ÉCOLE POLYTECHNIQUE
UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY

Espaces métriques

1. Distances et normes

Soit X un ensemble et $d : X \times X \to \mathbf{R}^+$ une application.

Définition

On dit que d est une distance *sur X si :*

(i) *on a : $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$ (séparation) ;*

(ii) *pour tous $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie) ;*

(iii) *pour tous $x, y, z \in X$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).*

On dit alors que (X, d) est un espace métrique.

Exemple : sur tout ensemble non vide X, on peut définir la *distance discrète* par :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ 1 & \text{si} \quad x \neq y. \end{cases}$$

Normes et espaces vectoriels normés

Dans tout ce qui suit, $\mathbf{K}$ désignera le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels ou le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{N} : E \to \mathbf{R}^+$ une application.

Définition

On dit que $\mathcal{N}$ est une norme *sur E si :*

(i) *on a : $\mathcal{N}(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$ (séparation) ;*

(ii) *pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a : $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$ (homogénéité) ;*

(iii) *pour tous $x, y \in E$, on a : $\mathcal{N}(x + y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (inégalité triangulaire).*

On dit alors que $(E, \mathcal{N})$ est un espace vectoriel normé.

Lien avec ce qui précède. Un espace vectoriel normé $(E, \mathcal{N})$ est automatiquement un espace métrique : l'application de $E \times E \to \mathbf{R}^+$ qui envoie (x, y) sur $\mathcal{N}(x - y)$ est une distance sur E.

Normes équivalentes

Définition

On dit que deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$, définies sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, sont équivalentes s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$\mathcal{N}_1(x) \leqslant C_1 \mathcal{N}_2(x) \quad \textit{et} \quad \mathcal{N}_2(x) \leqslant C_2 \mathcal{N}_1(x) \quad \textit{pour tout} \quad x \in E.$$

Dans un cadre strictement métrique, on dit que deux distances d_1 et d_2, définies sur X, sont *Lipschitz-équivalentes* s'il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que

$$d_1(x,y) \leqslant C_1\, d_2(x,y) \qquad \text{et} \qquad d_2(x,y) \leqslant C_2\, d_1(x,y),$$

pour tous $x, y \in X$.

Si $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont des normes équivalentes sur un même $\mathbf{K}$-espace vectoriel, alors les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.

Normes standard sur $\mathbf{K}^N$

- Sur $\mathbf{K}^N$, les applications qui associent à $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ les nombres réels :

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \qquad \|x\|_2 := \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

  ou encore

$$\|x\|_\infty := \max_{i=1,\dots,N} |x_i|$$

  sont des normes (nous allons le vérifier pour $\| \cdot \|_2$).
- Tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet donc des normes, et peut donc être vu (de plusieurs façons différentes) comme un espace métrique.
- Nous verrons aussi que ces normes se généralisent à des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension infinie (espaces de suite, de fonctions) : faire des raisonnements de topologie sur des espaces fonctionnels est le point de départ de l'analyse avancée.

Rappel sur Cauchy-Schwarz

Revenons à l'affirmation : « $\|\cdot\|_2$ est une norme », afin de la démontrer.

Preuve. Supposons pour simplifier que $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Nous allons utiliser l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left|\sum_{i=1}^{N} x_i\, y_i\right| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On la démontre en observant que la fonction polynomiale de degré 2 en $t \in \mathbf{R}$ donnée par

$$t \mapsto \sum_{i=1}^{N} |x_i + t\, y_i|^2 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + 2\,t \sum_{i=1}^{N} x_i y_i + t^2 \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2,$$

ne change pas de signe ; par conséquent, son discriminant est négatif ou nul.

On a alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |x_i + y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + 2\sum_{i=1}^{N} x_i y_i + \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N} |x_i|^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^{N} |y_i|^2 \\
&= \left(\left(\sum_{i=1}^{N} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{N} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Ceci démontre l'inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|_2$.

Les deux autres axiomes de la définition d'une norme : séparation et homogénéité, sont faciles à vérifier.

Normes matricielles standard

Les espaces de matrices (ou d'applications linéaires) sont des exemples d'espaces vectoriels, sur lesquels les normes précédentes sont bien définies.

Plus précisément, pour tout entier $N \geqslant 1$, l'espace vectoriel $M_N(\mathbf{K})$ des matrices $N \times N$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ admet les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ définies par :

$$\|A\|_1 = \sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|, \qquad \|A\|_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{N} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\|A\|_\infty = \max_{i,j=1,\dots,N} |a_{ij}|,$$

où A désigne la matrice $(a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$.

Normes matricielles subordonnées

Dans le cas des espaces d'applications linéaires ou de matrices, il existe un autre procédé de fabrication de normes, à partir d'une norme pré-existante sur l'espace vectoriel sous-jacent.

Plus précisément : pour tout entier $N \geqslant 1$, étant donnée une norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbf{K}^N$, on peut définir sur $M_N(\mathbf{K})$ la *norme matricielle subordonnée à* $\mathcal{N}$ par

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbf{K}^N - \{0\}} \frac{\mathcal{N}(Ax)}{\mathcal{N}(x)}.$$

On dispose des définitions équivalentes

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathbf{K}^N \\ \mathcal{N}(x)=1}} \mathcal{N}(Ax) = \sup_{\substack{x \in \mathbf{K}^N \\ \mathcal{N}(x)\leqslant 1}} \mathcal{N}(Ax).$$

Inégalités pour les normes subordonnées

Par définition d'une norme subordonnée, on a :

$$\mathcal{N}(Ax) \leqslant \|A\| \, \mathcal{N}(x),$$

pour tout $x \in \mathbf{K}^N$.

On vérifie également que l'on a l'inégalité

$$\|A\,B\| \leqslant \|A\| \, \|B\|,$$

pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$.

Remarque : en dimension quelconque, chercher à donner un sens à la définition de norme subordonnée pour des applications linéaires entre espaces vectoriels normés conduit à introduire la condition de continuité pour ces applications.

Normes sur des espaces de suites

Exemples : par analogie avec le cas de dimension finie, on définit des normes sur des espaces de suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{K}$.

- Sur $\ell^\infty(\mathbf{N}; \mathbf{K})$, l'espace vectoriel des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bornées à valeurs dans $\mathbf{K}$, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_\infty := \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|.$$
- Sur $\ell^1(\mathbf{N}; \mathbf{K})$, l'espace des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geqslant 0}$ telles que la série de terme général $|x_n|$ converge, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|.$$
- Sur $\ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{K})$, l'espace des suites $\mathbf{x} = (x_n)_{n \geqslant 0}$ pour lesquelles la série de terme général $|x_n|^2$ converge, on définit la norme :
$$\mathbf{x} \mapsto \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Normes sur l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$

Exemple : Sur $\mathcal{C}([0,1]; \mathbf{K})$, on peut définir (encore par analogie) les normes

$$\|v\|_1 := \int_0^1 |v(x)| \,\mathrm{d}x, \qquad \|v\|_2 := \left(\int_0^1 |v(x)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$\|v\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |v(x)| \quad \text{(norme de la convergence uniforme).}$$

Preuve. Pour vérifier que $\|\cdot\|_2$ est une norme, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui s'exprime cette fois-ci sous la forme

$$\left|\int_0^1 u(t)\, v(t) \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^1 |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |v(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ensuite, la démonstration est identique à celle pour les normes standard sur $\mathbf{K}^N$. $\square$

Définition

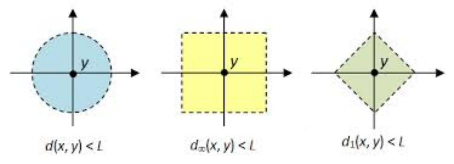
Si (X, d) *est un espace métrique, pour tout* $x \in X$ *et pour tout* $r > 0$*, on note*

$$B(x, r) := \{y \in X \ : \ d(x, y) < r\} \quad \textit{la boule ouverte}$$

et

$$B_f(x, r) := \{y \in X \ : \ d(x, y) \leqslant r\} \quad \textit{la boule fermée}$$

de centre $x \in X$ *et de rayon* $r > 0$*.*



Boules dans $\mathbf{R}^2$ pour les distances associées aux normes standard

Définition des ouverts

Définition

On dit que $U \subset X$ *est un* ouvert *de* (X, d) *si*

$$\forall x \in U, \quad \exists r > 0, \qquad B(x, r) \subset U.$$

On appelle topologie associée à la métrique d *l'ensemble de parties de* X *constitué des ouverts de* X.

- Les parties $\varnothing$, X sont des ouverts de (X, d).
- Pour tout $x \in X$ et $r > 0$, la boule $B(x, r)$ est un ouvert de (X, d). En effet, il découle de l'inégalité triangulaire que $B(y, r - |y - x|) \subset B(x, r)$.

Définition

On appelle voisinage *d'un point $x \in X$ (ou d'un ensemble $Y \subset X$) tout ensemble V qui contient un ouvert de (X, d) qui lui-même contient le point x (ou l'ensemble Y).*

Autrement dit, un voisinage d'un point $x \in X$ est une partie de X qui contient une boule ouverte centrée en x.

Exemples :

- Un ouvert est un voisinage de chacun de ses points.
- $[-1, 1[$ est un voisinage (ni ouvert, ni fermé) de 0 dans $(\mathbf{R}, |\ |)$.

Réunions quelconques d'ouverts

Proposition

Une ***réunion quelconque*** *d'ouverts est un ouvert de* (X, d).

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de (X, d) et $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

Il existe $j \in I$ tel que $x \in O_j$, qui est un ouvert. Donc, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i,$$

ce qui montre que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert. $\square$

Proposition

Une **intersection finie** *d'ouverts est un ouvert de* (X, d).

Preuve. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille finie d'ouverts de (X, d) et $x \in \bigcap_{i \in I} O_i$.

Pour tout $j \in I$, il existe $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j$. Notons $r := \inf_{i \in I} r_i$. La famille I est finie, donc $r > 0$.

Par construction $B(x, r) \subset O_i$ pour tout $i \in I$. Donc

$$B(x, r) \subset \bigcap_{i \in I} O_i,$$

ce qui montre que $\bigcap_{i \in I} O_i$ est un ouvert. $\square$

Définition des fermés

Définition

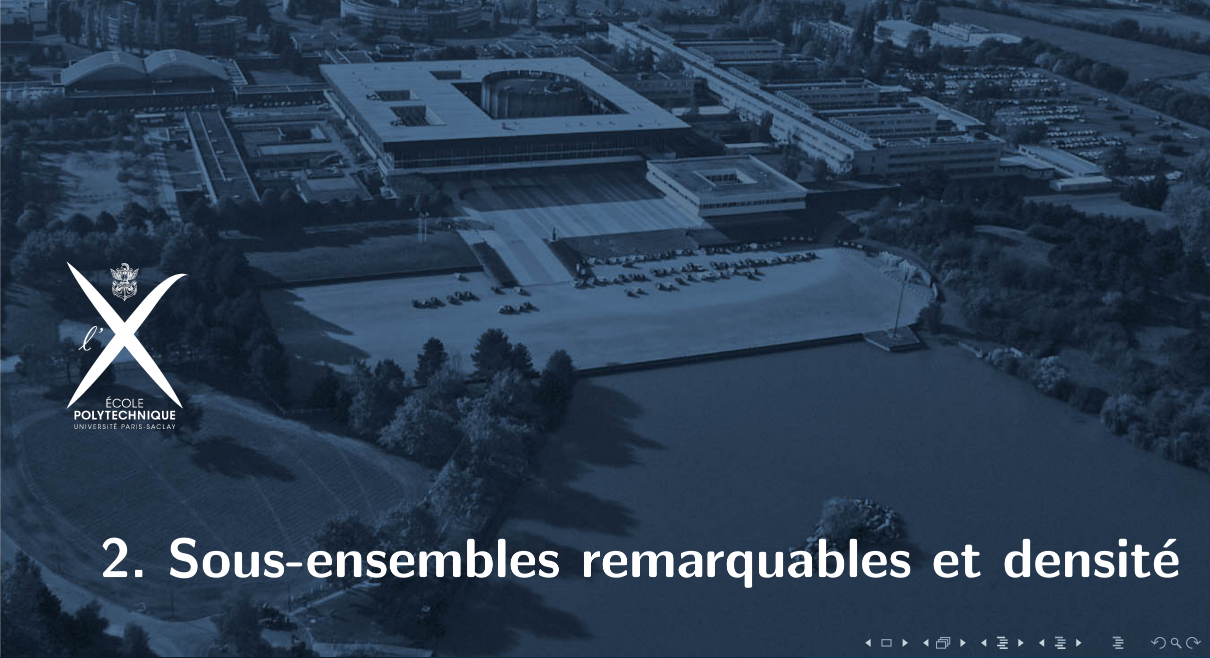
On dit que $F \subset X$ est un fermé *de (X, d) si son complémentaire $X - F$ est un ouvert de (X, d).*

- Les parties $\varnothing$ et X sont des fermés de (X, d).
- Une **réunion finie** de fermés est un fermé de (X, d).
- Une **intersection quelconque** de fermés est un fermé de (X, d).
- Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, la boule fermée $B_f(x, r)$ est un fermé de (X, d) : ceci se voit en utilisant l'inégalité triangulaire dans le complémentaire de la boule.

Topologie usuelle sur un intervalle réel

Exemple : On considère l'ensemble $[0,1[$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |y-x|$ et $a, b \in]0,1[$ tels que $a < b$. On vérifie que :

- les ensembles $[0,a[$, $]a,b[$ et $[0,1[$ sont des ouverts de $([0,1[\,,d)$;
- les ensembles $[0,a]$, $[a,b]$, $[0,1[$ et $\{a\}$ sont des fermés de $([0,1[\,,d)$;
- l'ensemble $[a,b[$ n'est ni un ouvert, ni un fermé de $([0,1[\,,d)$;
- les seuls sous-ensembles de $([0,1[\,,d)$ qui sont à la fois ouverts et fermés sont $\varnothing$ et $[0,1[$.



2. Sous-ensembles remarquables et densité

Notions d'intérieur et d'adhérence

Soit (X, d) un espace métrique et soit Y une partie de X.

Définition

L'intérieur de Y, noté $\mathring{Y}$, est le plus grand ouvert contenu dans Y, soit : $\mathring{Y} := \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset Y}} U$.

L'adhérence de Y, notée $\overline{Y}$, est le plus petit fermé contenant Y, soit : $\overline{Y} := \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ Y \subset F}} F$.

On dit que Y est dense dans X si son adhérence vaut X tout entier.

Exemple : Dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ on vérifie que

$$\overline{\mathbf{R} - \{0\}} = \mathbf{R}, \qquad \overline{\{x\}} = \{x\}, \qquad \overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}.$$

$$\overbrace{\mathbf{R} - \{0\}}^{\circ} = \mathbf{R} - \{0\}, \qquad \overbrace{\{x\}}^{\circ} = \varnothing, \qquad \mathring{\mathbf{Q}} = \varnothing.$$

Définition

On dit qu'une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ d'un espace métrique (X,d) est convergente, *de limite $x \in X$, si $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.*

Dans un espace métrique, la limite d'une suite, si elle existe, est unique.

Si une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ converge dans (X,d) vers x, on notera

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{ou} \qquad x_n \to x.$$

En général, le contexte est clair et la distance utilisée n'est pas mentionnée.

Caractérisation séquentielle des fermés

Proposition

Un sous-ensemble $F \subset X$ est fermé si, et seulement si, la limite de toute suite d'éléments de F, qui converge dans X, appartient à F.

Preuve. Supposons que F est un fermé et soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'éléments de F qui converge vers $x \in X$.

Supposons que $x \notin F$. L'ensemble $X - F$ est un ouvert. Donc, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset X - F$. Or, pour tout n assez grand, $d(x, x_n) < r$, donc

$$x_n \in B(x, r) \subset X - F,$$

ce qui contredit le fait que $x_n \in F$. Conclusion, $x \in F$.

Caractérisation séquentielle des fermés (suite)

Réciproquement, supposons que la limite de toute suite d'éléments de F qui converge dans X, appartient à F et prouvons que F est fermé.

Supposons le contraire. Alors $X - F$ n'est pas un ouvert et il existe $x \in X - F$ tel que, pour tout $r > 0$,

$$B(x, r) \cap F \neq \varnothing.$$

Pour tout $n \geqslant 1$, choisissons $x_n \in F \cap B(x, 1/n)$.

La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de F qui converge vers x et $x \notin F$. Ce qui constitue une contradiction. $\square$

Suites et adhérence

Proposition

L'adhérence d'un ensemble $Y \subset X$ dans (X, d) est égale à l'ensemble des limites de suites convergentes d'éléments de Y. Ainsi, Y est dense dans X si tout élément de X est limite d'une suiite de points de Y.

Preuve. On note $\tilde{Y}$ l'ensemble des limites de suites d'éléments de Y ; déjà $Y \subset \tilde{Y}$.

Soit $\tilde{y} \in \tilde{Y}$ et F un fermé qui contient Y. Il existe une suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ d'éléments de Y qui converge vers $\tilde{y}$, donc $\tilde{y} \in F$. On conclut que $\tilde{Y} \subset F$ et par conséquent que $\tilde{Y} \subset \overline{Y}$.

Montrons que $\tilde{Y}$ est un fermé, ce qui montrera que $\overline{Y} \subset \tilde{Y}$.

Soit $(\tilde{y}_n)_{n \geqslant 1}$, une suite d'éléments de $\tilde{Y}$ qui converge vers $\tilde{y} \in X$. Pour tout $n \geqslant 1$, le point $\tilde{y}_n \in \tilde{Y}$ est la limite d'une suite d'éléments de Y, donc il existe $y_n \in Y$ tel que $d(y_n, \tilde{y}_n) \leqslant 1/n$. La suite $(y_n)_{n \geqslant 1}$, qui est une suite d'éléments de Y, converge vers $\tilde{y}$. Par définition de $\tilde{Y}$, ceci prouve que $\tilde{y} \in \tilde{Y}$, et donc que $\tilde{Y}$ est un fermé. $\square$

Voisinages des points adhérents

Proposition

L'adhérence d'un ensemble $Y \subset X$ dans (X, d) est égale à l'ensemble des $x \in X$ tels que, $Y \cap B(x, \varepsilon) \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Preuve. On note $\hat{Y}$ l'ensemble des $x \in X$ tels que, $B(x, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Soit $x \in \hat{Y}$. Pour tout $n \geqslant 1$, choisissons $x_n \in Y \cap B(x, 1/n)$. La suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite d'éléments de Y qui converge vers x, donc $x \in \overline{Y}$.

Inversement, tout élément $x \in \overline{Y}$ est la limite d'une suite d'éléments de Y. En particulier, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B(x, \varepsilon)$ contient des éléments de cette suite, donc des éléments de Y. Donc $x \in \hat{Y}$. □

Valeurs d'adhérence et suites extraites

Définition

Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de (X, d). Un point $a \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ si a est limite d'une suite extraite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$.

Rappel : on dit que $(y_n)_{n\geqslant 0}$ est une *suite extraite* (ou une *sous-suite*) de la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$, s'il existe $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, strictement croissante, telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exemple : Dans $\mathbf{R}$ muni de la distance usuelle, la suite

$$((-1)^n)_{n\geqslant 0}$$

admet exactement deux valeurs d'adhérence (à savoir -1 et 1), mais aucune limite.

Adhérence et valeurs d'adhérence

Proposition

Le point $x \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \geqslant 0}$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\mathrm{card}\,\{k \in \mathbf{N} \,:\, x_k \in B(x, \varepsilon)\} = +\infty,$$

où $\mathrm{card}(A)$ désigne le cardinal d'un ensemble A.

Dans le même ordre d'idées, si Y est une partie d'un espace métrique (X, d) alors l'adhérence $\overline{Y}$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence des suites à valeurs dans Y.