
# Espaces de fonctions

# 1. Compacité et evn de dimension infinie

# Énoncé du théorème de Riesz

Voici un résultat célèbre sur les espaces vectoriels normés, le théorème de Riesz, qui relie une propriété algébrique (de dimension) à une propriété topologique (compacité des parties fermées et bornées les plus naturelles : les boules fermées).

**Théorème (théorème de Riesz)**

*Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors $E$ est de dimension finie si, et seulement si, sa boule-unité fermée $B_f(0,1)$ est compacte.*

Dans tous les cas, les boules fermées sont bornées (par définition) et fermées. Si en outre $E$ est de dimension finie, le théorème de Borel-Lebesgue décrit toutes les parties compactes comme étant les parties fermées et bornées ; il implique donc que dans ce cas les boules fermées sont compactes. Pour prouver le théorème de Riesz, il reste donc à prouver l'implication

$$\dim(E) = \infty \quad \Rightarrow \quad B_f(0,1) \text{ est non compacte.}$$

# Une boule-unité fermée non compacte

Avant de passer à la démonstration de l'implication restante :

$$\ll \dim(E) = \infty \quad \Rightarrow \quad B_f(0,1) \text{ est non compacte} \gg$$

donnons un exemple de boule-unité fermée non compacte dans un espace de fonctions.

**Exemple :** la boule-unité fermée de $(\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$f_n(x) = x^n.$$

La seule limite possible est la fonction qui vaut 0 sur $[0,1[$ et 1 quand $x=1$. Or, cette fonction n'est pas continue.

# Lemme de Riesz

Voici le résultat le plus important pour démontrer l'implication ci-dessus.

**Lemme (lemme de Riesz)**

*Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $F$ un sous-espace vectoriel fermé de $E$, distinct de $E$. Alors, pour tout $\varepsilon \in ]0,1[$, il existe $x \in E$ tel que*

$$\|x\| = 1 \qquad \textit{et} \qquad \inf_{y \in F} \|x - y\| \geqslant 1 - \varepsilon.$$

**Remarque :** si $Y$ est une partie de $E$ et si $x \in E$, on note $d(x, Y) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Par définition d'une borne inférieure, on a $d(x, Y) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{Y}$. En effet, ces deux conditions sont équivalentes à l'existence d'une suite $(z_n)_{n \geqslant 0}$ dans $Y$ telle que $\lim z_n = x$.

**Reformulation :** ce lemme dit que si $F$ est un sous-espace vectoriel *fermé strict* d'un evn $E$, alors pour tout $\varepsilon \in ]0,1[$ on peut toujours trouver un vecteur dans la sphère-unité $S_E(0,1)$ de $E$ qui est à distance $\geqslant 1 - \varepsilon$ de $F$.

# Démonstration du lemme de Riesz

**Preuve.** Soit $y \notin F$. Comme $F$ est fermé (i.e. $F = \overline{F}$), on a $y \notin \overline{F}$. Par la remarque qui précède, cela implique $d(y, F) > 0$ ; notons $\alpha = d(y, F)$.

Puisque $1 < \dfrac{1}{(1-\varepsilon)}$ (et donc $\alpha < \dfrac{\alpha}{(1-\varepsilon)}$), la définition de $\alpha = d(y, F)$ comme borne inférieure implique qu'il existe $z \in F$ tel que

$$\|y - z\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\varepsilon}.$$

Puisque $y \notin F$, on a $\|y - z\| \neq 0$ ; donc afin d'obtenir un vecteur sur la sphère-unité on peut normaliser et poser :

$$x = \frac{y - z}{\|y - z\|}.$$

# Démonstration du lemme de Riesz, suite et fin

Pour tout $z' \in F$, on a :

$$\|x - z'\| = \left\| \frac{y-z}{\|y-z\|} - \frac{\|y-z\|}{\|y-z\|} z' \right\| = \frac{1}{\|y-z\|} \, \|y - (z + \|y-z\| \, z')\|,$$

Comme $z + \|y-z\| \, z' \in F$, on en déduit que $\|y - (z + \|y-z\| \, z')\| \geqslant \alpha$, soit :

$$\|x - z'\| \geqslant \frac{1}{\|y-z\|} \alpha.$$

Enfin, comme

$$\|y - z\| \leqslant \frac{\alpha}{1-\varepsilon}, \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{\|y-z\|} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{\alpha},$$

on conclut que

$$\|x - z'\| \geqslant \frac{\alpha}{\|y-z\|} \geqslant 1 - \varepsilon$$

pour tout $z' \in F$, ce qui termine la démonstration.

# Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé

Toujours pour prouver l'implication non immédiate du théorème de Riesz, on va aussi utiliser le lemme suivant.

**Lemme**

*Dans un espace vectoriel normé, un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.*

**Preuve.** On utilise le critère séquentiel (de fermeture) : on se donne $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de $F$, admettant une limite dans $E$, disons $x$ ; il s'agit de voir qu'en fait $x \in F$.

En tant que suite convergente $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est bornée : il existe $R > 0$ tel que $\{x_n\}_{n \geqslant 0} \subset B_f(0, R)$. Mais $B_f(0, R) \cap F$ est une boule fermée de $F$, donc un compact puisque $\dim(F) < \infty$ (on utilise Borel-Lebesgue dans $F$ de dimension finie). Par Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ qui converge dans $F$. Par unicité, cette limite doit être $x$, d'où l'on déduit que $x \in F$. $\square$

# Démonstration du théorème de Riesz

**Preuve.** On suppose que $E$ n'est pas de dimension finie. On va construire une suite de vecteurs $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ sur la sphère-unité $S_E(0,1)$ de $E$ tels que pour tous $m \neq n$ on ait

$$\|e_m - e_n\| \geqslant 1/2.$$

Cette suite ne peut admettre de valeur d'adhérence car, par construction, aucune de ses sous-suites n'est de Cauchy.

On commence par se donner un vecteur arbitraire $e_0 \in S_E(0,1)$. Ensuite, on suppose construite la suite désirée jusqu'au rang $n$ et on note $F_n$ le sous-espace vectoriel engendré par les $n+1$ premiers vecteurs $e_0, \ldots, e_n$ : c'est un sev de dimension finie de $E$, donc strict, et fermé par le lemme précédent. En utilisant le lemme de Riesz pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient un vecteur $e_{n+1} \in S_E(0,1)$ à distance $\geqslant \frac{1}{2}$ de $F_n$, et donc des vecteurs $e_i$ précédents.

On vient de vérifier qu'on peut construire la suite désirée par récurrence, et cette suite contredit la compacité de la boule-unité fermée de $E$ (le critère de Bolzano-Weierstrass n'est pas satisfait par $S_E(0,1)$, et donc pas non plus par la boule-unité fermée).

# Conditions supplémentaires pour la compacité des boules fermées

Le théorème de Riesz est plutôt un résultat négatif puisqu'il dit que les boules fermées dans les evn de dimension infinie (typiquement les espaces de fonctions munis d'une norme) sont non compactes. Il y a au moins deux façons de controurner cette difficulté.

- La première est assez élaborée, elle consiste à travailler avec des espaces vectoriels dont la topologie est construite plus subtilement qu'à partir d'une seule norme. C'est une approche largement exploitée en analyse fonctionnelle plus avancée (mais pas ici).
- La seconde consiste à ajouter des hypothèses au fait d'être fermé et borné pour assurer la compacité.

On va se concentrer sur la seconde approche, dans le cas où l'espace vectoriel normé est l'espace $\mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ des fonctions continues d'un espace métrique compact $X$ vers $\mathbf{K}$ ($= \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

# Équicontinuité de familles de fonctions

## Définition

*Soit $(X, d)$ un espace métrique. Soit $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X; \mathbf{K})$ une famille d'applications continues de $X$ vers $\mathbf{K}$.*

*On dit que la famille $\mathscr{F}$ est* équicontinue *en $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall f \in \mathscr{F}, \quad \forall y \in X, \quad (d(x,y) < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

*On dit que la famille $\mathscr{F}$ est* équicontinue *sur $X$ si elle est équicontinue en tout $x \in X$.*

**Exemple :** soit $(X, d)$ un espace métrique compact. Fixons $k > 0$ et considérons

$$\mathscr{F}_k = \{f \in \mathscr{C}(X; \mathbf{K}) \ : \ |f(x) - f(y)| \leqslant k\, d(x,y)\}$$

l'ensemble des fonctions $k$-lipschitziennes définies sur $X$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. Cette famille est équicontinue sur $X$ (prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ dans la condition de la définition ci-dessus).

# Un non-exemple d'équicontinuité

En termes de définition « $(\varepsilon, \delta)$ » de la continuité des applications, la condition d'équicontinuité en $x$ est une condition d'uniformité de la constante $\delta$ par rapport à toutes les fonctions de la famille $\mathscr{F}$ considérée : étant donné un $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un $\delta > 0$ tel que *pour toute* $f \in \mathscr{F}$ on ait :

$$f\big(B(x,\delta)\big) \quad \subset \quad ]f(x) - \varepsilon; f(x) + \varepsilon[.$$

**Non-exemple :** dans l'espace $\mathscr{C}([-1,1];\mathbf{R})$, considérons la famille

$$\mathscr{F} = \{s_n : x \mapsto \sin(nx)\}_{n \geqslant 1}.$$

Alors $\mathscr{F}$ n'est pas équicontinue sur $[-1,1]$.

Par exemple, elle n'est pas équicontinue en 0 car pour tout $\delta > 0$ on peut trouver un indice $n$ tel que $s_n\big(]-\delta;\delta[\big) = [-1;1]$ : l'équicontinuité est contredite avec n'importe quel $\varepsilon \leqslant 1$.

# Un exemple non-lipschitzien d'équicontinuité

**Exemple :** on considère $X = [0,1]$ muni de la distance usuelle et

$$\mathscr{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^1([0,1];\mathbf{R}) \ : \ \int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \leqslant 1 \right\}.$$

Remarquons que, si $f \in \mathscr{C}^1([0,1];\mathbf{R})$ et si $x < y$, on peut écrire

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient l'inégalité

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \left( \int_x^y |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} |y-x|^{\frac{1}{2}} \leqslant |y-x|^{\frac{1}{2}},$$

pourvu que $f \in \mathscr{F}$. En prenant $\delta = \varepsilon^2$, on voit que $\mathscr{F}$ est équicontinue sur $[0,1]$.

# Énoncé du théorème d'Ascoli

Revenons enfin à un énoncé qui fournit une condition suffisante de compacité dans l'espace de fonctions $\mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

**Théorème (théorème d'Ascoli)**

*Soit $(X,d)$ un espace métrique compact. On se donne une famille de fonctions $\mathscr{F} \subset \mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ et on fait les hypothèses suivantes.*

(i) *La famille $\mathscr{F}$ est équicontinue sur $X$.*

(ii) *Pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x) : f \in \mathscr{F}\}$ est borné.*

*Alors, de toute suite dans $\mathscr{F}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans $(\mathscr{C}(X;\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$.*

Cet énoncé est une condition suffisante pour qu'une suite de fonctions sur un ensemble compact admette une limite uniforme. C'est donc un résultat important dans le sens où c'est un énoncé d'existence (de fonction définie comme limite).

# Application

**Exemple :** soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbf{K})$. On fait les hypothèses suivantes.

(i) Il existe une constante $k>0$ telle que pour tout $n\geqslant 0$ et pour tous $x,y\in[0,1]$

$$|f_n(y)-f_n(x)|\leqslant k\,|y-x|.$$

(ii) Il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $n\geqslant 0$

$$\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\leqslant C.$$

Alors (par Ascoli), on peut extraire de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite qui converge dans $(\mathscr{C}([0,1];\mathbf{K}),\|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire une sous-suite qui converge uniformément sur $[0,1]$.

Autrement dit, il existe une fonction continue $f$ sur $[0;1]$ qui est limite uniforme d'une sous-suite de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

# 2. Densité et convergence uniforme

# Notion générale de densité

La notion de *densité* est une notion que nous retrouverons fréquemment dans ce cours. Ici $(X, d)$ est un espace métrique. Voici la définition dans le cadre général des espaces métriques.

**Définition**

*Soit $Y \subset X$. On dit que $Y$ est dense dans $(X, d)$ si on a : $\overline{Y} = X$.*
*De manière équivalente, $Y \subset X$ est dense dans $(X, d)$ si*

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \qquad B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing.$$

*Ou encore : tout point de $X$ est limite d'une suite d'éléments de $Y$.*

**Exemples.**

1. Les parties $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R} - \mathbf{Q}$ sont denses dans $\mathbf{R}$.
2. On peut voir que l'espace $\mathbf{R}[\mathbf{X}]$ des fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}$ n'est pas dense dans $\mathscr{C}(\mathbf{R}; \mathbf{R})$ muni de la distance : $d_\infty(f, g) = \min(1, \sup_{\mathbf{R}} |f - g|)$.

# Densité dans les espaces fonctionnels

La notion de densité est très importante dans le cas où les espaces topologiques $X$ sont des espaces de fonctions (qu'on apppelle désormais *espaces fonctionnels*).

Par exemple, dans le cas d'un espace $X = \mathbf{R}^N$ (muni de n'importe quelle norme), l'espace $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^N; \mathbf{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $X$ et nulles en dehors d'un compact (non fixé), va être dense dans de nombreux espaces fonctionnels.

Ce type de densité d'un espace fonctionnel dans de multiples autres espaces permet de transférer des définitions, des propriétés etc. d'un espace fonctionnel à un autre (voir, par exemple, ce qu'on fera avec la transformation de Fourier).

# Convergences simple et uniforme

Faisons quelques rappels sur certaines convergences de suites de fonctions. On se donne pour cela $(X, d)$ un espace métrique.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $X$ dans $\mathbf{K}$ *converge simplement* sur $X$ s'il existe une fonction $f : X \to \mathbf{K}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Dans ce cas $f$ est appelée la *limite simple* de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ *converge uniformément* sur $X$ s'il existe une fonction continue $f : X \to \mathbf{K}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Dans ce cas $f$ est appelée la *limite uniforme* de la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

Si $f$ est limite uniforme de $(f_n)_{n\geqslant 0}$, alors elle est automatiquement limite simple de cette suite.

# Énoncé du théorème de Dini

Le théorème de Dini est un moyen de déduire la convergence uniforme d'une suite de fonctions qui converge simplement, pourvu que cette suite satisfasse une condition de monotonie.

On dit à ce propos qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de $X$ dans $\mathbf{R}$ est *croissante* (resp. *décroissante*) si pour tout $x \in X$ la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ l'est.

**Théorème (théorème de Dini)**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique compact. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions continues de $X$ dans $\mathbf{R}$. On fait les hypothèses suivantes.*

(i) *La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers $f$ dans $\mathscr{C}(X; \mathbf{R})$.*

(ii) *La suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, c'est-à-dire ou bien décroissante ou bien croissante.*

*Alors $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers $f$, c'est-à-dire converge vers $f$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Ce théorème est bien adapté aux séries de fonctions positives ; il nous sera utile en théorie de l'intégration.

# Ensembles de fonctions stables par passage au maximum

Nous allons commencer par un lemme dont la preuve permet de voir le rôle joué par la compacité de $X$ et la relation d'ordre sur $\mathbf{R}$.

**Lemme**

*Soit $\mathscr{H}$ une partie de $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$ telle que si $u_1$ et $u_2$ sont dans $\mathscr{H}$, alors $\max(u_1, u_2) \in \mathscr{H}$. Soit $f \in \mathscr{C}(X;\mathbf{R})$. On suppose que pour tout $y \in X$ il existe $u_y \in \mathscr{H}$ telle que $u_y(y) > f(y)$. Alors il existe $v \in \mathscr{H}$ telle que $v(x) > f(x)$ pour tout $x \in X$.*

**Preuve.** Pour chaque $y \in X$, note $U_y = \{x \in X : u_y(x) > f(x)\}$ : c'est un ouvert car c'est l'image réciproque de $\mathbf{R}_+^\times$ par la fonction continue $u_y - f$ ; en outre $y \in U_y$. Par compacité de $X$, qui est réunion de tous les $U_y$, on peut écrire $X = U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \cdots \cup U_{y_p}$ pour des $y_i$ convenables et en nombre fini.

Par récurrence finie, la fonction $v : x \mapsto \max\{u_{y_1}(x); u_{y_2}(x); \ldots u_{y_p}(x)\}$ est dans $\mathscr{H}$. Elle convient car un élément quelconque $x \in X$ est dans un $U_{y_i}$ au moins et on peut écrire :

$$v(x) \geqslant u_{y_i}(x) > f(x).$$

# Preuve du théorème de Dini

**Preuve.** On travaille dans le cas où la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante (cas auquel on peut toujours se ramener, quitte à opposer les fonctions). Alors, par monotonie la famille $\mathscr{H} = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$ est stable par passage au maximum car pour $m \geqslant n$, on a : $\max\{f_n; f_m\} = f_m$.

Maintenant on se donne $\varepsilon > 0$.

Par convergence simple, pour tout $y \in X$ il existe $u \in \mathscr{H}$ telle que $u(y) > f(y) - \varepsilon$. On applique le lemme précédent à la fonction $f - \varepsilon$ (toujours avec $\mathscr{H} = \{f_n\}_{n\geqslant 0}$) : il existe $N$ tel que pour tout $x \in X$ on ait :

$$f_N(x) > f(x) - \varepsilon.$$

Finalement, pour tout indice $n \geqslant N$ et pour tout $x \in X$, on a :

$$f(x) - \varepsilon < f_N(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

soit $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. $\square$

# Approximation uniforme de $\sqrt{\cdot}$ et $|\cdot|$

Le théorème de Dini a pour conséquence ce premier énoncé, d'apparence anecdotique, mais utile pour prouver le théorème de Weierstrass historique (approximation uniforme des fonctions continues sur un segment compact par des fonctions polynomiales).

**Lemme**

*On définit une suite $(p_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions $[0;1] \to \mathbf{R}$ par $p_1(x) = 0$ pour tout $x \in [0;1]$ et*

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\big(x - p_n(x)^2\big).$$

*Alors les fonctions $p_n$ sont polynomiales et convergent uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0;1]$.*

**Remarque :** en remplaçant $p_n(x)$ par $p_n(x^2)$, on voit que la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[0;1]$.

# Application du théorème de Dini

On va utiliser le théorème de Dini pour prouver le lemme précédent.

**Preuve.** Pour tout $n \geqslant 1$, un calcul montre que :

$$\sqrt{x} - p_{n+1}(x) = \left(\sqrt{x} - p_n(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} + p_n(x)\right)\right),$$

ce qui permet de voir par récurrence que

$$p_n(x) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad p_n(x) \leqslant p_{n+1}(x) \leqslant \sqrt{x} \quad \text{pour tout } x \in [0;1].$$

À $x$ fixé la suite numérique $\left(p_n(x)\right)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée. Elle converge donc vers $g(x)$ qui satisfait $g(x) = g(x) + \frac{1}{2}\left(x - g(x)^2\right)$, autrement dit vers $g(x) = \sqrt{x}$. Ainsi on vient de voir que $\sqrt{\cdot}$ est limite simple des $p_n$ sur $[0;1]$, et le théorème de Dini assure que la convergence est uniforme. $\square$

# Théorème de Weierstrass classique

## Théorème (théorème de Weierstrass classique)

*Soient $a < b$ des nombres réels. Alors toute fonction réelle continue sur $[a; b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.*

**Preuve.** Les étapes d'une preuve possible sont les suivantes.

1. Par le lemme précédent, la fonction valeur absolue $|\cdot|$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a; b]$.
2. Par décalage de la variable et homothétie, toute combinaison linéaire de fonctions $x \mapsto |x - c|$ ($c \in [a; b]$) est limite uniforme de fonctions polynomiales sur $[a; b]$.
3. Les combinaisons linéaires précédentes reconstituent les fonctions continues affines par morceaux sur $[a; b]$.
4. Toute fonction continue sur $[a; b]$ est uniformément continue (par Heine) et est donc limite uniforme de fonctions continues affines par morceaux.

On conclut en utilisant la « transitivité » de l'approximation uniforme (c'est la nouvelle idée intéressante dans cette preuve).

# Ensembles séparants de fonctions

Nous allons maintenant mentionner sans démonstration des généralisations du théorème de Weierstrass classique. Ces résultats sont dus à M. Stone, qui a dégagé le rôle de la relation d'ordre $\leqslant$ sur $\mathbf{R}$ quand on travaille sur $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$ et le rôle de la stabilité par conjugaison complexe quand on travaille sur $\mathscr{C}(X;\mathbf{C})$.

Soit $(X,d)$ un espace métrique compact. On munit $\mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ de la distance associée à la norme de la convergence uniforme : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X}|f(x)|$.

## Définition

*Un sous-ensemble $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ est séparant si, pour tous $x \neq y \in X$, il existe $f \in \mathscr{H}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

La propriété d'être séparant est une façon pour $\mathscr{H}$ d'être « assez gros » vis-à-vis des points du compact $X$.

# Critère de densité dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$

On dit que $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}(X;\mathbf{K})$ est une sous-algèbre si $\mathscr{H}$ est stable par combinaison linéaire et par produit (point par point) des fonctions.

Dans le résultat suivant, on suppose que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

**Théorème (théorème de Stone-Weierstrass réel)**

*On suppose que $(X, d)$ est un espace métrique compact. Soit $\mathscr{H}$ une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$ qui contient les fonctions constantes et qui est séparante. Alors $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$ pour la topologie associée à la norme de la convergence uniforme.*

Autrement dit, ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques et propriété de séparation) pour être dense dans $\big(\mathscr{C}(X;\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.

# Exemples de densité dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$

**Exemples.**

1. On retrouve facilement le théorème de Weiestrass classique (la fonction identité suffit à séparer les points).
2. L'ensemble des polynômes trigonométriques à coefficients dans $\mathbf{R}$ est dense dans $\big(\mathscr{C}(\mathbf{S}^1;\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$.
3. Toute fonction numérique continue sur $[0,1]\times[0,1]$ est limite uniforme sur $[0,1]\times[0,1]$ de sommes finies de fonctions de la forme $(x,y)\mapsto f(x)\,g(y)$, où $f$ et $g$ sont continues sur $[0,1]$.
4. Le sous-espace de $\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R})$ des *fonctions lipschitziennes* sur $[0,1]$ i.e. l'ensemble des fonctions $f\in\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R})$ pour lesquelles, il existe une constante $k>0$ telle que

$$|f(x)-f(y)|\leqslant k\,|x-y|,$$

est dense dans $\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R})$, muni de la norme de la convergence uniforme.

# Critère de densité dans $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$

Pour formuler le critère de densité pour les fonctions à valeurs complexes, on a besoin d'une autre notion de stabilité adaptée à la situation.

**Définition**

*On dit que $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ est* auto-conjugué *si $\mathscr{H}$ est stable par conjugaison complexe, i.e. si dès que $f \in \mathscr{H}$, on a $\overline{f} \in \mathscr{H}$.*

**Théorème (théorème de Stone-Weierstrass complexe)**

*On suppose que $X$ est compact. Soit $\mathscr{H}$ une sous-algèbre de $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$ qui contient les fonctions constantes, est séparante et auto-conjuguée. Alors, $\mathscr{H}$ est dense dans $\mathscr{C}(X; \mathbf{C})$.*

Autrement dit, ce théorème fournit une condition suffisante (stabilité par opérations algébriques, par conjugaison complexe et propriété de séparation) pour être dense dans $(\mathscr{C}(X; \mathbf{C}), \| \cdot \|_\infty)$.

# Exemples de (non) densité dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{C})$

**Exemple :** Le **C**-espace vectoriel engendré par les $x \mapsto e^{inx}$, pour $n \in \mathbf{Z}$, est dense dans l'espace des fonctions continues $2\pi$ périodiques, muni de la norme de la convergence uniforme.

**Non-exemple :** La fonction $x \mapsto e^{-ix}$ n'est pas limite uniforme de combinaisons linéaires (finies) de fonctions de la forme $x \mapsto e^{inx}$, où $n \in \mathbf{N}$. En effet, pour tout $P \in \mathbf{C}[\mathbf{X}]$,

$$\int_0^{2\pi} e^{ix}\, P(e^{ix})\,\mathrm{d}x = 0.$$

Si $(P_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de $\mathbf{C}[\mathbf{X}]$ telle que $x \mapsto P_n(e^{ix})$ converge uniformément vers $x \mapsto e^{-ix}$ alors

$$2\pi = \int_0^{2\pi} e^{ix}\, e^{-ix}\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{ix}\, P_n(e^{ix})\,\mathrm{d}x = 0. \qquad \square$$

**Preuve.** On note

$$\mathscr{H}_{\mathbf{R}} := \{f \in \mathscr{H} \,:\, \forall x \in X,\, f(x) \in \mathbf{R}\},$$

Soient $x \neq y$. Il existe $f \in \mathscr{H}$ telle que $f(x) \neq f(y)$. Quitte à échanger $x$ et $y$ on peut supposer que $f(x) \neq 0$. Définissons $g \in \mathscr{H}$ par

$$g(z) = \frac{f(z) - f(y)}{f(x) - f(y)}.$$

pour $z \in X$, puis,

$$h = \frac{1}{2}(g + \overline{g}) \in \mathscr{H}_{\mathbf{R}}$$

On vérifie que $h(x) = 1 \neq h(y) = 0$. Ainsi $\mathscr{H}_{\mathbf{R}}$ est une sous-algèbre séparante de $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$ qui contient les fonctions constantes. Donc $\mathscr{H}_{\mathbf{R}}$ est dense dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$.
De même

$$\mathscr{H}_I := \{f \in \mathscr{H} \,:\, \forall x \in X, f(x) \in i\mathbf{R}\},$$

est dense dans $i\mathscr{C}(X;\mathbf{R})$. Finalement, $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{\mathbf{R}} \oplus \mathscr{H}_I$ est dense dans $\mathscr{C}(X;\mathbf{C})$. $\square$