MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 9 : Espaces de Hilbert – analyse.

Exercices à préparer pour la séance du 30 juin 2017:
exercices 1, 2, 4 et 6

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$.
1) Montrer que $\|A^*\| = \|A\|$.
2) Montrer que $(A\,B)^* = B^*\,A^*$.
3) Montrer que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$ et que $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Ker}(A^*)^\perp$.
4) Montrer que A est inversible (i.e. A est bijective et A^{-1} est une application linéaire continue) si et seulement si A^* est inversible.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel.

1) Déterminer une expression de la projection sur la boule-unité fermée de H.

2) On suppose H séparable de dimension infinie. Prouver que sa boule-unité n'est pas compacte.

Exercice 3. Soit $H = \mathrm{L}^2([0,1]; \mathbf{R})$. Pour tout $f \in H$, on pose

$$Tf(x) = \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que T est une application continue de H dans H.
2) Déterminer T^* l'adjoint de T.

Exercice 4. Soit K une fonction de $\mathrm{L}^2([0,1]^2; \mathbf{C})$. On considère l'opérateur T_K défini par

$$T_K(f)(x) = \int_{[0,1]} K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

de $\mathrm{L}^2([0,1], \mathbf{C})$ dans lui-même.
1) Déterminer T_K^*, l'adjoint de T_K.
2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur K pour que T_K soit auto-adjoint (i.e. $T_K^* = T_K$).

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. On suppose que H admet une base hilbertienne, disons $(e_n)_{n\geqslant 0}$ (de façon équivalente d'après le cours, on suppose que H est séparable). Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Montrer que la partie

$$\left\{ x \in H \;:\; x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, e_n \text{ avec } |x_n| \leqslant a_n \right\}$$

est un compact de H.

Exercice 6. Soit $f \in \mathrm{L}^2(S^1; \mathbf{C})$.

Remarque : la notation S^1 signifie qu'on considère des fonctions d'une variable réelle, 2π-périodiques (et à valeurs complexes).

1) Montrer que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x,$$

les coefficients de Fourier de f, tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.
2) On suppose maintenant que $f \in \mathrm{L}^1(S^1; \mathbf{C})$, montrer que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R})$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

Montrer que l'application $A : f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)\, dt$ est une forme linéaire continue, mais qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $A(f) = \langle f, g\rangle$ pour tout $f \in E$.

Exercice 8. Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbf{N}; \mathbf{R})$. Montrer que

$$\{x \in H : \quad \forall n,\ |x_n| \leqslant |a_n|\}\,,$$

est un compact de H.

Exercice 9. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. On suppose que $\|T\|_{\mathcal{L}} \leqslant 1$.
1) Montrer que, si $x \in H$, alors $T\,x = x$ si et seulement si $\langle T\,x, x\rangle = \|x\|^2$. En déduire que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.
2) Montrer que $(\mathrm{Im}(I - T))^\perp = \ker(I - T)$. En déduire que

$$H = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T)}.$$

3) Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$S_n = \frac{\mathrm{Id} + T + \ldots + T^{n-1}}{n}.$$

Montrer que, pour tout $x \in H$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n\, x = P\, x,$$

où P est la projection orthogonale sur $\ker(\mathrm{Id} - T)$.

Exercice 10. Théorème de Peter Neumann

Soit G un groupe de permutations de $\mathbf{N}$. On suppose que toute les orbites de G sont infinies : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\{g(n);\ g \in G\}$ est infini. Le but de cet exercice est de montrer que, pour toute partie finie $B \subset \mathbf{N}$, il existe g dans G qui déplace B : $g(B) \cap B = \varnothing$.

On note H l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbf{N})$. Pour tout g dans G et u dans H on note $I_g(u)$ la suite $I_g(u)_n = u_{g^{-1}(n)}$.

1) Montrer que $I_g(u)$ est dans H et que I_g est un isomorphisme isométrique de H.

2) Montrer que si $I_g(u) = u$ pour tout g alors $u = 0$.

On fixe maintenant $B \subset \mathbf{N}$ fini. On note

$$C_0 = \{u \in H;\ \langle u, \mathbf{1}_B \rangle \geq 1\},$$

$$G \cdot \mathbf{1}_B = \{I_g(\mathbf{1}_B);\ g \in G\}$$

et on note C l'adhérence de l'enveloppe convexe de $G \cdot \mathbf{1}_B$ (cette dernière est, par définition, l'intersection de tous les convexes contenant $G \cdot \mathbf{1}_B$).

3) Montrer que C_0 est un convexe fermé et que, pour g dans G, $g(B) \cap B \neq \varnothing$ si et seulement si $I_g(\mathbf{1}_B)$ est dans C_0.

4) Montrer que C est un convexe fermé et que $I_g(C) \subset C$ pour tout g.

5) Montrer que C contient un unique vecteur de norme minimale et conclure.

Exercice 11. Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ l'espace des suites $(x_n)_{n \geqslant 1}$ dans $\mathbf{K}$ vérifiant $\sum_{n \geqslant 1} a_n |x_n|^2 < +\infty$. Alors $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ est un espace vectoriel. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$, la série de terme général $a_n \bar{x}_n y_n$ est absolument convergente. Sa somme sera notée $\langle | \rangle_{\mathbf{a}}$. $\langle | \rangle_{\mathbf{a}}$ est une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne et positive. À quelles conditions (nécessaires et suffisantes) sur $\mathbf{a}$ est-ce un produit scalaire hermitien ? Le sous-espace $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ est dense dans $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ et $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 12. Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n \geqslant 1}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n \geqslant 1}$ deux suites dans $\mathbf{R}_+$ et reprenons les espaces $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$, $\ell^2_{\mathbf{b},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ de l'exercice précédent. À quelles conditions sur $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, l'application identité de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ se prolonge t-elle en une application linéaire continue de $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ dans $\ell^2_{\mathbf{b},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$? À quelles conditions ce prolongement est-il un isomorphisme ? Ce prolongement est il injectif ? À quelles conditions est-il surjectif ? À quelles conditions son image est-elle fermée ? En déduire une application linéaire continue injective et d'image dense mais pas surjective entre deux espaces de Hilbert.

Exercice 13. Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert et soit Φ une forme sesquilinéaire continue sur H, qu'on suppose *coercive*, i.e. telle qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle :

$$\Phi(v, v) \geqslant C \, \| v \|^2$$

pour tout $v \in H$. Montrer que l'opérateur continu qui représente Φ est bijectif, d'inverse continu.