$. $\square$

Remarque : réciproquement en dimension finie, on sait que si u est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^N$, il existe $y \in \mathbf{R}^N$ tel que $u(x) = x \cdot y$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien.

Le théorème qui suit est une vaste généralisation de la remarque au cas des espaces de Hilbert.

Théorème (théorème de représentation de Riesz)

Soit H un espace de Hilbert et $u \in H'$ une forme linéaire continue *sur H. Alors, il existe un unique $a \in H$ tel que,*

$$\forall x \in H, \qquad u(x) = \Lambda_a(x).$$

De plus, l'application $a \mapsto \Lambda_a$ définie de H dans H', est un isomorphisme anti-linéaire *isométrique.*

Preuve. Soit $u \in H'$, $u \neq 0$. On note $F := \operatorname{Ker} u$, qui est un sous-espace fermé de H (car u est continue). On décompose $H = F \oplus F^\perp$. Le sous-espace $F^\perp$ est de dimension 1 : si $a \in F^\perp - \{0\}$ et, si $x \in F^\perp$, on peut écrire

$$u\left(x - \frac{u(x)}{u(a)}\,a\right) = 0, \qquad \text{donc} \qquad x - \frac{u(x)}{u(a)}\,a \in F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Conclusion $x = \frac{u(x)}{u(a)}\,a$. Choisissons $a \in F^\perp$ tel que $u(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|_H^2$. On vérifie que $u(x) = \langle x, a\rangle$, pour tout $x \in H$.

Exemple : toute forme linéaire continue définie sur $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ est de la forme

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

pour une fonction $g \in L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ convenable.

Remarque : il résulte du théorème de représentation de Riesz que tout dual topologique H' d'un espace de Hilbert H est lui-même un espace de Hilbert, ce qui n'était pas évident *a priori*. Le produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'}$ sur H' est défini en posant, pour tous $u, v \in H'$

$$\langle u, v\rangle_{H'} := \langle b, a\rangle,$$

où $u = \Lambda_a$ et $v = \Lambda_b$.

Théorème (théorème de Hahn-Banach dans un espace de Hilbert)

Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H tel que $\overline{F} \neq H$.

Pour tout $x \notin \overline{F}$, il existe $u \in H'$, une forme linéaire continue, telle que :

$$u(x) = 1 \qquad \textit{et} \qquad u \equiv 0 \quad \textit{sur} \quad F.$$

Preuve. On note $G := F^\perp = \overline{F}^\perp$ et on décompose : $x = P_G(x) + \big(x - P_G(x)\big)$, où $x - P_G(x) \in G^\perp = \overline{F}$. Comme $P_G(x) \neq 0$ (sinon on aurait $x \in \overline{F}$), on peut définir

$$y := \frac{P_G(x)}{\|P_G(x)\|^2} \in F^\perp = \overline{F}^\perp.$$

Donc

$$\Lambda_y(x) = \langle x, y \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \Lambda_y(z) = \langle z, y \rangle = 0,$$

pour $z \in \overline{F}$. Il suffit alors de prendre $u := \Lambda_y$.

Corollaire (critère de densité)

Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Autrement dit, pour vérifier qu'un sous-espace F est dense de H, il suffit de vérifier que

$$\forall a \in H, \qquad (\langle x, a\rangle = 0, \quad \forall x \in F) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Preuve. Si F est dense, alors $\bar{F} = H$ et $F^\perp = \bar{F}^\perp = \{0\}$. Inversement, si F n'est pas dense, il existe $u \in H'$, $u \neq 0$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Il existe $a \in H$, $a \neq 0$ tel que $u = \Lambda_a$. Alors $\langle x, a\rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et $a \neq 0$. Donc $F^\perp \neq \{0\}$. □

Exemple : Soit $\ell_c(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ l'ensemble des suites de $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. On note $e_n \in \ell_c(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui est égal à 1. Si $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ est orthogonale à tous les élements de $\ell_c(\mathbf{N}; \mathbf{C})$, on a

$$\langle a, e_n\rangle_{\ell^2} = a_n = 0,$$

donc $a = 0$. Conclusion, $\ell_c(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ est dense dans $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$.

Théorème de Riesz pour les formes sesquilinéaires

Définition (continuité des formes sesquilinéaires)

Une forme sesquilinéaire $\Phi : H \times H \to \mathbf{C}$ *est* continue *s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$|\Phi(x,y)| \leqslant C \, \|x\| \|y\|, \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : la continuité (au sens usuel) de $\Phi : H \times H \to \mathbf{C}$ est équivalente à la continuité au sens de la définition ci-dessus.

Théorème (théorème de représentation de Riesz - version sesquilinéaire)

Soit Φ *une forme sesquilinéaire continue sur un espace de Hilbert* H*. Alors, il existe une unique application linéaire continue* $A : H \to H$ *telle que*

$$\Phi(x,y) = \langle x, A(y) \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : si Φ est hermitienne alors A vérifie $\langle x, A(y) \rangle = \langle A(x), y \rangle$.

Théorème de Riesz pour les formes sesquilinéaires, preuve

Preuve. Soit $y \in H$. La forme linéaire $x \mapsto \Phi(x, y)$ est continue, donc par le théorème de représentation de Riesz il existe un unique $a_y \in H$ tel que $\Phi(x, y) = \langle x, a_y \rangle$ pour tout x. Vérifions que l'application $A : H \to H$ définie par $A(y) := a_y$ est linéaire et continue.

La linéarité résulte de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz.

Par hypothèse

$$\|A(y)\|^2 = \langle A(y), A(y) \rangle = \Phi(A(y), y) \leqslant C \, \|y\| \, \|A(y)\|.$$

Donc

$$\|A(y)\| \leqslant C \, \|y\|,$$

ce qui montre la continuité de A. $\square$

Adjoint d'une application linéaire continue

Définition

Soit $A : H \to H$ une application linéaire continue. On appelle adjoint de A et on note A^*, une application linéaire continue $A^* : H \to H$ vérifiant

$$\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : l'adjoint, s'il existe, est unique (par injectivité de l'application $a \mapsto \Lambda_a$).

Corollaire

Soit A une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H dans lui-même. Alors, l'adjoint de A est bien défini et c'est une application linéaire continue de H dans H.

Preuve. La forme sesquilinéaire $\Phi(x, y) := \langle A(x), y\rangle$ est continue. En effet

$$|\langle A(x), y\rangle| \leqslant \|A(x)\| \, \|y\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H,H)} \, \|x\| \|y\|.$$

Il existe donc A^* (unique) telle que $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$.

Exemple : Soit $K \in L^2([0,1]^2; \mathbf{C})$. On définit $A_K : L^2([0,1]; \mathbf{C}) \to L^2([0,1]; \mathbf{C})$ par

$$A_K(f)(x) := \int_{[0,1]} K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Alors A_K est une application bien définie et continue de $L^2([0,1]; \mathbf{C})$ dans lui-même et l'adjoint de A_K est donné par $A_{\tilde{K}}$ où $\tilde{K}(x,y) := \overline{K(y,x)}$.

Justification. Par Cauchy-Schwarz puis Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |A_K(f)(x)|^2\, \mathrm{d}x \quad &\leqslant \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} |K(x,y)|^2\, \mathrm{d}y \right) \left(\int_{[0,1]} |f(y)|^2\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{[0,1]^2} |K(x,y)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right) \left(\int_{[0,1]} |f(y)|^2\, \mathrm{d}y \right).\end{aligned}$$

Autrement dit : $\|A_K(f)\|_{L^2([0,1])} \leqslant \|K\|_{L^2([0,1]^2)}\, \|f\|_{L^2([0,1])}$.

Exemple d'opérateur à noyau

Exemple : l'application $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ définie par

$$A(f)(x) := (1-x) \int_{[0,x]} y\, f(y)\, \mathrm{d}y + x \int_{[x,1]} (1-y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

pour toute $f \in L^2([0,1])$, peut aussi s'écrire

$$A(f)(x) = \int_{[0,1]} K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y,$$

pour

$$K(x,y) := \min\big(x(1-y), y(1-x)\big).$$

Si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on vérifie que $u := A(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui est solution de l'équation

$$u'' + f = 0$$

sur $[0;1]$, avec comme conditions au bord $u(0) = u(1) = 0$.

Formes sesquilinéaires coercives

Définition

Une forme sesquilinéaire Φ *définie sur un espace de Hilbert* H *est* coercive*, s'il existe une constante* $c > 0$ *telle que*

$$\Phi(x,x) \geqslant c\,\|x\|^2,$$

pour tout $x \in H$.

Théorème (Lax-Milgram)

On suppose que Φ est une forme hermitienne continue et coercive, alors l'application A définie dans le Théorème de représentation de Riesz est inversible et d'inverse continu.

Preuve. La coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donnent

$$c\,\|x\|^2 \leqslant \Phi(x,x) =: \langle x, A(x)\rangle \leqslant \|A(x)\|\,\|x\|.$$

Conclusion

$$c\,\|x\| \leqslant \|A(x)\|,$$

donc A est injective. $\square$

2. Bases hilbertiennes

Notion de base hilbertienne

Définition

Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ *une famille dénombrable d'un espace de Hilbert* H*. On dit que la famille* $(e_n)_{n\geqslant 0}$ *est une* base hilbertienne *si :*

(i) *pour tous* $n \neq m$ *on a* $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, *et* $\|e_n\| = 1$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$ *;*

(ii) *l'espace vectoriel* $Vect\{e_n \ : n \in \mathbf{N}\}$ *des combinaisons linéaires* finies *des vecteurs* e_n, *pour* $n \in \mathbf{N}$, *est dense dans* H

Attention : une *base hilbertienne* n'est pas une base *algébrique* car pour une base algébrique, tout élément de l'espace est combinaison linéaire *finie* d'éléments de la base.

Identité de Parseval

Théorème

Soit $(e_n)_{n \geqslant 0}$ *une base hilbertienne d'un espace de Hilbert* H*. Tout* $x \in H$ *s'écrit de manière unique comme la somme d'une série convergente dans* H

$$x = \sum_{n \geqslant 0} x_n \, e_n \qquad \text{où} \qquad x_n := \langle x, e_n \rangle \in \mathbf{C}.$$

De plus, on a l'égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n \geqslant 0} |x_n|^2 = \sum_{n \geqslant 0} |\langle x, e_n \rangle|^2.$$

Réciproquement, si $\sum_{n \geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty$*, alors* $\sum_{n \geqslant 0} x_n \, e_n$ *converge dans* H*.*

Identité de Parseval, preuve

Preuve. Soit P_n la projection orthogonale sur $F_n := \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$. Par hypothèse $F = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} F_n$ est dense dans H, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n(x) = x$. De plus $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k e_k$, où $x_n := \langle x, e_n \rangle$. Par Pythagore $\|P_n(x)\|^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} |x_k|^2$, et par passage à la limite on obtient la formule de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k \geqslant 0} |x_k|^2.$$

On suppose maintenant que $\sum\limits_{n \geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty$. Par Pythagore, on a $\left\| \sum\limits_{k=m}^{n} x_k\, e_k \right\|^2 = \sum\limits_{k=m}^{n} |x_k|^2$.

En particulier, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\, e_k \right)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans H, donc elle converge. $\square$

Lemme

Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une famille orthonormale de vecteurs de H et $x \in H$. Alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$, est la projection orthogonale de x sur $\overline{F}$, l'adhérence du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e_n.

Le théorème de Pythagore nous permet décrire

$$\|x\|^2 = \|x - P_{\overline{F}}(x)\|^2 + \|P_{\overline{F}}(x)\|^2 = \|x - P_{\overline{F}}(x)\|^2 + \sum_{n\geqslant 0} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

On en déduit l'*inégalité de Bessel* :

$$\sum_{n\geqslant 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Soit $H = L^2(S^1; \mathbf{C})$ muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(t)\, \overline{g(t)}\, \mathrm{d}t.$$

La famille $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ où $e_n(t) := e^{int}$ est une famille orthonormée de $L^2(S^1; \mathbf{C})$.

Par Stone-Weierstrass, les combinaisons linéaires des e_n sont denses dans $\mathcal{C}(S^1; \mathbf{C})$ pour la norme de la convergence uniforme, qui lui-même est dense dans $L^2(S^1; \mathbf{C})$, pour la norme $\| \cdot \|_{L^2}$.

Conclusion : la série de Fourier de $f \in L^2(S^1; \mathbf{C})$ converge pour la norme L^2 vers f et l'égalité de Parseval nous donne

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} |f(t)|^2 \mathrm{d}t.$$

où $c_n(f) := \langle f, e_n \rangle_{L^2} = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{S^1} f(t)\, e^{-int} \mathrm{d}t$ est le n-ième coefficient de Fourier de la fonction f.

Espaces de Hilbert séparables

Définition

On dit qu'un espace de Hilbert H est séparable, s'il existe un sous-ensemble de H qui est à la fois dénombrable et dense.

Théorème

Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.

Preuve. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. $\square$

Remarque : si H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n \geqslant 0}$, alors H est séparable.

Preuve. Considérer le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les e_n, pour $n \in \mathbf{N}$. $\square$

Remarque : Tous les espaces considérés dans ce cours sont séparables : $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$, $L^2(\mathbf{R}; \mathbf{C})$, $L^2([a, b]; \mathbf{C})$, ... sont des espaces de Hilbert séparables.

Espaces de Hilbert séparables

Corollaire

Tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes entre eux.

Preuve. Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $\mathbf{x} := (x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$, on note

$$L(\mathbf{x}) := \sum_{n\geqslant 0} x_n e_n \in H.$$

Alors $L : \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C}) \to H$ est linéaire et $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ (Parseval). Donc L est continue et injective ; elle est surjective par définition d'une base hilbertienne. $\square$

Proposition

Un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert séparable est séparable.

Preuve. Soit $X = \{x_n \ : \ n \geqslant 0\}$ un ensemble dénombrable et dense dans H. Puisque P_F est 1-lipschitzienne, pour tout $y \in F$, on a : $\|P_F(x_n) - y\| = \|P_F(x_n) - P_F(y)\| \leqslant \|x_n - y\|$. Ainsi $P_F(X)$ est dense dans F. $\square$

Ondelettes de Haar (1909)

On note

$$\varphi := \mathbf{1}_{[0,1/2[} - \mathbf{1}_{[1/2,1[}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $k = 0, \ldots, 2^n - 1$, on note

$$\varphi_{n,k}(x) := 2^{n/2}\,\varphi(2^n x - k).$$

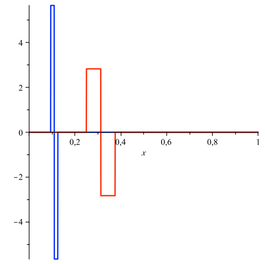


FIGURE: Les ondelettes de Haar $\varphi_{5,3}$ (en bleu) et $\varphi_{3,2}$ (en rouge).

Lemme

La fonction $\mathbf{1}$ *et les fonctions* $\varphi_{n,k}$ *pour* $n \in \mathbf{N}$ *et pour* $0 \leqslant k < 2^n$*, forment une base hilbertienne de* $L^2([0,1];\mathbf{C})$*.*

Preuve. Soit $f \in L^2([0,1];\mathbf{C})$ orthogonale à $\mathbf{1}$ et à toutes les $\varphi_{n,k}$. On a

$$\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

car f est orthogonale à $\mathbf{1}$ et

$$\int_{[0,1/2]} f(x)\mathrm{d}x - \int_{[1/2,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

car f est orthogonale à $\varphi_{0,0}$. Donc

$$\int_{[0,1/2]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[1/2,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ondelettes de Haar (1909)

On montre (récurrence sur $n \geqslant 0$) que, pour $0 \leqslant k < 2^n$,

$$\int_{\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

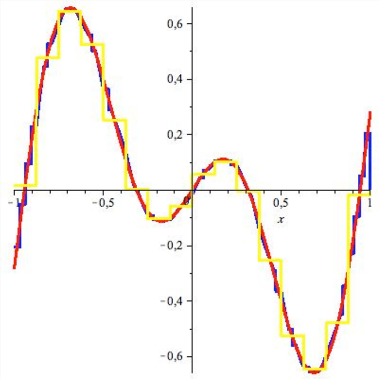
La fonction

$$x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est continue et est égale à une même constante en les points de la forme $\frac{k}{2^m}$, donc elle est constante sur $[0,1]$.

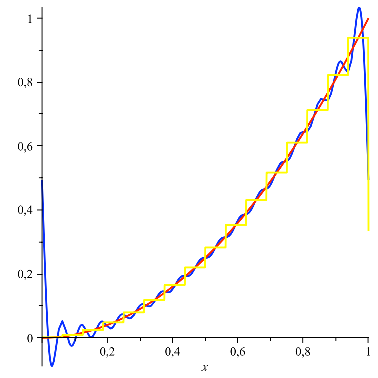
Donc, f est orthogonale à toutes les fonctions indicatrices des sous-intervalles de $[0,1]$ dont les combinaisons linéaires sont denses dans $L^2([0,1];\mathbf{C})$. Conclusion, $f = 0$ p.p. sur $[0,1]$. $\square$

Ondelettes de Haar



Décomposition en ondelettes de Haar de la fonction $x \cos(5x)$ sur $[0, 1]$ avec 16 et 64 coefficients.

Ondelettes de Haar



Décomposition en Fourier (en bleu) et en ondelettes de Haar (en jaune) de x^2 (en rouge) sur $[0, 1]$ avec 16 coefficients.

Jean Morlet

Jean Morlet (1931-2007)