**MAT 311** **2017**

**Introduction à l'analyse réelle**

**Feuille d'exercices # 8 : Espaces de Hilbert – géométrie.**
Exercices à préparer pour la séance du 23 juin 2017:
exercices 1, 2, 3 et 4

**Exercice 1.** Soit $\langle\ ,\ \rangle$ un produit hermitien sur $H$, un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. On veut montrer qu'il existe $e_1, \dots, e_n$, une base de $H$, dans laquelle

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}, \quad \text{si} \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \quad \text{et} \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i\, e_i.$$

1) Montrer que le résultat est vrai lorsque $\dim H = 1$.
2) Montrer que si $H$ est de dimension $n \geqslant 1$ il existe $e_1$ tel que $\langle e_1, e_1\rangle = 1$. Montrer que

$$(\mathbf{C}e_1)^{\perp} = \{x \in H\ :\ \langle x, e_1\rangle = 0\},$$

est un espace de dimension $n-1$ et que la restriction de $\langle\cdot,\cdot\rangle$ à $(\mathbf{C}e_1)^{\perp}$ est un produit hermitien. Conclure.

**Exercice 2.** On considère l'espace de Hilbert $H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$ muni de la forme hermitienne

$$(f, g)_H = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\overline{g(x)}\, e^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

On veut montrer que les fonctions polynômes (à valeurs dans $\mathbf{C}$) forment un sous-espace vectoriel dense de $H$. Pour $f \in H$, on pose :

$$F(z) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{zt-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que la fonction $F$ est bien définie et admet un développement en série entière convergeant sur $\mathbf{C}$, à savoir

$$F(z) = \sum_{j=0}^{+\infty} \Big(\frac{z^j}{j!} \int_{\mathbf{R}} f(t) t^j e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\Big).$$

2) On suppose que $f$ est orthogonale pour le produit hermitien $(\cdot,\cdot)_H$ à l'espace engendré par les fonctions polynômes. Montrer que $F \equiv 0$ et donc que $F(ix) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3) Montrer que $f = 0$ et conclure.

**Exercice 3.** On considère l'espace de Hilbert $H = \mathrm{L}^2(\mathbf{R}, e^{-x^2}\mathrm{d}x)$. On définit les *polynômes d'Hermite* :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(e^{-x^2}),$$

ainsi que les *fonctions d'Hermite* :

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\, H_n(x).$$

1) Montrer que $H_n$ est un polynôme de degré $n$, de coefficient dominant $2^n$, et qu'il est orthogonal (pour le produit hermitien de $H$) à l'espace vectoriel engendré par les polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$.

2) Montrer que
$$\int_{\mathbf{R}} \psi_n(x)\, \psi_m(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$
3) Montrer que $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$ et que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H_n = 2nH_{n-1}$.

4) Montrer que
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right) \psi_n = 2n\psi_{n-1} \qquad \text{et que} \qquad \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x\right) \psi_n = \psi_{n+1}.$$
En déduire que $\left(-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2\right) \psi_n = (2n+1)\psi_n$. Retrouver le résultat de la question 2).

5) Calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |\psi_n(x)|^2\, \mathrm{d}x$. Conclure.

**Exercice 4.** On considère dans $\ell^2(\mathbf{Z}; \mathbf{R})$ l'ensemble
$$F = \{(x_n)_{n \in \mathbf{Z}} \ : \ |x_n| \leqslant 1\}.$$
1) Montrer que $F$ est un convexe fermé.

2) Déterminer la projection d'un élément de $\ell^2(\mathbf{Z}; \mathbf{R})$ sur $F$.

**Exercice 5.** 1) On note $S : \ell^2(\mathbf{N}) \to \ell^2(\mathbf{N})$ l'application définie par
$$S\big((x_n)_{n \geqslant 0}\big) = (x_{n+1})_{n \geqslant 0}.$$
Déterminer l'adjoint $S^*$ de $S$.

2) Même question avec l'application $T : \ell^2(\mathbf{N}) \to \ell^2(\mathbf{N})$ définie par
$$T\big((x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots)\big) = (0, x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \ldots).$$

**Exercice 6.** Soit $E = \mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R})$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire
$$\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t.$$
Pour tout $p \geqslant 0$ et pour tout $a \in ]0, 1[$, on définit l'application
$$A(f) = \int_{[0,a]} t^p\, f(t)\, \mathrm{d}t.$$
1) Montrer que $A$ est une forme linéaire continue sur $E$ et calculer sa norme.

2) Montrer qu'il n'existe pas d'élément $g$ de $E$ tel que $A(f) = \langle f, g \rangle$ pour tout $f \in E$.

**Exercice 7.** Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert.

1) Soit $z \in H$ non nul. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique scalaire $z \in \mathbf{C}$ tel que $x - cz$ et $z$ soient orthogonaux.

2) Soit $\{z_l\}_{1 \leqslant l \leqslant n}$ une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux dans $H$. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe une unique famille de scalaires $\{c_l\}_{1 \leqslant l \leqslant n}$ telle que $x - \displaystyle\sum_{l=1}^{n} c_l z_l$ et $z_k$ sont orthogonaux pour tout $k$.

**Exercice 8.** Soient $H_1$ et $H_2$ des espaces de Hilbert (dans lesquels la norme et le produit scalaire seront notés de la même façon). Soit $\Phi : H_1 \to H_2$ une application linéaire.

1) Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\| \Phi(x) \| = \| x \|$ pour tout $x \in H_1$ ;

(ii) $\langle \Phi(x) | \Phi(y) \rangle = \langle x | y \rangle$ pour tous $x, y \in H_1$.

On dit alors que $\Phi$ est une *isométrie linéaire*. Justifier qu'une telle isométrie linéaire est nécessairement injective.

2) On suppose que $\Phi : H_1 \to H_2$ est une isométrie linéaire. Montrer que :

a) Pour le produit scalaire de $H_2$, l'image de $\Phi$ est un espace de Hilbert.

b) Si $E_1$ est un sous-espace vectoriel dense de $H_1$, alors $\Phi(E_1)$ est dense dans $\Phi(H_1)$.

c) Si $(e_j)$ est une base hilbertienne de $H_1$, alors son image par $\Phi$ est une base hilbertienne de $\Phi(H_1)$.

**Exercice 9.** Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert.

1) Soit $(A_n)_{n \geqslant 1}$ une suite décroissante de parties convexes fermées bornées non vides de $H$. Soit $x_0 \in H$ non contenu dans $A_1$. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ des projections de $x_0$ sur les $(A_n)_{n \geqslant 1}$ est de Cauchy. En déduire que $\displaystyle\bigcap_{n \geqslant 1} A_n$ n'est pas vide.

2) Soit $A$ un convexe fermé borné non vide de $H$ et soit $B$ un convexe fermé non vide de $H$ disjoint de $A$. Montrer qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$\| a - b \| = \inf_{x \in A, y \in B} \| x - y \| .$$

**Exercice 10.** Montrer que dans un espace de Hilbert, l'application de projection métrique sur une partie convexe fermée non vide est 1-lipschitzienne.

**Exercice 11.** Soit $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace de Hilbert. Soient $V$ un sous-espace vectoriel fermé de $H$ et $x_0$ un point hors de $V$.

1) Trouver une relation entre $d(x_0, V)$ et la norme de la forme linéaire sur $V$ définie par $v \mapsto \langle x_0 | v \rangle$.

2) Étudier l'exemple où $H = \mathrm{L}^2([0;1], \mathrm{d}t)$, où

$$V = \{ f \in H | \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \}$$

et où $x_0$ est la fonction identité $t \mapsto t$.

**Exercice 12.** Soient $x_1, x_2, \dots x_n$ des vecteurs linéairement indépendants dans un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$, engendrant un sous-espace vectoriel noté $V$. On note $P_V : H \to V$ la projection orthogonale correspondante et pour $x \in H$, on note $P_V(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

1) Écrire un système d'équations linéaires déterminant les $\lambda_i$, montrer que le déterminant $G(x_1, x_2, \dots x_n)$ de la matrice $[\langle x_i | x_j \rangle]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est non nul et calculer les $\lambda_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

2) Ajouter au système précédent une équation faisant intervenir $d(x, V)^2$ et les $\lambda_i$, et montrer que

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x, x_1, x_2, \ldots x_n)}{G(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

3) Calculer la distance de $t \mapsto t^3$ au sous-espace engendré par $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t$ dans $\mathrm{L}^2([0; 1], \mathrm{d}t)$.