# Espaces métriques complets

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

# 1. Complétude et espaces de Banach

# Notion de suite de Cauchy

L'intérêt des suites de Cauchy est que dans des espaces métriques convenables (les espaces *complets* – voir plus loin), on peut vérifier la convergence de certaines suites sans avoir à connaître *a priori* la limite. On cherchera donc à exhiber le plus possible d'espaces complets.

**Définition**

*Une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'un espace métrique $(X,d)$ est appelée* suite de Cauchy *si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbf{N}, \qquad \textit{tel que} \qquad (\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon)$$

**Remarques.**

1. Si $d_1$ et $d_2$ sont deux distances Lispchitz-équivalentes sur $X$, on vérifie qu'une suite dans $X$ est de Cauchy pour la distance $d_1$ si, et seulement si, elle est de Cauchy pour la distance $d_2$.
2. On vérifie aussi que l'image d'une suite de Cauchy par une application uniformément continue, est de Cauchy.

# Les suites convergentes sont de Cauchy

**Proposition**

*Une suite qui converge est une suite de Cauchy.*

**Preuve.** Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite qui converge vers $x$ dans un espace métrique $(X, d)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x) < \varepsilon/2.$$

Alors par inégalité triangulaire

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy. $\square$

# Les suites de Cauchy sont bornées

## Proposition

*Une suite de Cauchy est bornée.*

**Preuve.** Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy.

Choisissons $\varepsilon = 1$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < 1.$$

En particulier

$$\forall n \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_{n_0}) < 1,$$

ce qui montre que la suite est bornée. $\square$

# Suites de Cauchy possédant une valeur d'adhérence

## Proposition

*Une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui possède une valeur d'adhérence, converge.*

**Preuve.** Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n, m \geqslant n_0, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon/2.$$

Soit $x$ une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$. Il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers $x$. Donc, il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon/2.$$

Alors,

$$\forall n \geqslant \max(n_0, n_1), \quad d(x_n, x) \leqslant d(x_n, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, x) < \varepsilon,$$

ce qui montre que la suite converge. □

# Notion d'espace métrique complet

### Définition

*Un espace métrique $(X, d)$ est dit* complet *si toute suite de Cauchy converge.*

**Exemples.**

- Un espace métrique compact est complet (proposition précédente et Bolzano-Weierstrass).
- $(]0, 1], |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet : penser à $(\frac{1}{n})_{n \geqslant 1}$.
- $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$ n'est pas un espace métrique complet. On peut définir $\mathbf{R}$ comme étant le « complété » de $(\mathbf{Q}, |\cdot|)$.

**Remarques.**

1. La complétude est une propriété qui dépend de la distance et pas seulement de la topologie sur l'ensemble $X$.
2. Si $d_1$ et $d_2$ sont des distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble $X$, on vérifie que $(X, d_1)$ est complet si, et seulement si, $(X, d_2)$ l'est.

# Non-exemple d'espace métrique complet

**Non-exemple :** prenons sur $\mathbf{R}$ la distance

$$d(x,y) := |e^{-x} - e^{-y}|.$$

Alors l'espace $(\mathbf{R}, d)$ n'est pas un espace métrique complet.

**Justification.** La suite $(n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{R}, d)$, pourtant elle ne converge pas dans $\mathbf{R}$ pour cette distance. $\square$

**NB :** la topologie associée à la distance $d$ est égale à la topologie associée à la distance usuelle.

**Lemme**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique complet et $Y \subset X$. Alors l'espace $(Y, d_Y) = (Y, d)$ est complet si, et seulement si, $Y$ est fermé.*

**Preuve.** Supposons que $(Y, d)$ est complet. Si $(y_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite d'éléments de $Y$ qui converge dans $(X, d)$, alors c'est une suite de Cauchy dans $(Y, d)$. Elle converge donc dans $Y$ et par conséquent $Y$ est fermé. Soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de Cauchy dans $(Y, d)$. C'est une suite de Cauchy dans $(X, d)$ donc elle converge dans $(X, d)$. Si $Y$ est fermé, elle converge également dans $(Y, d)$. Donc $(Y, d)$ est complet. $\square$

# Produit d'espaces métriques complets

**Lemme**

*Le produit de deux espaces métriques complets* $(X_i, d_i), i = 1, 2$ *muni de la distance somme ou de la distance produit est un espace métrique complet.*

**Preuve.** Si $((x_{1,n}, x_{2,n}))_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(X_1 \times X_2, d_p)$, alors les suites $(x_{i,n})_{n \geqslant 0}$ sont des suites de Cauchy dans $(X_i, d_i)$.

Elles convergent donc vers une limite notée $x_i$ et on vérifie que la suite $((x_{1,n}, x_{2,n}))_{n \geqslant 0}$ converge vers $(x_1, x_2)$, aussi bien pour la distance somme que pour la distance produit. □

# Espaces vectoriels normés de dimension finie

Comme pour la compacité, les espaces vectoriels normés de dimension finie ont un bon comportement ; la nuance est que cette fois, c'est l'espace tout entier, et donc tout fermé qu'il contient, qui jouit de la propriété de complétude.

**Théorème**

*Un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel normé de dimension finie, muni de la distance associée à la norme, est un espace métrique complet.*

**Preuve.** Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de Cauchy. Cette suite est bornée, elle est donc incluse dans un compact (prendre par exemple une boule fermée de rayon assez grand).

On peut donc extraire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une sous-suite qui converge. En particulier, la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence, donc elle converge. $\square$

# Notion d'espace de Banach

**Définition**

*On dit qu'un espace vectoriel normé est un* espace de Banach *s'il est un espace métrique complet pour la distance issue de la norme.*

La structure d'un espace de Banach est donc très riche puisqu'elle cumule de forte propriétés algébriques et métriques, compatibles entre elles.

**Exemples.**

- Une reformulation du théorème précédent consiste à dire que tous les $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie sont des espaces de Banach.
- L'étape suivante consiste à exhiber des espaces de Banach qui sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie.

**Exemple :** L'espace $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

**Preuve.** Soit $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ une suite de Cauchy d'éléments de $(\ell^\infty(\mathbf{N},;\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$. On note

$$\mathbf{x}^m := (x_n^m)_{n\in\mathbf{N}},$$

où $x_n^m \in \mathbf{K}$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, m' \geqslant m_0$,

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon.$$

Donc, pour chaque $n \geqslant 0$, la suite $(x_n^m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{K}, |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $z_n \in \mathbf{K}$.

# L'espace de Banach $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$, fin

On note $\mathbf{z} := (z_n)_{n\geqslant 0}$. Vérifions que $\mathbf{z} \in \ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K})$ et que

$$\lim_{m\to+\infty} \mathbf{x}^m = \mathbf{z}.$$

On sait que

$$\sup_{n\geqslant 0} |x_n^m - x_n^{m'}| < \varepsilon.$$

pour $m, m' \geqslant m_0$.

Donc

$$|x_n^m - z_n| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $m \geqslant m_0$.

Finalement, la suite $\mathbf{z}$ est bornée (prendre par exemple $\varepsilon = 1$) et la suite $(\mathbf{x}^m)_{m\geqslant 0}$ converge vers $\mathbf{z}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. $\square$

**Exemple :** L'espace $\mathcal{C}([0,1];\mathbf{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|\,dt,$$

n'est pas un espace vectoriel normé complet.

**Preuve.** Définissons pour tout $n \geqslant 2$

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ 1 - n\,(x - 1/2) & \text{si} \quad x \in [1/2, 1/2 + 1/n] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [1/2 + 1/n, 1]. \end{cases}$$

On a

$$\lim_{n,m \to \infty} \|f_n - f_m\|_1 = 0,$$

mais $(f_n)_{n \geqslant 2}$ ne converge pas vers une fonction continue.

# Applications linéaires continues dans un Banach

Une autre façon de construire des espaces de Banach consiste à considérer des espaces d'applications linéaires *continues* à valeurs dans un espace de Banach.

**Proposition**

*Supposons que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Alors, l'espace $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est également un espace de Banach.*

**Preuve.** Soit $(L_m)_{m\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, n \geqslant n_0$,

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon \, \|x\|_E.$$

Ainsi, pour tout $x \in E$, la suite $(L_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(F, \| \ \|_F)$, qui est un espace de Banach, donc elle converge vers une limite que l'on note $L(x) \in F$.

On vérifie que $L$ est linéaire

$$L(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to\infty} L_n(\lambda x + \mu y) = \lambda \lim_{n\to\infty} L_n(x) + \mu \lim_{n\to\infty} L_n(y) = \lambda L(x) + \mu L(y).$$

On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L_m(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$

pour $m, n \geqslant n_0$.

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|L_n(x) - L(x)\|_F < \varepsilon \|x\|_E.$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

En particulier,

$$\|L(x)\|_F \leqslant \left(\varepsilon + \|L_{n_0}\|_{\mathcal{L}(E,F)}\right) \|x\|_E.$$

ce qui montre que $L$ est continue et

$$\|L_n - L\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \varepsilon,$$

pour tout $n \geqslant n_0$.

Finalement, la suite $(L_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $L$ dans $(\mathcal{L}(E,F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)})$. $\square$

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

# 2. Points fixes et applications

# Applications contractantes

Soit $T$ une application d'un espace métrique $(X, d)$ dans un espace métrique $(X', d')$.

## Définition

*On dit que $T$ est* contractante *s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tous $x, y \in X$, on ait :*

$$d'\big(T(x), T(y)\big) \leqslant k\, d(x, y),$$

*autrement dit, si $T$ est $k$-lipschitzienne de rapport $k \in [0, 1[$.*

**Remarque :** une application contractante est automatiquement continue.

# Énoncé du théorème de point fixe de Banach

Voici un énoncé très général, qui se décline dans de nombreuses situations et qui conduit à des résultats très profonds (par exemple pour la résolution des équations différentielles).

**Théorème (théorème de point fixe de Banach)**

*Soit $(X, d)$ un espace métrique non vide, complet et soit $T : X \to X$ une application contractante. Alors, $T$ possède un unique point fixe dans $X$ (i.e. il existe un unique $x \in X$ tel que $T(x) = x$).*

Il est instructif de discuter les hypothèses, en lien avec quelques idées directrices de la preuve.

1. D'abord, il est naturel de supposer $X$ non vide, surtout si le but est d'obtenir un point (fixe) dedans...
2. La complétude de $X$ est utilisée car on va prouver que toute suite dans $X$ obtenue en itérant $T$ sur un point quelconque, est de Cauchy.
3. La limite d'une telle suite est un point fixe (et l'unicité est facile).

# Preuve du théorème de point fixe de Banach

**Preuve.** Soit $x_0 \in X$. Définissons $(x_n)_{n\geqslant 0}$ par $x_{n+1} = T(x_n)$ pour tout $n \geqslant 0$.
Pour tous $n \geqslant m$, on peut estimer

$$d(x_n, x_m) = d(T^m(x_{n-m}), T^m(x_0)) \leqslant k^m \, d(x_{n-m}, x_0).$$

En particulier, l'inégalité triangulaire implique que

$$d(x_n, x_0) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} d(x_{j+1}, x_j) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} k^j \, d(x_1, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Donc, pour tous $n \geqslant m$, on a :

$$d(x_n, x_m) \leqslant \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).$$

## Preuve du théorème de point fixe de Banach, suite et fin

La suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $X$ qui est complet, donc elle converge. On note $x_\infty \in X$ sa limite. Par continuité de $T$, on a

$$T(x_\infty) = T\left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right) = \lim_{n \to +\infty} T(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = x_\infty.$$

Donc, $x_\infty$ est un point fixe de $T$.

Si $x, y$ sont des points fixes de $T$, on a

$$d(x,y) = d\big(T(x), T(y)\big) \leqslant k\, d(x,y),$$

et, puisque $k \in [0,1[$, on a nécessairement $d(x,y) = 0$, i.e. $x = y$. $\square$

# Un problème d'équations différentielles

On part d'un ouvert non vide $\Omega$ dans un evn de dimension finie $E$ et d'un intervalle ouvert non vide $I$ de la droite réelle $\mathbf{R}$. Étant donnée une application continue $X : I \times \Omega \to E$, on cherche à résoudre l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$$

avec condition initiale $x(t_0) = u_0$ pour $t_0 \in I$ et $u_0 \in \Omega$.

L'équation ci-dessus est souvent appelée *résolue* dans le sens où la dérivée de la fonction inconnue est isolée comme membre (de gauche) de l'équation. Une généralisation du problème ci-dessus consiste à considérer des équations *implicites*, c'est-à-dire des équations de la forme $g\big(t, x(t), \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\big) = 0$. Ces équations peuvent souvent être rendues localement résolues.

Une autre généralisation consiste à considérer des dérivées d'ordre supérieur de la fonction inconnue. Une astuce de calcul permet de ramener une équation résolue d'ordre $n$ à l'ordre 1, quitte à remplacer $E$ par $E^n$ et $x$ par $\big(x, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \dots \dfrac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}\big)$.

# Théorème de Cauchy-Lipschitz, énoncé

**Théorème (théorème de Cauchy-Lipschitz)**

*Supposons $X$ continue en $(t, x)$ et lipschitzienne en la seconde variable. Alors pour tout $(\tau_0, u_0) \in I \times \Omega$, il existe $\delta > 0$ et $\alpha > 0$ tels que pour tous $u \in B(u_0, \delta)$ et $t_0 \in ]\tau_0 - \delta; \tau_0 + \delta[$ le système*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(t, x(t)),$$

*avec condition initiale $x(t_0) = u$, possède une unique solution définie sur $t \in ]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[$.*

**Remarques.**

- Noter que dans cet énoncé le temps d'existence $2\alpha$ de la solution ne dépend ni de $t_0$, ni de $u$ (choisis cependant dans des domaines prescrits, notamment par $\delta$).
- On peut se contenter de supposer que $X$ est localement lipschitzienne, par exemple de classe $C^1$.

# Solutions maximales

Soit $J$ la réunion des intervalles contenant $t_0$ sur lesquels on dispose d'une solution au problème du théorème.

## Proposition

*Il existe une solution $x$ définie sur $J$, et toute autre solution s'obtient par restriction de celle-ci.*

La solution définie sur $J$ s'appelle la *solution maximale* du problème du théorème.

**Preuve.** Il suffit de prouver que deux solutions, disons $x_1$ et $x_2$, définies sur des intervalles contenant $t_0$, disons $J_1$ et $J_2$, coïncident sur $J_1 \cap J_2$. Autrement dit de prouver que $K = \{t \in J_1 \cap J_2 : x_1(t) = x_2(t)\}$ vaut $J_1 \cap J_2$ tout entier. Par continuité, $K$ est un fermé de $J_1 \cap J_2$, et il est non vide car $t_0 \in K$. Enfin, le théorème de Cauchy-Lipschitz implique que $K$ est ouvert. Or, l'intersection $J_1 \cap J_2$ est un intervalle contenant $t_0$, donc est connexe. Ceci implique qu'on a bien $K = J_1 \cap J_2$. $\square$

# Théorème de Cauchy-Lipschitz, preuve

**Esquisse de preuve.** C'est un retour à la topologie des evn et aux points fixes...

En effet, par intégration l'équation du théorème est équivalente à

$$x(t) = u + \int_{t_0}^{t} X\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s.$$

Pour $\alpha > 0$ et $r > 0$, les espaces de fonctions continues $]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[ \to \overline{B(u_0, r)}$ sont des espaces de Banach pour la norme $\| \cdot \|_\infty$ de la convergence uniforme. Pour résoudre l'équation du théorème, on se ramène à trouver un point fixe $x$ pour la transformation

$$T_u : x \mapsto \Big(T_u(x) : t \mapsto u + \int_{t_0}^{t} X\big(s, x(s)\big)\,\mathrm{d}s\Big).$$

Cela se fait en utilisant le théorème de point fixe de Banach. Il faut pour cela choisir les paramètres $\alpha$, $\delta$ et $r$ assez petits pour que $T_u$ envoie $\mathscr{C}\big(]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[, \overline{B(u_0, r)}\big)$ dans lui-même, en y étant contractante pour la norme $\| \cdot \|_\infty$. $\square$

# Commentaires et améliorations concernant Cauchy-Lipschitz

**Non unicité.** On n'a pas unicité de la solution quand $X$ est seulement continue. Ceci peut se voir grâce à l'équation implicite $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 - 4x(t) = 0$, qui donne lieu à l'équation résolue

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\sqrt{|x(t)|}.$$

Cette dernière équation admet deux solutions telles que $x(0) = 0$, à savoir la fonction nulle et la fonction $t \mapsto \mathrm{signe}(t)t^2$. Un théorème d'existence est par contre disponible (théorème de Peano).

**Temps d'existence.** Revenons à l'application $T_u$ de $\mathscr{C}\big(]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[, \overline{B(u_0, r)}\big)$ dans lui-même utilisée dans la preuve. Alors une amélioration astucieuse du théorème de point fixe (par unicité, il suffit qu'une puissance $T^n$ de $T$ contracte) et des calculs supplémentaires sur $T_u$, permettent de voir que le temps d'existence des solutions ne dépend que de $r$ et de $M = \sup \| X(t,x) \|$ pour $|\, t - t_0 \,| \leqslant \alpha$ et $x \in \overline{B(u_0, r)}$.