MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 7 : Techniques de calcul intégral.
Exercices à préparer pour la séance du 16 juin 2017:
exercices 1, 3, 5 et 6

Exercice 1. On note $C :=]-1,1[\times]-1,1[$ et on considère la fonction f définie sur $C - \{(0,0)\}$ par la formule

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

1) Les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont-elles intégrables sur $]-1,1[$ pour $y \neq 0$ et $x \neq 0$ respectivement ? Calculer

$$\int_{]-1,1[} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{]-1,1[} f(x,y)\,dy \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

2) Calculer

$$\int_{]-1,1[} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{]-1,1[} |f(x,y)|\,dy \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

3) La fonction f est-elle intégrable sur C ?

Exercice 2. On considère la fonction g définie sur $]0,1[\times]0,1[$ par la formule

$$g(x,y) := \begin{cases} +2^{2n} & \text{si} \quad 2^{-n} < x < 2^{-n+1} \quad \text{et} \quad 2^{-n} < y < 2^{-n+1}, \quad n \geqslant 1 \\ -2^{2n+1} & \text{si} \quad 2^{-1-n} < x < 2^{-n} \quad \text{et} \quad 2^{-n} < y < 2^{1-n}, \quad n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer

$$\int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} g(x,y)\,\mathrm{d}x \right) dy \quad \text{et} \quad \int_{]0,1[} \left(\int_{]0,1[} g(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

2) Expliquer le résultat.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions positives et mesurables sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$.
1) Calculer

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \big(f(x)g(y) - f(y)g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

en fonction de

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

2) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $]0, +\infty[$. Calculer

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} \,\mathrm{d}x,$$

pour tous $a, b > 0$.

Exercice 5. Produit de convolution Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.
1) Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^N$. Montrer que la fonction $f \star g$ définie p.p. sur $\mathbf{R}^N$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\, g(y) \,\mathrm{d}y,$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^N$.

2) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^N} (f \star g)(x) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) \,\mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}^N} g(x) \,\mathrm{d}x.$$

3) Vérifier que, pour tous $f, g, h \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$, l'on a

$$f \star g = g \star f \qquad \text{et} \qquad f \star (g \star h) = (f \star g) \star h \quad \text{p.p. sur } \Omega\,.$$

Exercice 6. 1) Montrer que $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$

2) On veut calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Effectuer dans l'intégrale précédente le changement de variables $x = u - v$, $y = u + v$, puis poser $u = \cos t$.

Exercice 7. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

3) $h : x \mapsto x\, e^{-x^2/2}$.

Exercice 8. Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$. On rappelle que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.
1) Montrer que $\widehat{f \star g} = \hat{f}\, \hat{g}$.

2) Pour tout $a > 0$, on pose

$$G_a(x) := \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}} e^{-|x|^2/2a}\,, \quad \forall x \in \mathbf{R}^N.$$

Calculer $G_a \star G_b$ pour tous $a, b > 0$.

3) Peut-on trouver $f \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ telle que $f \star g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$?

4) Peut-on trouver $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (i.e. dans $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$) et $f \star g = 0$?

5) Résoudre dans $L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$ l'équation $f \star f = f$, d'inconnue f.

Exercice 9. 1) Donner un exemple de fonction f intégrable sur $\mathbf{R}^N$ et à valeurs réelles, telle que f et $\hat{f}$ soient p.p. strictement positives sur $\mathbf{R}^N$.
2) Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbf{R}^N$ et à valeurs complexes, on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Calculer la transformée de Fourier de $\tilde{f}$, puis de $f \star \tilde{f}$ (utiliser la question 1) de l'exercice 10).
3) Reprendre la question 1) à la lumière du résultat de la question 2).

Exercice 10. Soit $P \subset \mathbf{R}^N$. Montrer que $\mathbf{1}_P$ est p.p. égale à une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini, si et seulement si P est négligeable.

Exercice 11. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Supposons qu'il existe $K \subset \mathbf{R}$ compact tel que $f(x) = 0$ p.p. sur $\mathbf{R} - K$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ admet un prolongement à $\mathbf{C}$ qui est développable en série entière en tout point de $\mathbf{C}$.

Exercice 12. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, on note $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
1) Soit $E(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|}$, montrez que $E \in L^1(\mathbf{R}^3)$.

2) On dit que $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbb{C}$ est à symétrie sphérique si la valeur de $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, ou de manière équivalente si pour toute rotation R de $\mathbf{R}^3$, $f(Rx) = f(x)$. Montrez que si $f \in L^1(\mathbf{R}^3)$ est à symétrie sphérique, alors $\hat{f}$ aussi.

3) Calculez $\widehat{E}$. On fera le calcul en coordonnées sphériques en choisissant $\xi = ae_3$.