



# Intégration des fonctions mesurables



# 1. Intégration contre une mesure



Dans cette section, on travaille avec un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ; autrement dit,  $X$  est un ensemble,  $\mathcal{A}$  est une tribu de parties de  $X$  et  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  est une mesure sur les parties de  $X$  figurant dans la tribu  $\mathcal{A}$ .

## Définition

*Pour l'espace mesurable  $(X, \mathcal{A})$ , on dit qu'une fonction  $X \rightarrow \mathbf{R}$  est **étagée** si elle est mesurable et si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. On note  $\mathcal{E}^+$  l'ensemble des fonctions étagées  $\geq 0$ .*

Une fonction étagée est une fonction s'écrit  $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  avec  $I$  fini et  $A_i \in \mathcal{A}$  pour tout  $i \in I$ ; cette écriture n'est pas unique.

Nous allons utiliser ces fonctions pour définir l'intégrale des fonctions  $\mu$ -mesurables. Les fonctions étagées sont en effet des fonctions auxquelles on associe facilement une intégrale, et le cas général s'obtiendra en prolongeant la construction par passage à la limite.



## Définition

Soit  $f \in \mathcal{E}^+$ . L'**intégrale** de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$  est l'élément  $\int f(x) d\mu(x) \in \overline{\mathbf{R}}_+$  défini comme somme finie par la formule :

$$\int f(x) d\mu(x) = \sum_{\alpha \text{ valeur de } f} \alpha \cdot \mu(\{f = \alpha\}) \leq +\infty,$$

où  $\{f = \alpha\}$  désigne la partie mesurable  $f^{-1}(\{\alpha\})$ . On note aussi  $\int f d\mu$  cette intégrale (i.e., on oublie la variable d'intégration). On dit que  $f$  est **intégrable** si  $\int f(x) d\mu(x) < +\infty$ .

Dès que  $f \in \mathcal{E}^+$  admet une écriture  $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  avec  $I$  fini et avec les  $A_i \in \mathcal{A}$  mesurables et deux à deux disjoints, on a :  $\int f d\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$ .



L'intégrale des fonctions étagées positives possède les propriétés suivantes.

1. **Croissance** : si  $f, g \in \mathcal{E}^+$  sont telles que  $f \leq g$ , alors  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .
2. **Additivité** : pour  $f, g \in \mathcal{E}^+$ , on a  $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ .
3. **Homogénéité** : pour  $f \in \mathcal{E}^+$  et  $\lambda \geq 0$ , on a  $\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$ .

**Justification.** Les points 1 et 3 sont faciles. Pour 2, on écrit  $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  avec  $I$  fini et avec les  $A_i$  mesurables partitionnant  $X$  ; idem, *mutatis mutandis*, pour  $g = \sum_{j \in J} \beta_j \cdot \mathbf{1}_{B_j}$ . Ceci permet d'obtenir  $f + g = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mathbf{1}_{A_i \cap B_j}$ , écriture similaire aux précédentes. Alors :

$$\int (f + g) \, d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_i + \beta_j) \cdot \mu(A_i \cap B_j) = \sum_i \alpha_i \cdot \sum_j \mu(A_i \cap B_j) + \sum_j \beta_j \cdot \sum_i \mu(A_i \cap B_j).$$

Le premier terme vaut  $\sum_i \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \int f \, d\mu$  puisque les  $B_j$  partitionnent  $X$ , et de même le second terme vaut  $\int g \, d\mu = \sum_j \beta_j \cdot \mu(B_j)$  puisque les  $A_i$  partitionnent  $X$ .



Passons maintenant au résultat d'approximation qui permet de prolonger la construction de l'intégrale par passage à la limite.

## Théorème

*Les fonctions mesurables à valeurs dans  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{C}$  ou  $\overline{\mathbf{R}}_+$  sont les fonctions partout limites de suites de fonctions étagées. En outre :*

- (i) toute fonction mesurable bornée est limite uniforme d'une suite de fonctions étagées ;*
- (ii) toute fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives.*

**Preuve (abrégée).** Déjà, on remarque que les fonctions étagées sont mesurables, donc toutes les fonctions limites de l'énoncé sont bien mesurables, comme limites simples de suites de fonctions mesurables. On travaille maintenant sur les réciproques.



Pour cela, on se donne  $f$  mesurable.

S'il existe  $M$  tel que  $0 \leq f(x) \leq M$  pour tout  $x \in X$ , alors pour chaque entier  $n \geq 0$  et chaque  $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ , on note  $E_k^n = \{2^{-n}kM \leq f < 2^{-n}(k+1)M\}$ . La suite des fonctions étagées  $f_n = \sum_k \frac{kM}{2^n} \mathbf{1}_{E_k^n}$  est croissante et converge uniformément vers  $f$ .

Si  $f$  est positive à valeurs éventuellement infinies, pour chaque entier  $n \geq 0$  on introduit  $g_n = \inf\{n; f_n\}$  pour obtenir une fonction mesurable *bornée*. Par ce qui précède, on sait trouver une fonction étagée  $h_n$  satisfaisant  $g_n - \frac{1}{n} \leq h_n \leq g_n$ , qui fournit une suite qui converge vers  $f$ . Pour obtenir une suite croissante on pose enfin  $f_n = \max\{h_1; h_2; \dots; h_n\}$ .

Pour les fonctions à valeurs réelles non nécessairement positives, puis complexes, on travaille sur les parties positives et négatives, puis sur les parties réelles et imaginaires. □



On note  $\mathcal{M}^+$  l'ensemble des fonctions mesurables à valeurs dans  $\overline{\mathbf{R}}_+$ . On vient juste de voir que les fonctions dans  $\mathcal{M}^+$  sont les limites de suites croissantes de fonctions dans  $\mathcal{E}^+$ .

## Définition

Soit  $f \in \mathcal{M}^+$ . On appelle **intégrale** de  $f$  par rapport à la mesure  $\mu$ , qu'on note  $\int f \, d\mu$  ou  $\int f(x) \, d\mu(x)$ , la borne supérieure, finie ou  $+\infty$ , de l'ensemble des intégrales des fonctions étagées positives majorées par  $f$ . On dit que  $f$  est **intégrable** si  $\int f(x) \, d\mu(x) < +\infty$ .

Dans le cas où la fonction est étagée, on retrouve la définition précédente. Et la définition en termes de borne supérieure permet de déduire la croissance de cette intégrale de celle des fonctions étagées.





# Un lemme de passage à la limite monotone

Si  $f \in \mathcal{E}^+$  et si  $A$  est mesurable, on note  $\int_A f \, d\mu$  l'intégrale de la fonction  $f \cdot \mathbf{1}_A$  (qui est encore une fonction étagée).

Si  $A$  et  $B$  sont des parties mesurables disjointes, l'additivité de l'intégrale assure que

$$\int_{A \sqcup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu.$$

Voici un premier résultat de passage à la limite monotone.

## Lemme

*Soit  $f = \sum_{i \in I} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$  une fonction étagée positive et soit  $\{E_n\}_{n \geq 0}$  une suite croissante de parties mesurables dont la limite (i.e. la réunion) vaut  $X$  tout entier. Alors on a*

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f \, d\mu.$$

# Un lemme de passage à la limite monotone, preuve



**Preuve.** On se ramène au cas où les  $A_i$  dans l'écriture de  $f$  sont deux à deux disjoints ; alors :

$$\int_{E_n} f \, d\mu = \int f \cdot \mathbf{1}_{E_n} \, d\mu = \sum_i \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E_n).$$

Pour chaque  $i \in I$ , la suite croissante de parties mesurables  $\{E_n \cap A_i\}_{n \geq 0}$  tend vers  $A_i$  (i.e. est de réunion égale à  $A_i$ ), donc par continuité à gauche des mesures, pour chaque  $i \in I$ , on a :

$$\mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n \cap A_i).$$

Ceci permet finalement d'écrire :

$$\int f \, d\mu = \sum_i \alpha_i \cdot \mu(A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_i \alpha_i \cdot \mu(E_n \cap A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f \, d\mu,$$

l'interversion centrale entre limite et somme ne posant pas de problème puisque  $I$  est fini.  $\square$



## Théorème (de convergence croissante)

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de fonctions dans  $\mathcal{M}^+$  convergeant ponctuellement vers  $f$ . Alors, on a :

$$\int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq +\infty.$$

**Preuve.** Déjà, la croissance de l'intégrale et les inégalités  $f_n \leq f$  pour tout  $n \geq 0$  fournissent  $\int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$ , et donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu$  par passage à la limite.

Pour l'inégalité inverse, par définition de l'intégrale sur  $\mathcal{M}^+$ , il suffit de voir que pour toute  $\varphi \in \mathcal{E}^+$  telle que  $\varphi \leq f$  on a :

$$\int \varphi \, d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

On conclut alors en passant à la borne supérieure des  $\int \varphi \, d\mu$  pour  $\varphi \in \mathcal{E}^+$  telle que  $\varphi \leq f$ .

# Théorème de convergence croissante, preuve

Pour prouver cette dernière inégalité, on se donne  $\lambda \in ]0; 1[$  et pour chaque  $n \geq 0$  on pose  $E_n = \{f_n \geq \lambda\varphi\}$ . Par définition des  $E_n$  on a ainsi  $f_n \geq (\lambda\varphi) \cdot \mathbf{1}_{E_n}$  pour tout  $n \geq 0$ . Ceci implique

$$\int f_n d\mu \geq \int_{E_n} (\lambda \cdot \varphi) d\mu = \lambda \int_{E_n} \varphi d\mu.$$

En outre la suite de parties mesurables  $\{E_n\}_{n \geq 0}$  est croissante pour l'inclusion puisque la suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 0}$  est croissante, et par hypothèse de convergence ponctuelle (et puisque  $\lambda < 1$ ), les  $E_n$  tendent vers  $X$  tout entier. Ainsi le lemme précédent implique que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} \varphi d\mu = \int \varphi d\mu,$$

ce qui permet de passer à la limite dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \lambda \cdot \int \varphi d\mu,$$

et finalement l'inégalité cherchée puisque  $\lambda$  est arbitraire dans  $]0; 1[$ .

1. **Croissance** : si  $f, g \in \mathcal{M}^+$  sont telles que  $f \leq g$ , alors  $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ .
2. **Additivité** : pour  $f, g \in \mathcal{M}^+$ , on a  $\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ .
3. **Homogénéité** : pour  $f \in \mathcal{M}^+$  et  $\lambda \geq 0$ , on a  $\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu$ .

**Justification.** Le premier point a été vu juste après la définition de l'intégrale sur  $\mathcal{M}^+$  et le troisième est immédiat. Pour le deuxième, on sait qu'il existe des suites croissantes de fonctions dans  $\mathcal{E}^+$ , disons  $(f_n)_{n \geq 0}$  et  $(g_n)_{n \geq 0}$ , qui convergent vers  $f$  et  $g$  respectivement (théorème d'approximation). Alors  $(f_n + g_n)_{n \geq 0}$  est une suite croissante dans  $\mathcal{E}^+$  qui converge vers  $f + g$ , et on a

$$\int (f + g) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_n + g_n) \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu,$$

le théorème de Beppo Levi assurant les deux égalités aux extrémités de la chaîne ; l'égalité du milieu provient de l'additivité de l'intégrale sur  $\mathcal{E}^+$ .



## Proposition

Soit  $f$  une fonction dans  $\mathcal{M}^+$ .

- (i) L'intégrale  $\int f \, d\mu$  est nulle si, et seulement si,  $f$  est nulle  $\mu$ -presque partout ( $\mu$ -p.p.).
- (ii) Si  $f$  est intégrable, alors l'ensemble  $\{f = +\infty\}$  est négligeable.
- (iii) Deux fonctions mesurables  $X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  égales  $\mu$ -p.p. ont même intégrale contre  $\mu$ .

**Preuve.** Le point (i) est vrai pour les fonctions étagées positives. Dans le cas général, la condition est suffisante par définition de l'intégrale comme borne supérieure. Réciproquement, soit  $f \in \mathcal{M}^+$  d'intégrale nulle contre (i.e. par rapport à)  $\mu$ . On se donne une suite croissante dans  $\mathcal{E}^+$ , disons  $(f_n)_{n \geq 0}$ , qui converge vers  $f$ . Alors pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\int f_n \, d\mu = 0$  et donc  $f_n = 0$   $\mu$ -p.p. puisque  $f_n$  est étagée. Puisque  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , on en conclut que  $f$  est nulle  $\mu$ -presque partout.



Pour (ii), on se donne  $f \in \mathcal{M}^+$  telle que  $E = \{f = +\infty\}$  satisfasse  $\mu(E) > 0$ . On pose alors  $f_n = n \cdot \mathbf{1}_E$  pour  $n \geq 0$ . On a  $\int f \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu = n \cdot \mu(E)$ , et on conclut en faisant  $n \rightarrow \infty$ .

Soient  $f$  et  $g$  comme dans (iii); alors  $h = \inf\{f; g\}$  est une fonction de  $\mathcal{M}^+$ , par hypothèse égale à  $f$  et à  $g$   $\mu$ -presque partout. On définit une autre fonction dans  $\mathcal{M}^+$ , à savoir  $f'$  définie par  $f'(x) = f(x) - h(x)$  pour les  $x$  tels que  $h(x) < +\infty$  et  $f'(x) = 0$  pour les autres  $x \in X$ ; on définit de façon similaire une fonction  $g'$  en remplaçant  $f$  par  $g$ . On obtient des fonctions  $f'$  et  $g'$  nulles  $\mu$ -presque partout et construites pour que l'on puisse écrire  $f = h + f'$  et  $g = h + g'$ . Par le point (i), on a  $\int f' \, d\mu = \int g' \, d\mu = 0$ , et donc finalement

$$\int f \, d\mu = \int h \, d\mu = \int g \, d\mu,$$

par additivité de l'intégrale. □



## Proposition (inégalité de Tchebycheff)

Soit  $f$  une fonction dans  $\mathcal{M}^+$  et soit  $\alpha$  un nombre réel  $> 0$ . Alors

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int f \, d\mu.$$

**Preuve.** On note  $E$  la partie mesurable  $\{f \geq \alpha\} = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\}$ . On a  $f \geq \alpha \cdot \mathbf{1}_E$  et on conclut en intégrant.  $\square$

Un énoncé équivalent à cette proposition est le suivant.

Si  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  est mesurable et si  $\alpha > 0$ , alors on a :

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^2} \int |f|^2 \, d\mu.$$

**Justification.** Remplacer  $f$  par  $|f|^2$  et  $\alpha$  par  $\alpha^2$ .



# Intégration des fonctions à valeurs réelles et complexes

Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{R}$  mesurable. Les parties positive  $f^+ = \max\{f; 0\}$  et négative  $f^- = \max\{-f; 0\}$ , qui sont définies pour avoir  $f = f^+ - f^-$  et  $|f| = f^+ + f^-$ , sont dans  $\mathcal{M}^+$ . On dit que  $f$  est **intégrable** par rapport à  $\mu$  si  $f^+$  et  $f^-$  le sont au sens qui précède. On pose alors

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

## Définition

Soit  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  mesurable. On dit que  $f$  est **intégrable** par rapport à  $\mu$  si  $\Re f$  et  $\Im f$  sont intégrables au sens ci-dessus. Si tel est le cas, on définit :

$$\int f \, d\mu = \int \Re f \, d\mu + i \int \Im f \, d\mu.$$

On note  $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$ , ou parfois  $\mathcal{L}^1(\mu)$ , l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs dans  $\mathbf{C}$ .

Ainsi pour  $f : X \rightarrow \mathbf{C}$  mesurable, on a :  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$  si et seulement si  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$ .



Voici quelques faits importants sur l'intégrale des fonctions à valeurs complexes.

1. L'ensemble  $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel.
2. L'application  $f \mapsto \int f(x) d\mu(x)$  est une forme  $\mathbf{C}$ -linéaire sur  $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$ .
3. Pour toute  $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ , on a  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$  et

$$\left| \int f(x) d\mu(x) \right| \leq \int |f(x)| d\mu(x).$$

4. Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbf{R}^N$  et si  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$ , alors le procédé d'intégration contre  $\mu$  qu'on vient de décrire redonne l'intégrale de Lebesgue du cours précédent. On note dans ce cas  $\mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$  au lieu de  $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$ ; autrement dit, la mesure de Lebesgue sur  $\Omega$  est tellement naturelle qu'on la sous-entend.



**Justification.** La fonction  $|f| = \sqrt{|\Re f|^2 + |\Im f|^2}$  est mesurable et on a :

$$|f| \leq |\Re f| + |\Im f| \in \mathcal{L}^1(\mu),$$

donc  $|f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ . Choisissons  $\xi \in \mathbf{C}$  tel que  $|\xi| = 1$  et :  $\xi \cdot \int f(x) d\mu(x) = \left| \int f(x) d\mu(x) \right|$ .

Alors

$$\left| \int f(x) d\mu(x) \right| = \xi \int f(x) d\mu(x) = \int \Re(\xi f(x)) d\mu(x).$$

Finalement :

$$\left| \int f(x) d\mu(x) \right| \leq \int |\Re(\xi f(x))| d\mu(x) \leq \int |\xi f(x)| d\mu(x) = \int |f(x)| d\mu(x). \quad \square$$

## 2. Théorèmes de convergence

# Théorème de la convergence monotone de Beppo Levi, version série

Le cadre reste un espace mesuré  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ .

La mesure utilisée dans les exemples et contre-exemples sera cependant la mesure de Lebesgue.

## Théorème (convergence monotone, version série)

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions  $\mu$ -mesurables à valeurs dans  $\overline{\mathbf{R}}_+$ . Alors on a

$$\int \left( \sum_{n \geq 0} u_n \right) d\mu = \sum_{n \geq 0} \left( \int u_n d\mu \right) \leq +\infty.$$

Ce théorème se déduit immédiatement de sa version initiale, via les sommes partielles.

## Proposition

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de fonctions  $\mu$ -intégrables réelles. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq +\infty.$$



**Preuve.** Par croissance, la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge ponctuellement vers une fonction  $f = f^+ - f^- : X \rightarrow \overline{\mathbf{R}}_+$  dont la partie négative  $f^-$  est intégrable car on a :  $f^- \leq f^+ - f_n \leq f^+ - f_0$ . Donc par intégrabilité  $f^-$  vaut  $+\infty$  sur un ensemble négligeable et  $f = f^+ - f^-$  est ainsi bien définie  $\mu$ -presque partout. On se ramène au théorème de Beppo Levi en regardant la suite des fonctions  $f_n - f_0$ , qui sont elles aussi bien définies  $\mu$ -presque partout car  $f_0$  est intégrable et donc ne vaut  $\pm\infty$  que sur un ensemble négligeable.  $\square$

L'hypothèse de monotonie est cruciale, comme l'indique l'exemple qui suit.

**Exemple :** On considère la suite de fonctions  $f_n(x) = 2nx(1-x^2)^{n-1}$  définies sur  $]0, 1[$ . On vérifie que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$ , pour tout  $x \in ]0, 1[$ . Cependant :

$$0 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx < \int_0^1 f_n(x) dx = 1.$$

L'inégalité qui subsiste est expliquée par le lemme suivant, très utile en pratique.



Le résultat suivant fournit une inégalité, et non pas exactement une interversion limite-somme. Il peut être utile notamment pour prouver des divergences de suites numériques définies par des intégrales. Dans beaucoup de cas pratiques, la suite de fonctions converge et la première limite inférieure (i.e. la fonction intégrée) est alors une vraie fonction limite (ponctuelle).

## Lemme (lemme de Fatou)

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions  $\mu$ -mesurable positives. Alors on a :

$$\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \, d\mu(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x) \, d\mu(x).$$

**Preuve.** La suite de fonctions mesurables  $(g_n = \inf_{k \geq n} f_k)_{n \geq 0}$  est croissante et converge vers  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n$ . Par Beppo Levi, on a donc :  $\int \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n \, d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu$ . Enfin, le fait que  $g_n \leq f_n$  implique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n \, d\mu$ ; d'où le résultat. □



## Théorème (théorème de convergence dominée)

Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions de  $\mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$ . On suppose que :

- (i) pour  $\mu$ -presque tout  $x$ , la suite  $(f_n(x))_{n \geq 0}$  converge ;
- (ii) il existe  $g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  telle que  $|f_n| \leq g$   $\mu$ -presque partout.

Alors, il existe  $f \in \mathcal{L}^1(\mu, \mathbf{C})$  telle que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$   $\mu$ -presque partout et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n(x) d\mu(x) = \int f(x) d\mu(x).$$

Il s'agit d'un énoncé très important, s'appliquant à une *vaste classe de fonctions*, et utile dans de nombreux calculs de limite impliquant une opération d'intégration.

Une des importantes applications théoriques de ce célèbre théorème sera un énoncé très souple de dérivation sous le signe somme.



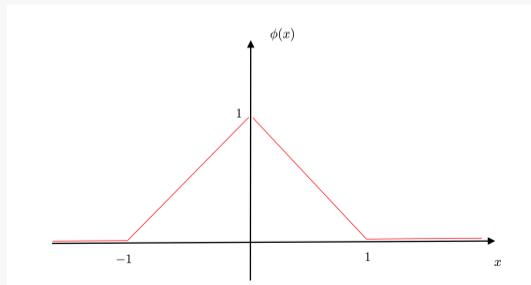
# Phénomènes de concentration et d'évanescence



Nous allons examiner deux cas typiques de non validité de l'interversion limite-somme. Pour cela, donnons-nous  $\phi \in \mathcal{C}_c(\mathbf{R})$  telle que

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x) dx = 1 \quad \text{et} \quad \phi \geq 0.$$

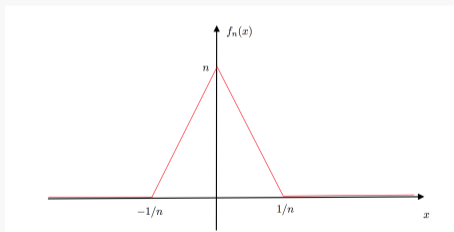
**Exemple :** on peut prendre  $\phi(x) = (1 - |x|)^+$ .





**Phénomène de concentration** : pour tout  $n \geq 0$ , on note  $f_n(x) = n\phi(nx)$ . Alors on a :

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(y) dy > \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = 0.$$

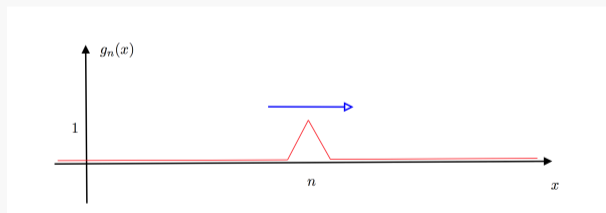


Phénomène de concentration



**Phénomène d'évanescence** : pour tout  $n \geq 0$ , on note  $g_n(x) = \phi(x - n)$ . Alors on a :

$$1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} g_n(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \phi(y) dy > \int_{\mathbf{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) dx = 0.$$



Phénomène d'évanescence



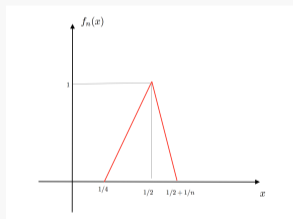
# 3. Espace des fonctions intégrables

# Un problème de non complétude

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbf{R}^N$  : on travaille ici avec la *mesure de Lebesgue* sur  $\Omega$ . L'espace  $\mathcal{C}_c(\Omega)$ , muni de la norme

$$\|\cdot\|_1 \quad : \quad f \mapsto \|f\|_1 := \int_{\Omega} |f(x)| \, dx,$$

n'est pas complet. Par exemple :



On a  $f_n \in \mathcal{C}_c(]0, 1[)$  et  $\|f_m - f_n\|_1 \leq \frac{1}{m}$  pour tout  $n \geq m$  mais la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  ne converge pas dans  $(\mathcal{C}_c(]0, 1[), \|\cdot\|_1)$ . Par convergence dominée on peut voir que  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge simplement et pour la norme  $\|\cdot\|_1$  vers une fonction Lebesgue-intégrable discontinue.



Par ailleurs, on peut munir l'espace  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  de la **semi-norme**  $\|\cdot\|_1$ , i.e.

1. Pour toute fonction  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a  $\|\lambda f\|_1 = |\lambda| \|f\|_1$ .
2. Pour toutes fonctions  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , on a  $\|f + g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ .

Autrement dit, les conditions d'homogénéité et d'inégalité triangulaire sont satisfaites, mais il est à noter qu'on a seulement

$$\|f\|_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega,$$

ce qui est plus faible que la condition de séparation, requise pour avoir une norme sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ .

L'idée principale est de **modifier l'espace**  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  **et non pas**  $\|\cdot\|_1$ , de façon à ce que  $\|\cdot\|_1$  définisse une norme sur le nouvel espace.

# Identification des fonctions égales presque partout



Plus précisément, l'idée-clef est d'identifier deux fonctions qui sont égales p.p. sur  $\Omega$ . Ceci se formalise mathématiquement de la façon suivante.

On définit sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  la *relation d'équivalence* (relation réflexive, symétrique et transitive)

$$f \sim g \quad \text{si et seulement si} \quad (f - g = 0 \quad \text{p.p. sur } \Omega).$$

Si  $f \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , on note  $[f]$  la *classe d'équivalence* de  $f$

$$[f] := \{h \in \mathcal{L}^1(\Omega) : h = f \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

**Analogie** : penser à la définition des fractions rationnelles  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  avec  $P$  et  $Q$  des polynômes. Une fraction rationnelle admet une infinité d'écritures comme fraction de deux polynômes : une fraction rationnelle est une classe d'équivalence de fractions  $\frac{P(X)}{Q(X)}$ .

Ici, on travaille avec des « paquets » de fonctions, identifiées entre elles quand elles diffèrent par une fonction nulle presque partout.



## Définition

L'espace de Lebesgue  $L^1(\Omega)$  est défini par

$$L^1(\Omega) := \{[f] : f \in \mathcal{L}^1(\Omega)\}.$$

1. Structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$  : pour  $\alpha \in \mathbf{R}$  et  $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , on **définit**

$$[f] + [g] := [f + g] \quad \text{et} \quad \alpha [f] := [\alpha f].$$

2. L'intégrale de Lebesgue permet de définir une forme  $\mathbf{R}$ -linéaire sur  $L^1(\Omega)$  :

$$[f] \mapsto \int_{\Omega} [f](x) dx := \int_{\Omega} f(x) dx,$$

et cette définition est indépendante du représentant  $f$  de  $[f]$ .

**Justification de 2.** On a :  $f \sim g \Rightarrow \int_{\Omega} f(x) dx = \int_{\Omega} g(x) dx.$







La semi-norme  $\|\cdot\|_1$ , qui est définie au départ sur  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ , permet de définir une **norme** sur  $L^1(\Omega)$ , par la formule

$$\|[f]\|_{L^1(\Omega)} := \int_{\Omega} |h(x)| dx, \quad \text{où } h \in [f].$$

**Preuve.** La définition de  $\|[f]\|_{L^1(\Omega)}$  ne dépend pas du représentant choisi. On a

$$\|[f]\|_{L^1(\Omega)} = 0 \Leftrightarrow \int_{\Omega} |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ p.p. sur } \Omega \Leftrightarrow f \sim 0 \Leftrightarrow [f] = 0.$$

Les autres propriétés sont évidentes. □

**Analogie :** le degré d'une fraction rationnelle  $\frac{P(X)}{Q(X)}$  ne dépend pas des polynômes  $P$  et  $Q$  choisis pour représenter cette fraction rationnelle.

# Quelques précautions à prendre dans $L^1(\Omega)$



À ce stade, on a bien obtenu un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel normé  $L^1(\Omega)$  sur lequel  $\|\cdot\|_1$  est une norme. On a « forcé » des identifications pour que l'axiome de séparation soit satisfait. Dans la pratique :

on identifie un élément  $[f] \in L^1(\Omega)$  avec un représentant, le plus souvent noté  $f$ , de  $[f]$

mais cela se fera avec les précautions suivantes :

1. quand on écrit  $f = g$  dans  $L^1(\Omega)$ , cela signifie que  $f = g$  p.p. sur  $\Omega$  ;
2. si  $f \in L^1(\Omega)$  et si  $x \in \Omega$ , on ne peut plus parler de la valeur de  $f$  au point  $x$  car  $f$  n'est définie que p.p. sur  $\Omega$ . Autrement dit, la valeur  $f(x)$  n'est pas bien définie à partir de la classe  $[f]$  seule.



## Théorème (théorème de Fischer-Riesz)

*L'espace vectoriel  $L^1(\Omega)$ , muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}$  est un espace normé complet (autrement dit, un espace de Banach).*

**Preuve.** Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite de Cauchy de  $\mathcal{L}^1(\Omega)$ . Ainsi pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe

$N(\varepsilon) \geq 0$  tel que pour tous  $m, n \geq N(\varepsilon)$ , on ait :  $\int_{\Omega} |f_m - f_n| dx < \varepsilon$ .

On construit par récurrence  $n \mapsto \varphi(n)$  telle que  $\int_{\Omega} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}| dx < \frac{1}{2^n}$  : prendre

$\varphi(0) := N(1)$ , puis  $\varphi(n+1) := \max\{\varphi(n) + 1, N(\frac{1}{2^{n+1}})\}$ . Par construction, pour tout  $m \geq 0$ , on a :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=0}^m |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| \right) dx < \sum_{n=0}^m \frac{1}{2^n} \leq 2.$$

# Preuve de la complétude de $L^1(\Omega)$ , suite

On note

$$\Phi := \sum_{n \geq 0} |f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}|.$$

Par convergence monotone, on a :  $\Phi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ , et donc

$$\Phi(x) = \sum_{n \geq 0} |f_{\varphi(n+1)}(x) - f_{\varphi(n)}(x)| < +\infty$$

p.p. sur  $\Omega$ . Ainsi pour presque tout  $x \in \Omega$ , la série **numérique**  $\sum_{k \geq 0} (f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x))$  converge, car elle est absolument convergente dans  $\mathbf{R}$  (qui est complet). En écrivant

$$f_{\varphi(n)} = f_{\varphi(0)} + \sum_{k=0}^{n-1} (f_{\varphi(k+1)} - f_{\varphi(k)}),$$

on en conclut que la suite de fonctions  $(f_{\varphi(n)})_{n \geq 0}$  converge vers une fonction  $f$  p.p. sur  $\Omega$ .

# Preuve de la complétude de $L^1(\Omega)$ , fin

Finalement pour presque tout  $x \in \Omega$ , on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| = 0,$$

et

$$|f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \leq \sum_{k \geq n} |f_{\varphi(k+1)}(x) - f_{\varphi(k)}(x)| \leq \Phi(x) \quad \text{p.p. sur } \Omega.$$

Par convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_{\varphi(n)}(x) - f(x)| \, dx = 0.$$

Enfin, en utilisant le fait que  $(f_n)_{n \geq 0}$  est une suite de Cauchy, on vérifie que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n(x) - f(x)| \, dx = 0,$$

ce qui termine la démonstration.