MAT311, Cours 9 : espaces de Hilbert, analyse [1]

§1. Théorèmes de représentation

1.1. Forme linéaire associée à un vecteur Pour tout $a \in H$, on note Λ_a la forme linéaire définie sur H par

$$\Lambda_a(x) := \langle x, a\rangle.$$

Lemme 1.1. *Avec la définition ci-dessus, $\Lambda_a \in H'$ et $\|\Lambda_a\|_{H'} = \|a\|_H$.*

Preuve. On a $|\Lambda_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \leqslant \|a\|\,\|x\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) donc

$$\|\Lambda_a\|_{H'} := \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\Lambda_a(x)| \leqslant \|a\|.$$

Enfin, $\Lambda_a(a) = \|a\|^2$ ce qui montre que $\|\Lambda_a\|_{H'} \geqslant \|a\|$. □

Remarque : réciproquement en dimension finie, on sait que si u est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^N$, il existe $y \in \mathbf{R}^N$ tel que $u(x) = x \cdot y$, où $\cdot$ désigne le produit scalaire euclidien.

Le théorème qui suit est une vaste généralisation de la remarque au cas des espaces de Hilbert.

1.2. Théorème de représentation de Riesz

Théorème 1.1 (théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $u \in H'$ une forme linéaire continue sur H. Alors, il existe un unique $a \in H$ tel que,*

$$\forall x \in H, \qquad u(x) = \Lambda_a(x).$$

De plus, l'application $a \mapsto \Lambda_a$ définie de H dans H', est un isomorphisme anti-linéaire isométrique.

Preuve. Soit $u \in H'$, $u \neq 0$. On note $F := \mathrm{Ker}\, u$, qui est un sous-espace fermé de H (car u est continue). On décompose $H = F \oplus F^\perp$. Le sous-espace $F^\perp$ est de dimension 1 : si $a \in F^\perp - \{0\}$ et, si $x \in F^\perp$, on peut écrire

$$u\left(x - \frac{u(x)}{u(a)}\,a\right) = 0, \qquad \text{donc} \qquad x - \frac{u(x)}{u(a)}\,a \in F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Conclusion $x = \frac{u(x)}{u(a)}\,a$. Choisissons $a \in F^\perp$ tel que $u(a) = \langle a, a\rangle = \|a\|_H^2$. On vérifie que $u(x) = \langle x, a\rangle$, pour tout $x \in H$. □

1.3. Application au dual topologique d'un espace de Hilbert

Exemple : toute forme linéaire continue définie sur $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ est de la forme

$$f \mapsto \int_{\mathbf{R}} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t$$

pour une fonction $g \in L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$ convenable.

Remarque : il résulte du théorème de représentation de Riesz que tout dual topologique H' d'un espace de Hilbert H est lui-même un espace de Hilbert, ce qui n'était pas évident *a priori*. Le produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H'}$ sur H' est défini en posant, pour tous $u, v \in H'$

$$\langle u, v\rangle_{H'} := \langle b, a\rangle,$$

où $u = \Lambda_a$ et $v = \Lambda_b$.

[1] Bertrand Rémy (École polytechnique). Palaiseau, 28 juin 2017.

1.4. Théorème de Hahn-Banach

Théorème 1.2 (théorème de Hahn-Banach dans un espace de Hilbert)**.** *Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H tel que $\overline{F} \neq H$.*

Pour tout $x \notin \overline{F}$, il existe $u \in H'$, une forme linéaire continue, telle que :

$$u(x) = 1 \qquad \text{et} \qquad u \equiv 0 \quad \text{sur} \quad F.$$

Preuve. On note $G := F^\perp = \overline{F}^\perp$ et on décompose : $x = P_G(x) + \big(x - P_G(x)\big)$, où $x - P_G(x) \in G^\perp = \overline{F}$. Comme $P_G(x) \neq 0$ (sinon on aurait $x \in \overline{F}$), on peut définir

$$y := \frac{P_G(x)}{\|P_G(x)\|^2} \in F^\perp = \overline{F}^\perp.$$

Donc

$$\Lambda_y(x) = \langle x, y\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \Lambda_y(z) = \langle z, y\rangle = 0,$$

pour $z \in \overline{F}$. Il suffit alors de prendre $u := \Lambda_y$. □

1.5. Critère de densité

Corollaire 1.1 (critère de densité)**.** *Soit F un* sous-espace vectoriel *de H. Alors, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.*

Autrement dit, pour vérifier qu'un sous-espace F est dense de H, il suffit de vérifier que

$$\forall a \in H, \qquad (\langle x, a\rangle = 0, \quad \forall x \in F) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

Preuve. Si F est dense, alors $\bar{F} = H$ et $F^\perp = \bar{F}^\perp = \{0\}$. Inversement, si F n'est pas dense, il existe $u \in H'$, $u \neq 0$ telle que $u(x) = 0$ pour tout $x \in F$. Il existe $a \in H$, $a \neq 0$ tel que $u = \Lambda_a$. Alors $\langle x, a\rangle = 0$ pour tout $x \in F$ et $a \neq 0$. Donc $F^\perp \neq \{0\}$. □

Exemple : Soit $\ell_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ l'ensemble des suites de $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$ qui sont nulles à partir d'un certain rang. On note $e_n \in \ell_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ la suite dont tous les termes sont nuls sauf le n-ième qui est égal à 1. Si $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ est orthogonale à tous les élements de $\ell_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$, on a

$$\langle a, e_n\rangle_{\ell^2} = a_n = 0,$$

donc $a = 0$. Conclusion, $\ell_c(\mathbf{N};\mathbf{C})$ est dense dans $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$.

1.6. Théorème de Riesz pour les formes sesquilinéaires

Définition 1.1 (continuité des formes sesquilinéaires)**.** *Une forme sesquilinéaire $\Phi : H \times H \to \mathbf{C}$ est continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\Phi(x,y)| \leqslant C\,\|x\|\,\|y\|, \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : la continuité (au sens usuel) de $\Phi : H \times H \to \mathbf{C}$ est équivalente à la continuité au sens de la définition ci-dessus.

Théorème 1.3 (théorème de représentation de Riesz - version sesquilinéaire)**.** *Soit Φ une forme sesquilinéaire continue sur un espace de Hilbert H. Alors, il existe une unique application linéaire continue $A : H \to H$ telle que*

$$\Phi(x,y) = \langle x, A(y)\rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : si Φ est hermitienne alors A vérifie $\langle x, A(y)\rangle = \langle A(x), y\rangle$.

1.7. Théorème de Riesz pour les formes sesquilinéaires, preuve **Preuve.** Soit $y \in H$. La forme linéaire $x \mapsto \Phi(x,y)$ est continue, donc par le théorème de représentation de Riesz il existe un unique $a_y \in H$ tel que $\Phi(x,y) = \langle x, a_y \rangle$ pour tout x. Vérifions que l'application $A : H \to H$ définie par $A(y) := a_y$ est linéaire et continue.

La linéarité résulte de l'unicité dans le théorème de représentation de Riesz.

Par hypothèse

$$\|A(y)\|^2 = \langle A(y), A(y) \rangle = \Phi(A(y), y) \leqslant C\,\|y\|\,\|A(y)\|.$$

Donc

$$\|A(y)\| \leqslant C\,\|y\|,$$

ce qui montre la continuité de A. □

1.8. Adjoint d'une application linéaire continue

Définition 1.2. *Soit $A : H \to H$ une application linéaire continue. On appelle adjoint de A et on note A^*, une application linéaire continue $A^* : H \to H$ vérifiant*

$$\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle \qquad \forall x, y \in H.$$

Remarque : l'adjoint, s'il existe, est unique (par injectivité de l'application $a \mapsto \Lambda_a$).

Corollaire 1.2. *Soit A une application linéaire continue d'un espace de Hilbert H dans lui-même. Alors, l'adjoint de A est bien défini et c'est une application linéaire continue de H dans H.*

Preuve. La forme sesquilinéaire $\Phi(x,y) := \langle A(x), y \rangle$ est continue. En effet

$$|\langle A(x), y \rangle| \leqslant \|A(x)\|\,\|y\| \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(H,H)}\,\|x\|\|y\|.$$

Il existe donc A^* (unique) telle que $\langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$ pour tous $x, y \in H$. □

1.9. Adjoint d'opérateurs à noyau **Exemple :** Soit $K \in L^2([0,1]^2; \mathbf{C})$. On définit $A_K : L^2([0,1]; \mathbf{C}) \to L^2([0,1]; \mathbf{C})$ par

$$A_K(f)(x) := \int_{[0,1]} K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y.$$

Alors A_K est une application bien définie et continue de $L^2([0,1]; \mathbf{C})$ dans lui-même et l'adjoint de A_K est donné par $A_{\tilde{K}}$ où $\tilde{K}(x,y) := \overline{K(y,x)}$.

Justification. Par Cauchy-Schwarz puis Fubini, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]} |A_K(f)(x)|^2\, \mathrm{d}x &\leqslant \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} |K(x,y)|^2\, \mathrm{d}y \right) \left(\int_{[0,1]} |f(y)|^2\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_{[0,1]^2} |K(x,y)|^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right) \left(\int_{[0,1]} |f(y)|^2\, \mathrm{d}y \right).\end{aligned}$$

Autrement dit : $\|A_K(f)\|_{L^2([0,1])} \leqslant \|K\|_{L^2([0,1]^2)}\, \|f\|_{L^2([0,1])}$. □

1.10. Exemple d'opérateur à noyau **Exemple :** l'application $A : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$ définie par

$$A(f)(x) := (1-x) \int_{[0,x]} y\, f(y)\, \mathrm{d}y + x \int_{[x,1]} (1-y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$$

pour toute $f \in L^2([0,1])$, peut aussi s'écrire

$$A(f)(x) = \int_{[0,1]} K(x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y,$$

pour

$$K(x,y) := \min\big(x(1-y), y(1-x)\big).$$

Si $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on vérifie que $u := A(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui est solution de l'équation

$$u'' + f = 0$$

sur $[0;1]$, avec comme conditions au bord $u(0) = u(1) = 0$.

1.11. Formes sesquilinéaires coercives

Définition 1.3. *Une forme sesquilinéaire Φ définie sur un espace de Hilbert H est coercive , s'il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\Phi(x,x) \geqslant c\,\|x\|^2,$$

pour tout $x \in H$.

1.12. Théorème de Lax-Milgram

Théorème 1.4 (Lax-Milgram)**.** *On suppose que Φ est une forme hermitienne continue et coercive, alors l'application A définie dans le Théorème de représentation de Riesz est inversible et d'inverse continu.*

Preuve. La coercivité et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous donnent

$$c\,\|x\|^2 \leqslant \Phi(x,x) =: \langle x, A(x) \rangle \leqslant \|A(x)\|\,\|x\|.$$

Conclusion

$$c\,\|x\| \leqslant \|A(x)\|,$$

donc A est injective. □

§2. Bases hilbertiennes

2.1. Notion de base hilbertienne

Définition 2.1. *Soit $(e_n)_{n \geqslant 0}$ une famille dénombrable d'un espace de Hilbert H. On dit que la famille $(e_n)_{n \geqslant 0}$ est une base hilbertienne si :*

(i) *pour tous $n \neq m$ on a $\langle e_n, e_m \rangle = 0$, et $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$;*

(ii) *l'espace vectoriel Vect$\{e_n : n \in \mathbf{N}\}$ des combinaisons linéaires finies des vecteurs e_n, pour $n \in \mathbf{N}$, est dense dans H*

Attention : une *base hilbertienne* n'est pas une base *algébrique* car pour une base algébrique, tout élément de l'espace est combinaison linéaire finie d'éléments de la base.

2.2. Identité de Parseval

Théorème 2.1. *Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H. Tout $x \in H$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une série convergente dans H*

$$x = \sum_{n\geqslant 0} x_n\, e_n \qquad \textit{où} \qquad x_n := \langle x, e_n\rangle \in \mathbf{C}.$$

De plus, on a l' égalité de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 = \sum_{n\geqslant 0} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

Réciproquement, si $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty$, alors $\sum_{n\geqslant 0} x_n\, e_n$ converge dans H.

2.3. Identité de Parseval, preuve

Preuve. Soit P_n la projection orthogonale sur $F_n := \mathrm{Vect}\{e_0, \dots, e_n\}$. Par hypothèse $F = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ est dense dans H, donc $\lim_{n\to+\infty} P_n(x) = x$. De plus $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k$, où $x_n := \langle x, e_n\rangle$. Par Pythagore $\|P_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |x_k|^2$, et par passage à la limite on obtient la formule de Parseval

$$\|x\|^2 = \sum_{k\geqslant 0} |x_k|^2.$$

On suppose maintenant que $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2 < +\infty$. Par Pythagore, on a $\left\|\sum_{k=m}^{n} x_k\, e_k\right\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |x_k|^2$. En particulier, la suite $\big(\sum_{k=0}^{n} x_k\, e_k\big)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans H, donc elle converge. □

2.4. Inégalité de Bessel

Lemme 2.1. *Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une famille orthonormale de vecteurs de H et $x \in H$. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \langle x, e_n\rangle\, e_n$, est la projection orthogonale de x sur $\overline{F}$, l'adhérence du sous-espace vectoriel F engendré par les vecteurs e_n.*

Le théorème de Pythagore nous permet décrire

$$\|x\|^2 = \|x - P_{\overline{F}}(x)\|^2 + \|P_{\overline{F}}(x)\|^2 = \|x - P_{\overline{F}}(x)\|^2 + \sum_{n\geqslant 0} |\langle x, e_n\rangle|^2.$$

On en déduit l' inégalité de Bessel :

$$\sum_{n\geqslant 0} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

2.5. Exemple : séries de Fourier dans $L^2(S^1;\mathbf{C})$

Soit $H = L^2(S^1;\mathbf{C})$ muni du produit hermitien

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(t)\,\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t.$$

La famille $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ où $e_n(t) := e^{int}$ est une famille orthonormée de $L^2(S^1;\mathbf{C})$.

Par Stone-Weierstrass, les combinaisons linéaires des e_n sont denses dans $\mathcal{C}(S^1;\mathbf{C})$ pour la norme de la convergence uniforme, qui lui-même est dense dans $L^2(S^1;\mathbf{C})$, pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$.

Conclusion : la série de Fourier de $f \in L^2(S^1;\mathbf{C})$ converge pour la norme L^2 vers f et l'égalité de Parseval nous donne

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} |f(t)|^2\mathrm{d}t.$$

où $c_n(f) := \langle f, e_n\rangle_{L^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{S^1} f(t)\, e^{-int}\mathrm{d}t$ est le n-ième coefficient de Fourier de la fonction f.

2.6. Espaces de Hilbert séparables

Définition 2.2. *On dit qu'un espace de Hilbert H est séparable , s'il existe un sous-ensemble de H qui est à la fois dénombrable et dense.*

Théorème 2.2. *Tout espace de Hilbert séparable possède une base hilbertienne.*

Preuve. Utiliser le procédé d'orthonormalisation de Schmidt. □

Remarque : si H possède une base hilbertienne $(e_n)_{n\geqslant 0}$, alors H est séparable.

Preuve. Considérer le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par les e_n, pour $n \in \mathbf{N}$. □

Remarque : Tous les espaces considérés dans ce cours sont séparables : $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$, $L^2(\mathbf{R};\mathbf{C})$, $L^2([a,b];\mathbf{C})$, ... sont des espaces de Hilbert séparables.

2.7. Espaces de Hilbert séparables

Corollaire 2.1. *Tous les espaces de Hilbert séparables de dimension infinie sont isomorphes entre eux.*

Preuve. Soit $(e_n)_{n\geqslant 0}$ une base hilbertienne de H. Pour tout $\mathbf{x} := (x_n)_{n\geqslant 0} \in \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$, on note

$$L(\mathbf{x}) := \sum_{n\geqslant 0} x_n e_n \in H.$$

Alors $L : \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C}) \to H$ est linéaire et $\|L(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ (Parseval). Donc L est continue et injective ; elle est surjective par définition d'une base hilbertienne. □

Proposition 2.1. *Un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert séparable est séparable.*

Preuve. Soit $X = \{x_n : n \geqslant 0\}$ un ensemble dénombrable et dense dans H. Puisque P_F est 1-lipschitzienne, pour tout $y \in F$, on a : $\|P_F(x_n) - y\| = \|P_F(x_n) - P_F(y)\| \leqslant \|x_n - y\|$. Ainsi $P_F(X)$ est dense dans F. □

2.8. Ondelettes de Haar (1909)

On note

$$\varphi := \mathbf{1}_{[0,1/2[} - \mathbf{1}_{[1/2,1[}.$$

Pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $k = 0, \dots, 2^n - 1$, on note

$$\varphi_{n,k}(x) := 2^{n/2}\,\varphi(2^n x - k).$$

2.9. Ondelettes de Haar (1909)

Lemme 2.2. *La fonction* $\mathbf{1}$ *et les fonctions* $\varphi_{n,k}$ *pour* $n \in \mathbf{N}$ *et pour* $0 \leqslant k < 2^n$*, forment une base hilbertienne de* $L^2([0,1];\mathbf{C})$*.*

Preuve. Soit $f \in L^2([0,1];\mathbf{C})$ orthogonale à $\mathbf{1}$ et à toutes les $\varphi_{n,k}$. On a

$$\int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

car f est orthogonale à $\mathbf{1}$ et

$$\int_{[0,1/2]} f(x)\mathrm{d}x - \int_{[1/2,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

car f est orthogonale à $\varphi_{0,0}$. Donc

$$\int_{[0,1/2]} f(x)\mathrm{d}x = \int_{[1/2,1]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2.10. Ondelettes de Haar (1909)

On montre (récurrence sur $n \geqslant 0$) que, pour $0 \leqslant k < 2^n$,

$$\int_{\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right]} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

La fonction

$$x \mapsto \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est continue et est égale à une même constante en les points de la forme $\frac{k}{2^m}$, donc elle est constante sur $[0,1]$.

Donc, f est orthogonale à toutes les fonctions indicatrices des sous-intervalles de $[0,1]$ dont les combinaisons linéaires sont denses dans $L^2([0,1];\mathbf{C})$. Conclusion, $f = 0$ p.p. sur $[0,1]$. $\square$