ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Espaces de Hilbert, géométrie

1. Géométrie et topologie

Forme bilinéaire et produit scalaire

Définition

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{R}$ est une forme bilinéaire *si toutes les applications partielles $x \mapsto \langle x, y \rangle$ et $y \mapsto \langle x, y \rangle$ sont linéaires.*

(i) *Elle est* symétrique *si $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ pour tous $x, y \in E$.*

(ii) *Elle est* définie positive *si*

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in E \text{ et si } \left(\langle x, x \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \right).$$

(iii) *Un* produit scalaire *est une forme bilinéaire, symétrique, définie, positive.*

Rappel : un produit scalaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, peut toujours s'écrire sous la forme $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{N} x_j \, y_j$, où $(x_1, \ldots, x_N)$ sont les coordonnées de x dans une base adaptée. Quand la base en question est la base canonique sur $\mathbf{R}^d$, on parle de produit scalaire *standard* ou *canonique*.

Exemples.

1. Sur $M_N(\mathbf{R})$, on peut définir le produit scalaire $\langle A, B\rangle := \mathrm{Trace}\,(AB^t)$.
2. Sur $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{R}) = \{$séries $\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n$ de carré sommable, i.e. telles que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^2| < +\infty\}$,

   on peut définir le produit scalaire $\displaystyle\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\ell^2} := \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n\, y_n$.
3. Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, on peut définir sur $L^2(\Omega;\mathbf{R})$ le produit scalaire $\displaystyle\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f(x)\, g(x)\,\mathrm{d}x$.

Applications anti-linéaires et formes sesquilinéaires

Définition

Soient E et F, deux $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. Une application $L : E \to F$ est dite anti-linéaire *si*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{C} \quad \text{et} \quad \forall x, y \in E \qquad L(\lambda x + \mu y) = \bar{\lambda}\, L(x) + \bar{\mu}\, L(y).$$

Définition

Une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbf{C}$ est une forme sesquilinéaire *si l'application linéaire partielle $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire et si l'autre $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire.*

(i) *Elle est dite* symétrique hermitienne *si $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ pour tous $x, y \in E$. Si tel est le cas, $\langle x, x \rangle \in \mathbf{R}$ pour tout $x \in E$.*

(ii) *Elle est dite* définie positive *si*

$$\langle x, x \rangle \geqslant 0 \text{ pour tout } x \in E \qquad \text{et si} \qquad (\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0).$$

(iii) *Un* produit (scalaire) hermitien *est une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne, définie, positive.*

Exemples

1. Sur $\mathbf{C}^N$, on peut définir le produit (scalaire) hermitien *canonique* ou *standard* :
$\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{N} x_j\, \bar{y}_j$. En fait, un produit hermitien sur un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie peut toujours s'écrire sous la forme $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{N} x_j\, \bar{y}_j$ où $(x_1, \dots, x_N)$ sont les coordonnées de x dans une base adaptée.
2. Sur $M_N(\mathbf{C})$, on peut définir le produit (scalaire) hermitien : $\langle A, B\rangle = \mathrm{Trace}\,(A\overline{B}^t)$.
3. Sur $\ell^2(\mathbf{N};\mathbf{C})$, on peut définir le produit (scalaire) hermitien : $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\ell^2} = \sum_{n\in\mathbf{N}} x_n\, \overline{y_n}$.
4. Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, on peut définir sur $L^2(\Omega;\mathbf{C})$, le produit (scalaire) hermitien $= \langle f, g\rangle_{L^2} \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x$.

Proposition (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit hermitien sur E. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a :

$$|\langle x, y \rangle| \quad \leqslant \quad \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle},$$

avec égalité si, et seulement si, la famille $\{x, y\}$ est liée.

Preuve. Pour tous $x, y \in E$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle x - ty, x - ty \rangle &= \langle x, x \rangle - t \langle x, y \rangle - t \langle y, x \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - 2t\, \Re\langle x, y \rangle + t^2 \langle y, y \rangle \\ &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est négatif ou nul, et par conséquent

$$|\Re\langle x, y \rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Pour conclure, on remarque que $|z| = \sup_{s \in \mathbf{R}} \Re(e^{is} z)$ pour tout $z \in \mathbf{C}$. $\square$

Norme préhilbertienne

Définition

Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire hermitien sur E. On définit sur E la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$ par

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Justification. Pour tous $x, y \in E$, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\Re \langle x, y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &\leqslant (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité triangulaire. Les autres axiomes de norme sont faciles à vérifer. $\square$

Définition

On appelle espace préhilbertien *un* **C***-espace vectoriel muni d'un produit hermitien* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *et de la norme associée* $\| \cdot \|$. *Un espace préhilbertien peut être muni d'une structure d'espace métrique pour la distance*

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Proposition

Soit E *un* **C***-espace vectoriel préhilbertien et soient* $x, y \in E$. *Alors on dispose des énoncés suivants.*

(i) *Théorème de Pythagore :* $\Re \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(ii) *Identité du parallélogramme :* $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

(iii) *Formule de polarisation :* $\langle x, y \rangle = \dfrac{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2}{4} + i\left(\dfrac{\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2}{4}\right)$.

Attention : dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel préhilbertien, l'égalité

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

n'entraîne pas forcément $\langle x, y \rangle = 0$, mais simplement $\Re \langle x, y \rangle = 0$.

Définition

On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$ et on dit que x et y sont perpendiculaires si $\Re \langle x, y \rangle = 0$.

Remarque : dans le cas des espaces préhilbertiens réels ces deux notions coïncident, mais dans un $\mathbf{C}$-espace vectoriel préhilbertien, x et ix sont perpendiculaires puisque

$$\langle x, i\,x \rangle = -i\,\langle x, x \rangle, \;\text{ et donc }\; \Re \langle x, i\,x \rangle = 0.$$

Espaces de Hilbert

Définition

On dit qu'un espace préhilbertien H, muni de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$, est un espace de Hilbert *si $(H, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet.*

Par définition, un espace de Hilbert est donc un espace de Banach.

Exemples.

1. L'espace $\mathbf{C}^N$, muni du produit hermitien $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{N} x_j\,\bar{y}_j$, est un espace de Hilbert. Plus généralement, tout espace préhilbertien de dimension finie est un espace de Hilbert.
2. Tout sous-espace vectoriel *fermé* d'un espace de Hilbert est lui-même un espace de Hilbert (muni de la restriction du produit hermitien).

Attention : dans les espaces vectoriels normés de dimension infinie, il existe des sous-espaces qui ne sont pas fermés (typiquement : des espaces de suites ou de fonctions à support fini ou compact, dans des espaces définis par une condition de sommabilité ou d'intégrabilité).

Exemples et non-exemples d'espaces de Hilbert

Non-exemple : Si $N \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$ l'espace $\mathbf{C}^N$, muni de la norme $\|x\|_p := \Big(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^p\Big)^{1/p}$, est un espace de Banach ; mais ce n'est pas un espace de Hilbert dès que $p \neq 2$.

En effet, prenons $x = (1, 0, \ldots, 0)$ et $y = (0, 1, \ldots, 0)$. Alors $\|x + y\|_p^2 + \|x - y\|_p^2 = 2\, 2^{2/p}$ et $2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right) = 4$. L'égalité du parallélogramme est donc vérifiée seulement quand $p = 2$.

Exemple : l'espace $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ des suites complexes $\mathbf{x} := (x_n)_{n \geqslant 0}$ telles que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2 < +\infty,$$

muni du produit hermitien $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_{\ell^2} := \sum_{n \in \mathbf{N}} x_n \, \overline{y_n}$, est un espace de Hilbert.

Exemple : pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$, l'espace $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ muni du produit hermitien

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, \mathrm{d}x,$$

est un espace de Hilbert.

Remarque : par le cours précédent $\mathcal{C}_c(\Omega; \mathbf{C})$ est un sous-espace dense dans $L^2(\Omega; \mathbf{C})$; il n'est donc pas un sous-espace fermé de $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ puisqu'il en est distinct.

Exemple : soit Ω un ouvert borné non vide. On note $L^2_0(\Omega; \mathbf{C})$ l'espace des fonctions de $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ qui sont de moyenne nulle i.e.

$$f \in L^2_0(\Omega; \mathbf{C}) \quad \text{si} \quad f \in L^2(\Omega; \mathbf{C}) \quad \text{et si} \quad \int_\Omega f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Alors, $L^2_0(\Omega; \mathbf{C})$ est un sous-espace fermé de $L^2(\Omega; \mathbf{C})$ et en particulier, $L^2_0(\Omega; \mathbf{C})$, muni du produit hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ est un espace de Hilbert.

Espaces de Hilbert de fonctions de carré sommable, preuve

Preuve. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\left| \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant |\Omega|^{1/2} \left(\int_\Omega |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \right)^{1/2} = |\Omega|^{1/2}\, \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

En particulier, l'application

$$L^2(\Omega;\mathbf{C}) \ni f \mapsto \int_\Omega f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbf{C},$$

est bien définie, linéaire et elle est lipschitzienne, donc elle est continue. L'espace $L^2_0(\Omega;\mathbf{C})$ est donc un fermé au titre d'image réciproque du fermé $\{0\}$ par une application continue. $\square$

Remarque : dans la situation précédente, on peut aussi voir $L^2_0(\Omega;\mathbf{C})$ comme l'orthogonal des (classes de) fonctions constantes. Si au contraire Ω est de mesure de Lebesgue infinie, les fonctions constantes ne sont pas de carré intégrable.

Définition

Soient H_1, H_2 des espaces de Hilbert et soit $L : H_1 \to H_2$ une application linéaire. On dit que L est un isomorphisme d'espaces de Hilbert *si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) *l'application L est bijective.*

(ii) *l'application L est une isométrie, i.e. $\|L(x)\|_{H_2} = \|x\|_{H_1}$ pour tout $x \in H_1$.*

Exemple : l'application $S : \ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C}) \to \ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{C})$ (dite de « décalage ») définie par

$$S\big((x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\big) = (0, x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots),$$

préserve la norme, mais n'est pas un isomorphisme d'espaces de Hilbert (car elle n'est pas surjective).

Orthogonalité

Définition

Soit H un espace de Hilbert et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit hermitien sur H. Si F est un sous-espace vectoriel de H, on définit l'orthogonal de F par

$$F^{\perp} := \Big\{ x \in H \,:\, \forall y \in F, \quad \langle x, y \rangle = 0 \Big\}.$$

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de H, alors :

(i) *le sous-espace vectoriel $F^{\perp}$ est fermé ;*

(ii) *si G est un sous-espace vectoriel et si $G \subset F$, alors $F^{\perp} \subset G^{\perp}$;*

(iii) *on a : $F^{\perp} = (\overline{F})^{\perp}$.*

Propriétés de l'orthogonal, preuve

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de $F^\perp$ qui converge vers $x \in H$. Alors, pour tout $y \in F$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à $\langle x - x_n, y\rangle$ implique qu'on a :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$

donc $x \in F^\perp$.

On a $F \subset \overline{F}$, donc $(\overline{F})^\perp \subset F^\perp$. Inversement, soient $x \in F^\perp$ et $y \in \overline{F}$. Il existe $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de F telle que

$$y = \lim_{n\to+\infty} y_n.$$

Alors

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle x, y_n\rangle = 0.$$

Donc $x \in (\overline{F})^\perp$. $\square$

Dual d'un espace de Hilbert

Définition

L'espace vectoriel $H' := \mathcal{L}(H; \mathbf{C})$ des formes linéaires continues définies sur H est appelé le dual topologique de H (pour le distinguer de l'espace de toutes les formes linéaires $L(H; \mathbf{C})$).

L'espace H', muni de la norme définie par $\|u\|_{H'} := \sup_{\|x\| \leqslant 1} |u(x)|$, est un espace de Banach (conséquence d'un résultat plus général vu dans le cours sur la complétude). On verra :

Proposition

Le dual topologique d'un espace de Hilbert est naturellement un espace de Hilbert.

Remarque : ce qu'il reste à voir est le fait que la norme ci-dessus est associée à un produit scalaire hermitien ; ce sera une conséquence du théorème de représentation de Riesz.

2. Théorèmes de projection

Parties convexes dans un evn

Définition

On dit qu'un sous-ensemble C d'un espace vectoriel E est convexe s'il est stable par prise de combinaison convexe, i.e. si

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0,1], \qquad t\,x + (1-t)y \in C.$$

On note $[x,y] := \big\{ t\,x + (1-t)\,y \ : \ t \in [0,1] \big\}$ *l'intervalle d'extrémités x et y.*

On va maintenant combiner les propriétés géométriques (raisonnnements « euclidiens en dimension infinie ») et les propriétés analytiques (notamment la complétude) des espaces de Hilbert afin de prouver un important résultat de projection sur les convexes.

La preuve est instructive car illustre bien cette combinaison.

Le résultat est important car c'est (entre autres) un énoncé d'existence (et d'unicité et caractérisation métrique).

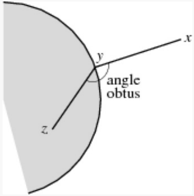
Théorème (projection sur un convexe fermé)

Soit H un espace de Hilbert et C un sous-ensemble convexe fermé de H. Pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| = d(x, C) := \inf_{z \in C} \|x - z\|.$$

Si $x \in C$ alors $y = x$; si $x \notin C$, alors y est caractérisé par

$$\Re \langle x - y, z - y \rangle \leqslant 0, \qquad \forall z \in C.$$



Preuve. **Existence.** Soit $(y_n)_{n\geqslant 0}$ une suite minimisante, i.e. $y_n \in C$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\| = d(x, C).$$

Utilisons l'égalité du parallélogramme

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2\left(\|a\|^2 + \|b\|^2\right).$$

avec $a = x - y_m$ et $b = x - y_n$. On trouve

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= 2\left(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 2(\|x - y_m\|^2 + \|x - y_n\|^2) - 4\, d(x, C)^2. \end{aligned}$$

Ainsi $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans H (qui est complet) ; elle converge donc, disons vers $y \in H$, et comme C est fermé on a $y \in C$.

Théorème de la projection sur un convexe fermé, preuve (fin)

Unicité. Si $\|x-y_1\| = \|x-y_2\| = d(x,C)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|y_1-y_2\|^2 &= 2\left(\|y_1-x\|^2+\|y_2-x\|^2\right) - 4\left\|x-\tfrac{y_1+y_2}{2}\right\|^2 \\ &\leqslant 4\,d(x,C)^2 - 4\,d(x,C)^2 = 0, \end{aligned}$$

donc $y_1 = y_2$.

Caractérisation. Soit $z \in C$ et $y \in C$ tels que $\|x-y\| = d(x,C)$. L'ensemble C est convexe, donc $[y,z] \subset C$. On a

$$d(x,C)^2 \leqslant \|x-z_t\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\Re\langle x-y, y-z_t\rangle + \|y-z_t\|^2,$$

où $z_t = (1-t)\,y + tz$, pour tout $t \in [0,1]$. Comme $\|x-y\|^2 = d(x,C)^2$, on conclut que

$$2\Re\langle x-y, y-z_t\rangle + \|y-z_t\|^2 \geqslant 0.$$

Donc $2\,t\,\Re\langle x-y, z-y\rangle \leqslant t^2\,\|y-z\|^2$ pour tout $t \in [0,1]$. En divisant par $t>0$ et en faisant tendre t vers 0, on en déduit que $\Re\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$.

Théorème (projection sur un sous-espace vectoriel fermé)

Soit H un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Il existe une unique application linéaire $P_F : H \to F$ telle que, pour tout $x \in H$

$$\|x - P_F(x)\| = d(x, F) := \inf_{z \in F} \|x - z\|.$$

De plus :

(i) *$P_F(x)$ est l'unique élément de F vérifiant cette égalité.*

(ii) *$x - P_F(x)$ est orthogonal à tout vecteur de F.*

(iii) *P_F est 1-lipschitzienne (donc* continue*), i.e.*

$$\|P_F(x)\| \leqslant \|x\|, \qquad \forall x \in H.$$

Projection sur un sous-espace vectoriel fermé, preuve

Preuve. On note $y := P_F(x)$. Montrons que $x - y \in F^\perp$. On sait que, pour tout $z \in F$, on a

$$\Re \langle x - y, z - y \rangle \leqslant 0,$$

Donc $\Re \langle x - y, w \rangle \leqslant 0$ pour tout $w \in F$. En remplaçant w par $-w$ puis par iw, on conclut que $\langle x - y, w \rangle = 0$ pour tout $w \in F$. On a par Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|x - P_F(x)\|^2 + \|P_F(x)\|^2 \geqslant \|P_F(x)\|^2.$$

Ce qui termine la démonstration. □

Exemple : Si F est un sous-espace de dimension finie et si $e_1, \ldots, e_N$ est une base orthonormée de F, on a la formule explicite

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{N} \langle x, e_j \rangle \, e_j.$$

Corollaire

Si F est un sous-espace fermé de H, alors

$$H = F \oplus F^\perp \qquad \textit{et} \qquad (F^\perp)^\perp = F.$$

Si F est un sous-espace de H (non nécessairement fermé) on a : $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

Preuve. Par projection, on a : $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$, avec $x - P_F(x) \in F^\perp$. De plus $F \cap F^\perp = \{0\}$. Par définition, $F \subset (F^\perp)^\perp$. Si l'inclusion était stricte, il existerait $x \neq 0$ tel que $x \in (F^\perp)^\perp \cap F^\perp$. Alors $\langle x, x \rangle = 0$ donc $x = 0$, ce qui constitue une contradiction. Enfin, on a vu que $F^\perp = \overline{F}^\perp$, donc $(F^\perp)^\perp = (\overline{F}^\perp)^\perp = \overline{F}$. $\square$

Application : Un sous-espace $F \subset H$ est fermé si et seulement s'il existe un espace vectoriel normé G et une application linéaire continue $L : H \to G$ telle que $F = \operatorname{Ker} L$. Le fait que la condition soit suffisante est évidente, la nécessité s'obtient en prenant $G = H$ et $L := \mathrm{Id} - P_F$.