ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Techniques de calcul intégral

1. Intégrales multiples

Théorème de Fubini classique

Rappel : soient $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ deux ouverts non vides, et soit $f \in \mathscr{C}_c(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, la fonction

$$x_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2,$$

est bien définie sur Ω_1 et appartient à $\mathscr{C}_c(\Omega_1)$. De plus

$$\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2.$$

Énoncé du théorème de Fubini

Voici l'énoncé du théorème de Fubini dans le cadre de la théorie de l'intégration de Lebesgue.

Théorème (théorème de Fubini)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ et $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ deux ouverts non vides et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors :

(i) *pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega_1)$;*

(ii) *la fonction $x_2 \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1$ est définie p.p. sur Ω_2 et appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega_2)$;*

(iii) *on a la double égalité*

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 .\end{aligned}$$

Théorème de Fubini pour les limites de suites de Levi

On va commencer par l'énoncé analogue pour les fonctions limites de suites de Levi.

Lemme

Soit $f \in \mathcal{L}^+(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors :

(i) *pour presque tout $x_2 \in \Omega_2$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ appartient à $\mathcal{L}^+(\Omega_1)$;*

(ii) *la fonction définie p.p. sur Ω_2 par $x_2 \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1$ est p.p. égale à une fonction qui appartient à $\mathcal{L}^+(\Omega_2)$;*

(iii) *on a la double égalité*

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1 \\ &= \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Preuve du théorème de Fubini – suites de Levi

Preuve. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Levi convergeant simplement vers f sur $\Omega_1 \times \Omega_2$. Posons

$$F_n(x_2) = \int_{\Omega_1} f_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1.$$

La suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante sur Ω_2 et on a :

$$\int_{\Omega_2} F_n(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \leqslant \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 < +\infty.$$

Donc, par convergence monotone $(F_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de Levi sur Ω_2. On note F la limite simple p.p. de la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$. Par définition on a $F \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$, et à nouveau par convergence monotone on peut intervertir :

$$\int_{\Omega_2} F(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\Omega_2} F_n(x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

Soit maintenant $\mathcal{Z} = \{x_2 \in \Omega_2 \, : \, F(x_2) = +\infty\}$. Puisque $F \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$, la partie $\mathcal{Z}$ est négligeable. Pour tout $x_2 \in \Omega_2 - \mathcal{Z}$, la suite de fonctions $\big(f_n(\cdot, x_2)\big)_{n \geqslant 0}$ est croissante et

$$\int_{\Omega_1} f_n(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 = F_n(x_2) \leqslant F(x_2) < \infty,$$

donc c'est une suite de Levi sur Ω_1. La suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement vers f sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, on en déduit que $f(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^+(\Omega_1)$, pour $x_2 \in \Omega_2 - \mathcal{Z}$, ce qui établit le point (i).

Par convergence monotone, on a :

$$\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_1} f_n(x_1, x_2) \, \mathrm{d}x_1 = \lim_{n \to +\infty} F_n(x_2) = F(x_2),$$

pour $x_2 \in \Omega_2 - \mathcal{Z}$. Or, $F \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$, de sorte que $x_2 \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x_1, x_2) \mathrm{d}x_1$, définie sur $\Omega_2 - \mathcal{Z}$, est p.p. égale à une fonction qui appartient à $\mathcal{L}^+(\Omega_2)$, ce qui établit le point (ii).

Preuve du théorème de Fubini – suites de Levi (fin)

Enfin :

$$\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \lim_{n\to+\infty}\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f_n(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\int_{\Omega_2} F_n(x_2)\mathrm{d}x_2 = \int_{\Omega_2} F(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2. \qquad \square$$

Lemme (fibres des ensembles négligeables)

Soit $\mathcal{Z}\subset\Omega_1\times\Omega_2$ un ensemble négligeable. Pour $x_1\in\Omega_1$, on note

$$\mathcal{Z}_{x_1} = \{x_2\in\Omega_2\ :\ (x_1,x_2)\in\mathcal{Z}\}\subset\Omega_2$$

la fibre de $\mathcal{Z}$ au-dessus de x_1. *Alors, pour presque tout $x_1\in\Omega_1$, la fibre $\mathcal{Z}_{x_1}$ est négligeable dans Ω_2.*

En général, les fibres $\mathcal{Z}_{x_1}$ d'un ensemble négligeable $\mathcal{Z}$ ne sont donc négligeables dans Ω_2 que pour presque tout $x_1\in\Omega_1$ et pas pour tout $x_1\in\Omega_1$.

Preuve. Soit $f \in \mathcal{L}^+(\Omega_1 \times \Omega_2)$ telle que $f(x_1, x_2) = +\infty$ pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{Z}$. Il existe $\mathcal{Z}_1 \subset \Omega_1$ négligeable tel que, pour $x_1 \in \Omega_1 - \mathcal{Z}_1$, la fonction $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$. Soit $x_1 \in \Omega - \mathcal{Z}_1$. Par définition :

$$\mathcal{Z}_{x_1} \subset \{x_2 \in \Omega_2 \ : \ f(x_1, x_2) = +\infty\},$$

et $f(x_1, \cdot) \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$. Donc l'ensemble $\mathcal{Z}_{x_1}$ est négligeable dans Ω_2. □

Preuve de (i). Il existe $g, h \in \mathcal{L}^+(\Omega_1 \times \Omega_2)$ et un ensemble $\mathcal{Z} \subset \Omega_1 \times \Omega_2$ négligeable tel que $f = g - h$ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2) - \mathcal{Z}$. Il existe $\mathcal{Z}_2' \subset \Omega_2$ négligeable tel que les fonctions $g(\cdot, x_2)$ et $h(\cdot, x_2)$ appartiennent à $\mathcal{L}^+(\Omega_1)$ pour tout $x_2 \in \Omega_2 - \mathcal{Z}_2'$. Il existe $\mathcal{Z}_2 \subset \Omega_2$ négligeable tel que la fibre $\mathcal{Z}_{x_2}$ soit négligeable dans Ω_1 pour tout $x_2 \in \Omega_2 - \mathcal{Z}_2$. Alors, pour tout $x_2 \in \Omega_2 - (\mathcal{Z}_2' \cup \mathcal{Z}_2)$, on a

$$f(\cdot, x_2) = g(\cdot, x_2) - h(\cdot, x_2) \in \mathcal{L}^1(\Omega_1)\,,$$

ce qui établit le point (i).

Preuve du théorème de Fubini – cas général, point (ii)

La fonction définie sur $\Omega_2 - (\mathcal{Z}_2' \cup \mathcal{Z}_2)$ par

$$x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} g(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1,$$

et la fonction définie sur $\Omega_2 - (\mathcal{Z}_2' \cup \mathcal{Z}_2)$ par

$$x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} h(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1,$$

sont presque partout égales à des fonctions qui appartiennent à $\mathcal{L}^+(\Omega_2)$, de sorte que la fonction définie sur $\Omega_2 - (\mathcal{Z}_2' \cup \mathcal{Z}_2)$ par

$$x_2 \mapsto \int_{\Omega_1} g(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 - \int_{\Omega_1} h(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1 = \int_{\Omega_1} f(x_1, x_2)\,\mathrm{d}x_1,$$

appartient à $\mathcal{L}^1(\Omega_2)$, ce qui établit le point (ii).

Preuve du théorème de Fubini – cas général, point (iii)

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} g(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 - \iint_{\Omega_1\times\Omega_2} h(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} g(x_1,x_2)\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2 - \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2,\end{aligned}$$

l'égalité restant à prouver étant obtenue en échangeant les variables x_1 et x_2. $\square$

Énoncé du théorème de Tonelli

Dans le cas des fonctions mesurables positives on a :

Théorème (théorème de Tonelli)

Soient $\Omega_1 \subset \mathbf{R}^{N_1}$ *et* $\Omega_2 \subset \mathbf{R}^{N_2}$ *deux ouverts non vides et soit* f *une fonction mesurable* $\Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,+\infty]$. *Alors :*

(i) *pour presque tout* $x_2 \in \Omega_2$, *la fonction* $x_1 \mapsto f(x_1,x_2) \in [0,+\infty]$ *définie p.p. sur* Ω_1 *est mesurable ;*

(ii) *la fonction* $x_2 \mapsto \displaystyle\int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1 \in [0,+\infty]$, *définie p.p. sur* Ω_2, *est mesurable ;*

(iii) *dans* $[0,+\infty]$, *on a :*

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 &= \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1\\ &= \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\right)\mathrm{d}x_2.\end{aligned}$$

Application du théorème de Tonelli pour Fubini

Ce résultat permet de répondre à la question suivante : comment vérifier qu'une fonction mesurable est intégrable sur $\Omega_1 \times \Omega_2$?

Soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbf{C}$ une fonction mesurable. On suppose que l'on sait calculer

$$I = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}x_2 \right) \mathrm{d}x_1,$$

ou

$$J = \int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} |f(x_1, x_2)| \mathrm{d}x_1 \right) \mathrm{d}x_2 .$$

D'après le théorème de Tonelli appliqué à $|f|$, deux cas se présentent

$$\begin{array}{lcl} I \text{ ou } J < +\infty & \Rightarrow & f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2) \text{ et alors on peut appliquer Fubini,} \\ I \text{ ou } J = +\infty & \Rightarrow & f \notin \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2). \end{array}$$

2. Intégration et dérivation

Soit $f \in \mathcal{L}^1([0,1])$. Pour tout $x \in [0,1]$, on note $F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Peut-on affirmer que F est dérivable (ou au moins dérivable p.p.) ?
2. Peut-on dire que $F' = f$ (ou au moins que $F' = f$ p.p.) sur $[0,1]$?
3. Bien entendu, si f est continue, alors F est dérivable et $F' = f$ en tout point de $[0,1]$.

Réciproquement, soit $F : [0,1] \to \mathbf{R}$.

1. Quand peut-on affirmer que F', la dérivée de F, existe (au moins p.p.) sur $[0,1]$?
2. Quand l'égalité
$$F(1) - F(0) = \int_{[0,1]} F'(t)\,\mathrm{d}t,$$
est-elle vérifiée ?
3. Bien entendu, le résultat est vrai si F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

Intégration des fonctions à dérivée bornée

Théorème

On suppose que F est dérivable sur $[a, b]$ et que $|F'(t)| \leqslant M$ pour tout $t \in [a, b]$, alors $F' \in \mathcal{L}^1([a, b])$ et

$$\int_{[a,b]} F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Preuve. On note $G_n(x) = n \cdot \left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right)$. Par convergence dominée, on voit que F' est intégrable, et par passage à la limite dans

$$\int_{[a,b-\frac{1}{n}]} G_n(x)\,\mathrm{d}x = n\left(\int_{[b-\frac{1}{n},b]} F(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[a,a+\frac{1}{n}]} F(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

on trouve que

$$\int_{[a,b]} F'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

ce qui termine la démonstration.

Monotonie, dérivabilité et intégration

Théorème

On suppose que F est croissante sur $[a,b]$, alors F est dérivable en presque tout point de $[a,b]$ et

$$\int_{[a,b]} F'(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant \quad F(b) - F(a).$$

Preuve du second point. Appliquer le lemme de Fatou à la suite de fonctions définie par

$$G_n(x) = n\left(F\left(x + \tfrac{1}{n}\right) - F(x)\right)$$

pour obtenir l'inégalité cherchée. $\square$

Définition

On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ est absolument continue *si*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \textit{tel que} \quad \left(\sum_i |b_i - a_i| \leqslant \delta \Rightarrow \sum_i |f(b_i) - f(a_i)| \leqslant \varepsilon \right).$$

où les (a_i, b_i) sont disjoints et en nombre fini.

Exemple : si f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ alors f est absolument continue sur $[a, b]$.

Théorème

(i) *Si* $f \in \mathcal{L}^1([a,b])$ *alors*

$$F(x) = \int_{[a,x]} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

est absolument continue et est dérivable p.p. sur $[a,b]$. *De plus* $F' = f$ *p.p. sur* $[a,b]$.

(ii) *Si* F *est absolument continue sur* $[a,b]$, *alors* F *est dérivable presque partout,* $F' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ *et*

$$F(x) - F(a) = \int_{[a,x]} F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales dépendant d'un paramètre : le cadre

Dans ce qui suit, on se donne :

1. un intervalle ouvert non vide I de $\mathbf{R}$;
2. un ouvert non vide Ω de $\mathbf{R}^N$.

On se donne aussi

$$f : I \times \Omega \to \mathbf{C}$$

telle que, pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(t, \cdot)$ soit intégrable, i.e. $f(t, \cdot) \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$.

On définit alors $F : I \to \mathbf{C}$ par

$$F(t) := \int_\Omega f(t, x) \, \mathrm{d}x.$$

On veut étudier la continuité et la dérivabilité en t de la fonction F.

Le premier énoncé se démontre en combinant le théorème de convergence dominée et le critère séquentiel de continuité.

Théorème (continuité des intégrales paramétriques)

On conserve les notations précédentes et on fait les hypothèses suivantes.

(i) *Pour presque tout $x \in \Omega$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ est continue en $t_0 \in I$.*

(ii) *Il existe $\Phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ telle que, pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $t \in I$, on a*

$$|f(t,x)| \quad \leqslant \quad \Phi(x).$$

Alors, la fonction F est continue en t_0 et on a :

$$\lim_{t \to t_0} \int_\Omega f(t,x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \lim_{t \to t_0} f(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème (dérivation sous le signe somme)

On conserve les notations précédentes et on fait les hypothèses suivantes.

(i) *Pour presque tout* $x \in \Omega$, *la fonction* $t \mapsto f(t,x)$ *est dérivable sur* I.

(ii) *Il existe* $\Phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ *telle que, pour presque tout* $x \in \Omega$ *et pour tout* $t \in I$, *on a*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \right| \quad \leqslant \quad \Phi(x).$$

Alors, F *est dérivable sur* I *et sa dérivée est donnée par*

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x.$$

De plus, si $f(\cdot,x) \in \mathscr{C}^1(I;\mathbf{C})$ *pour presque tout* $x \in \Omega$, *alors* $F \in \mathscr{C}^1(I;\mathbf{C})$.

Preuve. Soit $(t_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers $t \in I$ (avec $t_n \neq t$ pour tout $n \geqslant 0$). Par les hypothèses (i) et (ii), il existe $\mathcal{Z} \subset \Omega$ négligeable tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t,x),$$

et en outre par le théorème des accroissements finis, on a :

$$\left|\frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}\right| \quad \leqslant \quad \Phi(x),$$

pour tout $x \in \Omega - \mathcal{Z}$. Par convergence dominée, on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(t_n)-F(t)}{t_n-t} \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \frac{f(t_n,x)-f(t,x)}{t_n-t}\,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Dérivées partielles et matrice jacobienne

Soient Ω_1, Ω_2 des ouverts non vides de $\mathbf{R}^N$ et $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$.

Pour $x \in \Omega_1$ et $v \in \mathbf{R}^N$, la dérivée directionnelle de f en x suivant v est la dérivée (si elle existe) de la fonction partielle $t \mapsto f(x+tv)$ où t est un paramètre réel suffisamment petit. Si on dispose d'une base $(e_1, e_2, \dots e_N)$, qui permet d'écrire $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, une telle dérivée directionnelle suivant e_i est appelée une dérivée partielle ; quand elle existe, on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Définition

On dit que $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ est de classe C^1 sur Ω_1, si Φ admet des dérivées partielles en tout point de Ω_1 et si ces dérivées partielles sont des fonctions continues sur Ω_1.

On note $J_\Phi(x) = \left(\dfrac{\partial \Phi^i}{\partial x_j}(x)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$ la matrice jacobienne de $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^N)$ au point x.

Ici la base intervient pour les directions des dérivées partielles, mais aussi pour la décomposition de la fonction Φ suivant ses fonctions coordonnées Φ^i : $J_\Phi(x)$ est donc une matrice carrée.

Difféomorphisme et changement de variables

On a en vue de procéder à des changements de variables pour des intégrales définies sur des ouverts d'evn de dimension finie. Mathématiquement parlant, un changement de variables est une application bijective suffisamment différentiable (par exemple de classe C^1) entre deux tels ouverts. En topologie, on a vu qu'il n'est déjà pas vrai que l'application réciproque d'une application bijective continue est continue ; cette remarque explique le point (iii) ci-dessous.

Définition

On dit que Φ est un C^1-difféomorphisme de Ω_1 sur Ω_2 si les conditions ci-dessous sont satisfaites.

(i) *L'application Φ est une bijection de Ω_1 sur Ω_2.*

(ii) *L'application Φ est de classe C^1 sur Ω_1.*

(iii) *L'application Φ^{-1} est de classe C^1 sur Ω_2.*

Dans ce qui suit, on se donne $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un C^1-difféomorphisme.

Théorème

Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_2)$*. Alors :* $(f \circ \Phi)\,|\mathrm{d\acute{e}t} J_\Phi| \in \mathcal{L}^1(\Omega_1)$*, et on a :*

$$\int_{\Omega_2} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))\,|\mathrm{d\acute{e}t} J_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Preuve. On part du fait que, pour toute $f \in \mathcal{C}_c(\Omega_2)$, on a $f \circ \Phi \in \mathcal{C}_c(\Omega_1)$ et

$$\int_{\Omega_2} f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))\,|\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Soit $f \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Levi convergeant simplement vers f sur Ω_2. Alors, $(f_n \circ \Phi\,|\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi|)_{n\geqslant 0}$ est une suite croissante de fonctions de $\mathcal{C}_c(\Omega_1)$ et

$$\int_{\Omega_1} f_n(\Phi(x))\,|\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x = \int_{\Omega_2} f_n(y)\,\mathrm{d}y \leqslant \int_{\Omega_2} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Preuve du théorème de changement de variables, suite

Par conséquent, la suite $(f_n \circ \Phi \, |\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi|)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Levi sur Ω_1, et elle converge simplement sur Ω_1 vers $f \circ \Phi \, |\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi|$ qui appartient donc $\mathcal{L}^+(\Omega_1)$. Enfin, par définition de l'intégrale sur $\mathcal{L}^+(\Omega_2)$, on trouve que

$$\int_{\Omega_2} f(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_2} f_n(y)\,\mathrm{d}y = \lim_{n \to +\infty} \int_{\Omega_1} f_n(\Phi(x))\,|\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\Omega_1} f(\Phi(x))\,|\mathrm{d\acute{e}t}\, J_\Phi(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Pour conclure, on va utiliser le fait que les C^1-difféomorphismes transforment les ensembles négligeables en ensembles négligeables.

Lemme

Si $\mathcal{Z} \subset \Omega_2$ est négligeable, alors $\Phi^{-1}(\mathcal{Z}) \subset \Omega_1$ est négligeable.

Preuve du théorème de changement de variables, fin

Preuve du lemme. Si $\mathcal{Z} \subset \Omega_2$ est négligeable, il existe $f \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$ telle que $f(y) = +\infty$ pour tout $y \in \mathcal{Z}$. Comme $\mathrm{dét}\, J_\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega_1$, on en déduit que $f \circ \Phi(x)\, |\mathrm{dét}\, J_\Phi(x)| = +\infty$ pour tout $x \in \Phi^{-1}(\mathcal{Z})$. La fonction $f \circ \Phi\, |\mathrm{dét}\, J_\Phi| \in \mathcal{L}^+(\Omega_1)$, donc $\Phi^{-1}(\mathcal{Z})$ est négligeable. $\square$

Preuve du théorème (fin). Soit $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_2)$: il existe donc $\mathcal{Z} \subset \Omega_2$ un ensemble négligeable et $g, h \in \mathcal{L}^+(\Omega_2)$ tels que $f = g - h$ sur $\Omega_2 - \mathcal{Z}$.
Les fonctions $g \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi|$ et $h \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi|$ appartiennent $\mathcal{L}^+(\Omega_1)$ et

$$f \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi| = g \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi| - h \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi|,$$

sur $\Omega_1 - \Phi^{-1}(\mathcal{Z})$. L'ensemble $\Phi^{-1}(\mathcal{Z})$ est négligeable donc $f \circ \Phi|\mathrm{dét} J_\Phi| \in \mathcal{L}^1(\Omega_1)$. $\square$

Changements de variables affines

Soit $A \in \mathrm{GL}_N(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^N$. On pose $\Phi(x) = Ax + b$. Si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\mathrm{d\acute{e}t}\,A|}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si de plus $AA^t = A^tA = I$ (i.e. si Φ est une isométrie affine), alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(Ax+b)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Si $A = \lambda I$ pour $\lambda \neq 0$ (i.e. si Φ est une homothétie), alors

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\lambda|^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

On note

$$P := \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x_1 \leqslant 0, \ x_2 = 0\},$$

et

$$\Phi \ : \ \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\quad \to \quad \mathbf{R}^2 - P,$$

l'application définie par

$$\Phi(r, \theta) := (r \ \cos\theta, r \ \sin\theta).$$

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^2)$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(r \ \cos\theta, r\sin\theta)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

On veut calculer $I = \displaystyle\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

En utilisant le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = I^2.$$

En utilisant les coordonnées polaires et le théorème de Fubini, on trouve

$$\int_{\mathbf{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \pi.$$

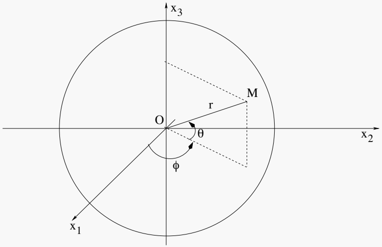
Finalement : $I = \sqrt{\pi}$.

On note $P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x_1 \leqslant 0, \ x_2 = 0\}$ et

$$\Phi : \ \mathbf{R}_+^* \times]-\pi, \pi[\times]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}^3 - P,$$

définie par

$$\Phi(r, \phi, \theta) := (r\cos\phi\cos\theta, r\sin\phi\cos\theta, r\sin\theta).$$



Coordonnées sphériques : formule d'intégration

On a

$$\text{dét}(J_\Phi) = r^2 \cos\theta.$$

Donc pour toute $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^3)$, on a la formule d'intégration :

$$\int_{\mathbf{R}^3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\Phi(r,\phi,\theta))\, r^2 \cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta.$$

Exemple : volume de « la » boule de rayon R de $\mathbf{R}^3$:

$$V = \int_{\mathbf{R}^3} \mathbf{1}_{\{|x|<R\}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{R}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta = \frac{4\pi R^3}{3}.$$