MAT311, Cours 2 : Continuité et compacité [1]

§1. Applications continues

1.1. Notion de continuité d'une application

1.1.1 Définition métrique et caractérisation topologique de la continuité

Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques et soit $f : X \to Y$ une application.

Définition 1.1. *On dit que f est* continue en $x_0 \in X$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad \big(d(x_0,x) < \delta \Longrightarrow d'(f(x_0), f(x)) < \varepsilon\big).$$

On dit que f est continue (sur X) *si f est continue en tout point de X.*

Proposition 1.1. *On a équivalence entre :*

(i) *L'application f est continue sur X.*

(ii) *L'image réciproque par f d'un ouvert de (Y,d') est un ouvert de (X,d).*

(iii) *L'image réciproque par f d'un fermé de (Y,d') est un fermé de (X,d).*

1.1.2 Caractérisation topologique de la continuité (preuve)

Preuve. Supposons que f est continue sur X et donnons-nous un ouvert U de Y.

Soit $x \in f^{-1}(U)$. Par définition, $y = f(x) \in U$ qui est ouvert. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que $B_Y(y,\varepsilon) \subset U$. La continuité de f en x nous assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$f(B_X(x,\delta)) \subset B_Y(y,\varepsilon) \subset U,$$

ce qui montre que

$$B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(U).$$

Par conséquent, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Inversement, supposons que l'image réciproque de tout ouvert de Y est un ouvert de X. Pour tout $x \in X$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'image réciproque de $B_Y(f(x),\varepsilon)$ par f est un ouvert de X qui contient x, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$B_X(x,\delta) \subset f^{-1}(B_Y(f(x),\varepsilon)).$$

Autrement dit, l'image de $B_X(x,\delta)$ par f est incluse dans $B_Y(f(x),\varepsilon)$, ce qui démontre la continuité de f au point x.

1.1.3 Caractérisation topologique de la continuité (preuve, suite)

L'équivalence entre (ii) et (iii) est une conséquence du fait que l'image réciproque du complémentaire d'une partie A dans Y est égale au complémentaire dans X de l'image réciproque de A, i.e.

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A).$$

Ce qui termine la démonstration. □

[1] Bertrand Rémy (École polytechnique). Palaiseau, 3 mai 2017.

1.1.4 Stabilités de la continuité

- La composée d'applications continues est aussi une application continue: si $f : X \to Y$ est continue au point $x \in X$ et si $g : Y \to Z$ est continue au point $f(x) \in Y$, alors $g \circ f$ est continue au point x.

- Si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont deux applications continues en $x \in X$, à valeurs dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ et si $\alpha, \beta : X \to \mathbf{K}$ sont deux fonctions continues en $x \in X$, alors $\alpha f + \beta g$ est continue en $x \in X$.

1.2. Renforcements de la continuité

1.2.1 Continuité uniforme

Définition 1.2. *Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques. Une application $f : X \to Y$ est dite* uniformément continue sur X *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \forall x,x' \in X, \quad \big(d(x,x') < \delta \Longrightarrow d'(f(x), f(x')) < \varepsilon\big).$$

Remarque. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0,+\infty[$ en vertu de l'inégalité

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x}\right| \leqslant \sqrt{|x' - x|},$$

pour tous $x, x' > 0$, mais la fonction continue $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}$.

1.2.2 Applications lipschitziennes

Définition 1.3. *On dit qu'une application $f : X \to Y$ définie entre deux espaces métriques, est* lipschitzienne *de rapport $k > 0$ (ou encore k-lipschitzienne) si*

$$d'(f(x), f(y)) \leqslant k\, d(x,y)$$

pour tous $x, y \in X$.

Une application lipschitzienne est uniformément continue car la distance entre deux points images est dans ce cas majorée par une fonction linéaire de la distance des points à la source.

1.2.3 La fonction distance est 1-lipschitzienne

Soit (X,d) un espace métrique et $x_0 \in X$. On a

$$d(x,x_0) - d(y,x_0) \leqslant d(x,y),$$

et en échangeant le rôle de x et de y, on conclut que

$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leqslant d(x,y).$$

Ceci montre que l'application $d(\cdot, x_0) : X \to \mathbf{R}$ est 1-lipschitzienne.

Cas particulier : dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, on a

$$\big|\|y\| - \|x\|\big| \leqslant \|y - x\|,$$

pour tous $x, y \in E$. Ceci montre que $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne.

1.3. Suites et continuité

1.3.1 Caractérisation séquentielle des applications continues

Proposition 1.2. *Soient (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques et $x \in X$. Une application $f : X \to Y$ est continue au point x si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x dans X, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right).$$

Preuve. Supposons que f est continue en x et soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite qui converge vers x.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $d(x_n,x) < \delta$ pour tout $n \geqslant n_0$, et donc $d'(f(x_n),f(x)) < \varepsilon$, pour tout $n \geqslant n_0$.

1.3.2 Preuve du critère séquentiel de continuité (suite)

Supposons que f n'est pas continue en x.

Il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $y \in X$ tel que

$$d(y,x) < \delta \qquad \text{et} \qquad d'(f(y),f(x)) \geqslant \varepsilon.$$

En prenant $\delta = 1/n$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$d(x_n,x) < 1/n \qquad \text{et} \qquad d'(f(x_n),f(x)) \geqslant \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x et la suite $(f(x_n))_{n\geqslant 1}$ ne converge pas vers $f(x)$. □

1.4. Continuité des applications linéaires

1.4.1 Critères de continuité pour les applications linéaires entre evn

Proposition 1.3. *Soient $(E,\|\cdot\|_E)$ et $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés et $L : E \to F$ une application linéaire. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'application linéaire L est continue sur E ;*

(ii) *l'application linéaire L est continue en 0 ;*

(iii) *il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\|L(x)\|_F \leqslant C\,\|x\|_E,$$

pour tout $x \in E$.

Remarque. Comme annoncé, le dernier critère est à rapprocher de la définition des normes subordonnées donnée au premier cours.

1.4.2 Preuve des critères de continuité pour les applications linéaires

Preuve. On suppose L continue en 0 (assertion la plus faible des trois). Il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, on ait :

$$\|x\|_E \leqslant \delta \qquad \Rightarrow \qquad \|L(x)\|_F \leqslant 1.$$

Par homogénéité, si $x \neq 0$ on a :

$$\|L(x)\|_F = \frac{\|x\|_E}{\delta}\cdot\left\|L\left(\frac{\delta}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F \leqslant \frac{1}{\delta}\cdot\|x\|_E.$$

Finalement, L étant linéaire, on peut écrire :

$$\|L(x)-L(y)\|_F = \|L(x-y)\|_F \leqslant C\,\|x-y\|_E,$$

ce qui montre que L est lipschitzienne (assertion la plus forte des trois). □

1.4.3 Espaces d'applications linéaires continues

On note $L(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E,F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires *continues* de E dans F.

Si $L \in \mathcal{L}(E,F)$, on peut définir

$$\|L\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x\in E-\{0\}} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|L(x)\|_F.$$

En particulier

$$\|L(x)\|_F \leqslant \|L\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,\|x\|_E.$$

On vérifie que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.

§2. Compacité

2.1. Notion de compacité

2.1.1 Notion de compacité

La compacité est une notion omniprésente dans tous les domaines des mathématiques.

Définition 2.1. *Soit (X,d) un espace métrique. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *De tout recouvrement de X par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement* **fini**.

(ii) *Toute famille de fermés de X d'intersection vide admet une sous-famille* **finie** *d'intersection vide.*

Si (X,d) possède les propriétés ci-dessus, on dit qu'il est compact
.

Justification. L'équivalence entre (i) et (ii) se fait par passage aux complémentaires :

une réunion d'ouverts $\displaystyle\bigcup_{i\in I} O_i = X$ devient une intersection de fermés $\bigcap_i$

où $F_i = X - O_i$, et vice versa. □

2.1.2 Motivation et exemples pour les espaces compacts

Motivation. Le grand intérêt de la compacité s'explique en partie parce que cette notion fournit des énoncés d'existence : la formulation (ii) ci-dessus est un énoncé d'existence très général qui se décline dans de multiples situations. Pour ce faire, il peut être utile de se ramener, dans (i) ou (ii), à des familles de parties ouvertes ou fermées avec de bonnes propriétés vis-à-vis de l'inclusion (croissance ou décroissance).

La compacité assure aussi l'existence de limites pour des (sous-)suites bien choisies (critère de Bolzano-Weierstrass).

Exemples. On va voir que toutes les parties fermées et bornées des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) sont des espaces compacts (pour la topologie induite par n'importe quelle norme).

En revanche, la question de la compacité de parties fermées et bornées dans $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie (par exemple des boules ou des sphères dans des espaces de fonctions) est plus délicate.

2.1.3 Non-exemple d'espace compact

Non-exemple : l'espace métrique $(]0,1[,|\cdot|)$ n'est pas compact.

Justification. Remarquer que l'on a une réunion *croissante* (et donc qu'une réunion partielle finie est un intervalle de la suite) :

$$]0,1[= \bigcup_{n\geqslant 3}]\tfrac{1}{n}, 1-\tfrac{1}{n}[.$$

et que, pour tout $n \geqslant 3$, l'intervalle $]\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}[$ est un ouvert *strict* de $(]0,1[,|\cdot|)$. □

Justification alternative. Remarquer que l'on a une intersection *décroissante* (et donc qu'une intersection partielle finie est un intervalle de la suite) :

$$\bigcap_{n\geqslant 2}]0, \tfrac{1}{n}] = \varnothing.$$

et que, pour tout $n \geqslant 2$, l'intervalle $]0, \frac{1}{n}]$ est un fermé *non vide* de $(]0,1[,|\cdot|)$. □

2.1.4 Caractérisation séquentielle des compacts

On dispose déjà de critères séquentiels pour vérifier la fermeture d'une partie et la continuité d'une application ; en voici un (célèbre) pour la compacité.

Théorème 2.1 (théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Soit (X,d) un espace métrique. Alors X est compact si, et seulement si, de toute suite d'éléments de X on peut extraire une sous-suite qui converge.*

Référence. On renvoie au polycopié de cours pour la preuve : théorème 3.1 p. 36. □

Exemple : $(]0,1[,|\cdot|)$ n'est pas compact.

Justification (encore une). La suite $(\frac{1}{n})_{n\geqslant 2}$ n'admet aucune sous-suite convergente dans $(]0,1[,|\cdot|)$. □

2.2. Sous-espaces compacts d'un espace métrique

2.2.1 Sous-espaces compacts d'un espace métrique quelconque

On part d'un espace métrique (X,d) et on se donne une partie Y de X. L'ensemble Y est un espace métrique pour la distance d_Y, restriction de d à $Y \times Y$ (et que parfois on notera encore d). La question de la compacité de Y pour la topologie induite par d est naturelle. Elle se pose en termes d'ouverts de Y pour la topologie induite, mais on peut se ramener aux ouverts de l'espace ambiant X :

Lemme 2.1. *Soit Y un sous-ensemble d'un espace métrique (X,d). Alors (Y,d_Y) est un espace compact si, et seulement si, de tout recouvrement de Y par des ouverts de X on peut extraire un sous-recouvrement fini de Y.*

Preuve. Découle du fait que les ouverts de (Y,d_Y) sont les traces des ouverts de (X,d). □

Terminologie. Si Y est un sous-ensemble d'un espace métrique (X,d), on dira que Y est un *compact* de X si (Y,d_Y) est un espace métrique compact pour la topologie induite.

2.2.2 Les parties compactes sont fermées

Proposition 2.1. *Soit (X,d) un espace métrique et soit $Y \subset X$ un compact de X, autrement dit une partie telle que (Y,d_Y) soit un espace métrique compact. Alors Y est fermé dans X.*

Preuve. Fixons $x \in X - Y$. Pour tout $y \in Y$, choisissons (grâce à la distance d) deux ouverts disjoints $U_{x,y}$ et $U_{y,x}$ contenant respectivement x et y. On extrait du recouvrement de Y par les $U_{y,x}$, pour $y \in Y$, un sous-recouvrement fini :

$$Y \subset V := \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i,x}.$$

Par construction, l'intersection finie $U := \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$ est un ouvert qui contient x et ne rencontre pas V. *A fortiori* U ne rencontre pas Y. Comme x était arbitraire dans $X - Y$, on voit donc que $X - Y$ est ouvert dans X. □

2.2.3 Intersections décroissantes d'espaces compacts

Proposition 2.2. *Soit (X,d) un espace métrique. Une intersection* décroissante *de compacts non vides de X est non vide.*

Preuve. Soit $(K_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de compacts, qu'on suppose décroissante (i.e. $K_{n+1} \subset K_n$) et d'intersection vide. Chaque K_n est fermé dans K_0 et l'intersection des K_n est, par hypothèse, vide. Par compacité, il existe donc une intersection partielle, *finie*, vide. Par décroissance de la suite de compacts, cela revient à dire qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ (par exemple le plus grand indice intervenant dans l'intersection partielle finie) tel que

$$\bigcap_{n=0}^{N} K_n = \varnothing.$$

En particulier $K_N = \varnothing$. Cela prouve la proposition par contraposition. □

2.3. Constructions d'espaces compacts

2.3.1 Parties fermées dans les espaces compacts

Proposition 2.3. *Soit (X,d) un espace métrique. Si X est compact et $Y \subset X$ est fermé, alors Y est compact pour la topologie induite.*

Preuve. On se doute que le critère le plus adapté à la situation est celui impliquant les fermés... Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de (Y,d) d'intersection vide. L'ensemble Y étant fermé, les F_i sont aussi des fermés de X. Par compacité de X, on peut donc extraire de la famille $(F_i)_{i\in I}$ une sous-famille finie d'intersection vide. □

Remarque. On va bientôt voir que le segment $[0;1]$ est un espace compact pour la distance de la valeur absolue : cela peut se voir par un argument de dichotomie, combiné au critère séquentiel de Bolzano-Weierstrass.

2.3.2 Images continues d'espaces compacts

Proposition 2.4. *L'image d'un compact par une application continue est un compact.*

Preuve. Soit (X,d) et (Y,d') des espaces métriques, soit $f : X \to Y$ une application continue et soit $Z \subset X$ un compact. On va utiliser ici le lemme précédent (sur la topologie induite), en se donnant $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $f(Z)$ par des ouverts de Y. Alors $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ est un recouvrement de Z par des ouverts de X :

$$Z \subset f^{-1}\big(f(Z)\big) \subset \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

Par compacité de Y, on peut en extraire un sous-recouvrement $Z \subset \bigcup_{j\in J} f^{-1}(V_j)$ avec $J \subset I$ fini. Finalement, on obtient bien un sous-recouvrement fini de $f(Z)$:

$$f(Z) \subset \bigcup_{j\in J} V_j.$$

□

2.3.3 Produit d'espaces métriques compacts

Si (X,d) et (X',d') sont deux espaces métriques, on peut munir l'espace produit $X \times X'$ de la *distance somme* :

$$d_s\big((x_1,x_1'),(x_2,x_2')\big) := d(x_1,x_2) + d'(x_1',x_2'),$$

ou bien de la *distance produit* (Lipschitz-équivalente à la précédente):

$$d_p\big((x_1,x_1'),(x_2,x_2')\big) := \max(d(x_1,x_2), d'(x_1',x_2')).$$

Corollaire 2.1. *Le produit $X \times Y$ de deux espaces métriques compacts (X,d) et (Y,d') (muni de la distance produit ou de la distance somme) est un espace métrique compact.*

Preuve. Soit $((x_n,y_n))_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $X \times Y$. La compacité de (X,d) permet d'extraire de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers x. La compacité de (Y,d') permet d'extraire de la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\geqslant 0}$, une sous-suite $(y_{\varphi(\psi(n))})_{n\geqslant 0}$ qui converge vers y. En particulier, (x,y) est une valeur d'adhérence de la suite $((x_n,y_n))_{n\geqslant 0}$. □

2.3.4 Compacité de $[0,1]$

Lemme 2.2. *On suppose $\mathbf{R}$ muni de la topologie usuelle, i.e. issue de la valeur absolue usuelle. Alors l'intervalle $[0,1]$ est un compact de $\mathbf{R}$.*

Preuve. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts qui recouvrent $[0,1]$. On note :

$$W := \{s \in [0,1] \,:\, [0,s] \text{ admet un recouvrement fini par des } U_i\}.$$

On a $W \neq \varnothing$ car $0 \in W$. De plus, par construction W est un sous-intervalle de $[0,1]$: donc $W = [0,c[$ ou $W = [0,c]$ pour $c = \sup W$.

Si $c < 1$, on remarque qu'il existe $j \in I$ tel que $c \in U_j$. L'ensemble U_j étant ouvert, on peut trouver $s < c < s'$ tels que $s,s' \in U_j$. En particulier $[0,s'] \subset W$ car on peut ajouter U_j au recouvrement fini de $[0;s]$: ceci contredit le fait que c est la borne supérieure de W. Ainsi $c = 1$ et on montre de même que $c \in W$. □

2.3.5 Compacts de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$

Proposition 2.5. *On munit $\mathbf{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Alors un sous-ensemble de $\mathbf{R}^N$ est compact si, et seulement si, il est fermé et borné.*

Preuve. Déjà, un compact X est un fermé. En outre X est nécessairement borné : autrement, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de X telle que $\|x_n\| \geqslant n$ (une telle suite ne peut pas admettre de sous-suite convergente dans $\mathbf{R}^N$).

Inversement, commençons par remarquer que pour tout $a > 0$ l'intervalle $[-a,a]$ est compact, comme image de $[0,1]$ par une fonction affine. De plus, le pavé $[-a,a]^N$ est un compact comme produit d'espaces compacts.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, un ensemble X est borné s'il est inclus dans un pavé $[-a,a]^N$, qui est compact. Si de plus X est fermé, c'est un fermé dans un compact, donc il est compact. □

2.4. Compacité et continuité, équivalence de normes

2.4.1 Bornes supérieure et inférieure d'une fonction continue

Théorème 2.2. *Une fonction continue à valeurs réelles, définie sur un espace métrique compact, est bornée et atteint ses bornes.*

Preuve. L'image d'un compact X par une application continue est un compact, donc un fermé borné de $\mathbf{R}$. En particulier $\inf_X f$ et $\sup_X f$ appartiennent à l'image de X par f. □

Remarque. On a vu qu'un espace métrique contient naturellement des fonctions continues, à savoir les fonctions partielles $d(x,\cdot)$ 《distance à un point》 : ce sont en effet des fonctions 1-lipschitziennes. Une variante de cette remarque permet de construire des ouverts disjoints contenant des fermés disjoints donnés au départ.

Un exemple similaire est fourni dans ce qui suit par les normes sur les espaces vectoriels.

2.4.2 Équivalence des normes en dimension finie

Théorème 2.3. *Toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes. Plus généralement, sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve. Soit $\mathcal{N}$ une norme quelconque sur $\mathbf{R}^N$. Pour un vecteur $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(x) &\leqslant \sum_{i=1}^N |x_i|\, \mathcal{N}(e_i) \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i)\right) \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{N} : (\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbf{R}, |\cdot|)$ est continue car

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leqslant \mathcal{N}(x-y) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i)\right) \|x-y\|_\infty.$$

2.4.3 Équivalence des normes en dimension finie, preuve

On note $S := \{x \in \mathbf{R}^N : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de $(\mathbf{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Au titre d'image réciproque d'un fermé par une fonction continue, S est fermé. Par définition, c'est une partie bornée dans $\mathbf{R}^N$, donc c'est un compact.

Par le théorème qui précède, $\mathcal{N}$ atteint ses bornes sur S et en particulier est minorée par $\mathcal{N}(x_0) > 0$ pour un certain $x_0 \in S$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}^N - \{0\}$, on peut écrire $x = \|x\|_\infty \dfrac{x}{\|x\|_\infty}$, l'intérêt étant que $\dfrac{x}{\|x\|_\infty} \in S$. On obtient alors :

$$\mathcal{N}(x) \geqslant \mathcal{N}(x_0)\,\|x\|_\infty,$$

par homogénéité de la norme.

Finalement, on a : $\mathcal{N}(x_0)\,\|x\|_\infty \leqslant \mathcal{N}(x) \leqslant \left(\sum_{i=1}^N \mathcal{N}(e_i)\right)\|x\|_\infty$ pour tout $x \in \mathbf{R}^N$. Ceci prouve que $\mathcal{N}$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes, et finalement que toutes les normes sur $\mathbf{R}^N$ sont équivalentes. ☐

2.4.4 Théorème de Borel-Lebesgue

Par définition, les parties bornées dans $\mathbf{K}^N$ sont les mêmes pour deux normes équivalentes. En outre, on a déjà vu que deux normes équivalentes donnent lieu à la même topologie. Par conséquent, l'équivalence de toutes les normes sur $\mathbf{K}^N$ implique que le fait d'être fermé (ou compact) ne dépend pas non plus de la norme choisie.

Corollaire 2.2 (théorème de Borel-Lebesgue)**.** *Sur $\mathbf{R}^N$ ou plus généralement sur $\mathbf{K}^N$ (indépendamment de la norme), les sous-ensembles compacts sont les fermés bornés.*

Preuve. Cela découle de ce qui précède et du fait que cela est connu pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. ☐

Remarque. Ce résultat est faux en dimension infinie : la boule unité fermée de $(\ell^\infty(\mathbf{N};\mathbf{K}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas compacte. Pour tout $n \geqslant 0$, définir $\mathbf{x}^n := (0,\dots,0,1,0,\dots)$, avec 1 seule valeur non nulle, pour l'indice n exactement. On a alors :

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^m\|_\infty = 1 \quad \text{si} \quad n \neq m \ \text{ : pas de sous-suite convergente.}$$

2.4.5 Continuité automatique d'applications linéaires

Proposition 2.6. *Si E est un espace vectoriel normé de* dimension finie *et F est un espace vectoriel normé, alors $L(E,F)$, l'espace des applications linéaires de E dans F coïncide avec $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.*

Preuve. Soit $(e_1,\dots,e_N)$ est une base de E, on note $\left\|\sum_{i=1}^N x_i e_i\right\|_E := \sup_{i=1,\dots,N} |x_i|$. La linéarité de L et l'inégalité triangulaire impliquent que, pour tout $x = \sum_{i=1}^N x_i e_i$, on a :

$$\begin{aligned}\|L(x)\|_F &\leqslant \sum_{i=1}^N |x_i|\,\|L(e_i)\|_F\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^N \|L(e_i)\|_F\right)\|x\|_E,\end{aligned}$$

d'où la continuité de L (avec majoration explicite de la constante de Lipschitz). ☐

2.4.6 Théorème de Heine

Proposition 2.7 (théorème de Heine)**.** *Soit f une application continue d'un espace métrique* compact (X,d) *dans un espace métrique (X',d'), alors f est uniformément continue.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n > 0$, on note

$$K_n := \left\{(x,x') \in X \times X : d(x,x') \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d'(f(x),f(x')) \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Pour chaque $n \geqslant 1$, la partie K_n est compacte (fermé dans $X \times X$ qui est compact), on a $K_{n+1} \subset K_n$ et

$$\bigcap_{n>0} K_n = \varnothing.$$

Donc, il existe $n_0 > 0$ tel que $K_{n_0} = \varnothing$. ☐

§3. Connexité

3.1. Notion de connexité

3.1.1 Notion de connexité

Définition 3.1. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que X est* connexe *s'il n'existe pas de sous-ensemble de X autre que $\varnothing$ et X qui soit à la fois ouvert et fermé.*

Typiquement, un *raisonnement de connexité* se met en place comme suit. Supposons qu'on ait à vérifier une certaine propriété, disons (P), pour tous les points d'un espace métrique connexe. Alors, on montre que l'ensemble des points de X qui satisfont (P) est : non vide, ouvert et fermé.

Exemple. On peut prouver ainsi que dans tout ouvert connexe non vide de $\mathbf{R}^N$, deux points sont toujours reliés par une ligne polygonale par morceaux.

3.1.2 Connexité et applications continues

Notons déjà que :

Un espace métrique (X,d) est connexe si, et seulement si, il n'existe pas de fonction continue non constante sur X à valeurs dans $\{0,1\}$.

Cela provient de ce que les images réciproques $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$ sont ouvertes et fermées.

Proposition 3.1. *L'image d'un espace métrique connexe par une application continue est connexe.*

Preuve. Soient (X,d) et (Y,d') des espaces métriques avec X connexe, soit $f : X \to Y$ une application continue. Supposons qu'il existe deux ouverts U et V de Y tels que $U \cap V \cap f(X) = \varnothing$ et $f(X) \subset U \cup V$. Par continuité $f^{-1}(U)$ et $f^{-1}(V)$ sont ouverts ; en outre, ils satisfont $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ et $f^{-1}(U \cap V) = \varnothing$. Ceci implique que $f^{-1}(U) = \varnothing$ soit $U \cap f(X) = \varnothing$, ou $f^{-1}(V) = \varnothing$ soit $V \cap f(X) = \varnothing$. ☐

3.1.3 Exemples d'espaces connexes

On peut prouver que $\mathbf{R}$ est connexe. En fait :

Proposition 3.2. *Les parties connexes de $\mathbf{R}$ sont les intervalles de $\mathbf{R}$.*

Cela découle du théorème des valeurs intermédiaires.

3.2. Connexité par arcs

3.2.1 Notion de connexité par arcs

Définition 3.2. *Un espace métrique (X,d) est connexe par arcs si deux points quelconques de X peuvent être reliés par un arc continu i.e. si*

$$\forall x,y \in X, \quad \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1];X) \quad \textit{tel que} \quad \gamma(0)=x \quad \textit{et} \quad \gamma(1)=y.$$

Proposition 3.3. *Si (X,d) est connexe par arcs alors (X,d) est connexe.*

Preuve. Si f est à valeurs dans $\{0,1\}$ et si x et y sont reliés par un arc continu γ, le théorème des valeurs intermédiaires impose à $f\circ\gamma$ de prendre la même valeur en 0 et 1. Donc f est constante. $\square$

On peut prouver que tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.