

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 6 : Intégration des fonctions mesurables.

Exercices à préparer pour la séance du 9 juin 2017:
exercices 1, 2, 4 et 6

Sauf mention du contraire, les fonctions sont à valeurs dans \mathbf{R} .

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$, où

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0, n]},$$

est une suite croissante.

2) Déterminer, pour tout $x \geq 0$, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

3) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$, la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$a_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x} dx,$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que $e^x \geq \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour tout $x > 0$.

2) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$, la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$b_n := \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx,$$

et calculer sa limite éventuelle.

Exercice 3. Soit (f_n) une suite de fonctions positives dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = 0.$$

Montrer que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \text{ pour presque tout } x.$$

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.

1) On suppose que la fonction f est uniformément continue. Montrer que $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$.

2) On suppose simplement que la fonction f est continue. A-t-on nécessairement $f(x) \rightarrow 0$ lorsque $|x| \rightarrow +\infty$?

Exercice 5. Trouver une suite de fonctions positives $(f_n)_{n \geq 0}$ dans $\mathcal{L}^1([0, 1])$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} f_n(x) dx = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = +\infty \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

Peut-on trouver une telle suite avec f_n continues? Peut-on remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par \mathbf{R} ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction telle que $f(x+1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une fonction $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$ telle que $F(x+1) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $f = F$ p.p. sur \mathbf{R} .

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert non vide et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$ telle que

$$\left| \int_{\Omega} f(x) dx \right| = \int_{\Omega} |f(x)| dx.$$

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ telle que $f(x) = |f(x)|e^{i\theta}$ pour presque tout $x \in \Omega$.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et tout $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}.$$

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série de $\sum_{n \geq 1} u_n(x)$ est absolument convergente.

Calculer la somme de cette série.

b) Calculer

$$\sum_{n \geq 1} \left(\int_{]0, +\infty[} u_n(x) dx \right) \quad \text{et} \quad \int_{]0, +\infty[} \left(\sum_{n \geq 1} u_n(x) \right) dx.$$

c) Comment expliquez-vous le résultat du b) ?

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ et $a < b$. Calculer

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} f(y) \mathbf{1}_{[a,b]}(x-y) dy.$$

Exercice 10. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions positives dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ qui converge presque partout vers une fonction f qui appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Supposons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x) dx = \int_{\mathbf{R}} f(x) dx.$$

Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

Exercice 11. Soit $p \geq 1$ et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. On suppose que $|f_n|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et qu'il existe une fonction f définie sur Ω telle que $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ p.p. sur Ω . On suppose enfin que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f_n(x)|^p dx = \int_{\Omega} |f(x)|^p dx.$$

1) Montrer que

$$2^{p-1} (|f|^p + |f_n|^p) - |f_n - f|^p \geq 0.$$

2) Montrer que

$$\int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)|^p dx \rightarrow 0$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 12. On veut prouver une version simple mais souvent suffisante du théorème de convergence dominée. On se donne (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions intégrables telles que :

- (i) pour tout $x \in X$, la suite des $f_n(x)$ est convergente, disons de limite $f(x)$;
- (ii) il existe une fonction μ -intégrable g telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \geq 0$.

On veut voir que f est alors intégrable et qu'on a l'interversion $\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$.

1) Justifier que f est intégrable et qu'il suffit de voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f - f_n| d\mu = 0$.

2) Conclure en utilisant la suite des fonctions $2g - |f - f_n|$.