MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 5 : Théorie de la mesure.

Exercices à préparer pour la séance du 2 juin 2017:
exercices 1, 5, 7 et 11

Exercice 1. Soient X et Y des ensembles et soit $f : X \to Y$ une application. On se donne $\mathscr{F}$ une collection de parties de Y. On veut montrer que l'image réciproque par f de la tribu engendrée par $\mathscr{F}$ est la tribu de X engendrée par les images réciproques par f des éléments de $\mathscr{F}$; autrement dit : $f^{-1}\big(\mathscr{T}(\mathscr{F})\big) = \mathscr{T}\big(f^{-1}(\mathscr{F})\big)$.

1) Montrer que $\mathscr{T}\big(f^{-1}(\mathscr{F})\big) \subset f^{-1}\big(\mathscr{T}(\mathscr{F})\big)$.

2) En utilisant l'ensemble des parties B de Y telles que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}\big(f^{-1}(\mathscr{F})\big)$, prouver l'inclusion réciproque.

3) Justifier qu'une application continue entre espaces métriques est mesurable pour les tribus boréliennes.

Exercice 2. Prouver que $\mathbf{R} \times \{0\}$ est négligeable dans $\mathbf{R}^2$. On pourra « découper » convenablement le problème.

Exercice 3. Soit $\lambda \in]0,1[$ un nombre réel et E_λ l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} \varepsilon_n \lambda^n,$$

où $(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbf{N}}$.
1) Que peut-on dire de l'ensemble E_λ quand $\lambda \geqslant 1/2$?
2) Calculer la mesure de E_λ quand $\lambda < 1/2$.

Exercice 4. Existe-t-il deux ensembles de mesure nulle $A \subset [0,1]$ et $B \subset [0,1]$ tels que $A + B = [0,1]$? (rappel : $A + B = \{a + b \,:\, a \in A, \quad b \in B\}$).

Exercice 5. On considère l'intervalle $[0;1]$.
1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert dense dans $[0,1]$, disons O_ε, tel que $|O_\varepsilon| < \varepsilon$.

2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé d'intérieur vide, disons F_ε, tel que $|F_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$.

3) Existe-t-il dans $[0,1]$, un fermé d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue 1 ?

Exercice 6. Dans cet exercice, la mesure de Lebesgue est définie à partir de l'intégrale de Lebesgue. Il s'agit de retrouver des propriétés élémentaires des mesures au moyen de théorèmes d'intégration.

Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une suite dénombrable de sous-ensembles mesurables de $\mathbf{R}^N$.

1) On suppose la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ croissante. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |A_n| = \left|\bigcup_{n\geqslant 0} A_n\right|.$$

2) On suppose la suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ décroissante et l'on suppose de plus que $|A_0| < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} |A_n| = \left|\bigcap_{n\geqslant 0} A_n\right|.$$

Exercice 7. Théorème d'Egorov Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert non vide tel que $|\Omega| < +\infty$ et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs dans $\mathbf{C}$, telles que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f,$$

p.p. sur Ω. On veut démontrer le résultat suivant.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $U \subset \Omega$ tel que

$$|U - \Omega| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \| f - f_n \|_\infty = 0.$$

Autrement dit, on peut assurer la convergence uniforme de $(f_n)_{\geqslant 0}$ vers f sur des parties mesurables de Ω dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue arbitrairement petite.

1) Soit $\mathscr{Z} \subset \Omega$ un ensemble négligeable tel que toutes les fonctions f_n sont définies sur $\Omega - \mathscr{Z}$ et tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ en tout point de $\Omega - \mathscr{Z}$. On note

$$S(n,k) := \bigcap_{i,j\geqslant n} \left\{ x \in \Omega - \mathscr{Z} \, : \, |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |S(n,k)| = |\Omega|$.

2) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geqslant 1}$ telle que l'ensemble

$$U = \bigcap_{k\geqslant 1} S(n_k, k)$$

vérifie la propriété souhaitée.

3) Le résultat reste-t-il vrai si $|\Omega| = +\infty$?

Exercice 8. Lemme de Borel-Cantelli Soit $(A_n)_{n\geqslant 0}$ une famille dénombrable de parties mesurables de $\mathbf{R}^N$ telle que

$$\sum_{n\geqslant 0} |A_n| < +\infty$$

1) Montrer que presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ appartient à au plus un nombre fini de A_n.

2) Soient $\varepsilon > 0$ et $C > 0$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\left\{ (p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* \, : \, \left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant C\, q^{-2-\varepsilon} \right\},$$

est fini.

Exercice 9. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$.
1) On suppose dans cette question que $\Omega = \mathbf{R}^N$. Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x)| \, \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|x|) \, \mathrm{d}x = 0.$$

2) Montrer que

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\Omega} |f(x)| \, \mathbf{1}_{[R,+\infty[}(|f(x)|) \, \mathrm{d}x = 0.$$

3) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable

$$|A| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)| \, \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

4) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Pour tout $x \geqslant 0$, on note

$$F(x) := \int_{\mathbf{R}} f(y) \, \mathbf{1}_{[0,x]}(y) \, \mathrm{d}y.$$

Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 10. Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel et r la transformation de $[0, 1]$ dans lui-même définie par

$$r(x) = x + \alpha \quad \text{si} \quad x \leqslant 1 - \alpha \quad \text{et} \quad r(x) = x + \alpha - 1 \quad \text{sinon.}$$

1) Montrer que si $A \subset [0, 1]$ est un ensemble mesurable, alors $r^{-1}(A)$ est un ensemble mesurable de même mesure.
2) Montrer qu'un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui intersecte chaque orbite $\{r^n(x) \,:\, n \in \mathbf{Z}\}$ en un seul point ne peut pas être mesurable. Retrouver l'existence d'un ensemble non mesurable dans $[0, 1]$ en utilisant l'axiome du choix.

On veut maintenant montrer qu'un ensemble mesurable A, qui vérifie $r^{-1}(A) = A$, est de mesure 0 ou 1.
3) Soit $E = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} n + A$, la réunion des translatés entiers de A. Monter que la fonction $\mathbf{1}_E$ est périodique de périodes 1 et α.
4) Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbf{R})$ une fonction continue, 1-périodique. Montrer que la fonction g définie par

$$g(y) := \int_{[0,1]} f(x + y) \, \mathbf{1}_E(x) \, \mathrm{d}x,$$

est continue et qu'elle est périodique de périodes 1 et α. En déduire qu'elle est constante. Monter que cette constante est égale au produit

$$|A| \int_{[0,1]} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

5) Montrer qu'il existe une suite bornée $(f_n)_{n \geqslant 0}$ de fonctions continues 1-périodiques qui converge presque partout vers la fonction caractéristique de $\mathbf{R} - E$.
6) En déduire que $|A| \, |[0, 1] - A| = 0$.

Exercice 11. Soit $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbf{R}^d$; on note B la boule-unité fermée correspondante. On se donne $\varepsilon \in]0; 1[$.
1) On note $N(\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules fermées de rayon ε nécessaires pour recouvrir B. Autrement dit, le plus petit entier tel qu'il existe $x_1, x_2, \ldots x_{N(\varepsilon)}$ pour lesquels

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} (x_j + \varepsilon B).$$

Prouver que $N(\varepsilon) \geqslant \varepsilon^{-d}$.
2) Soit $x_1, x_2, \dots x_M \in B$ tels que : $i \neq j \Rightarrow \| x_i - x_j \| > \varepsilon$. Montrer que

$$\bigsqcup_{1 \leqslant j \leqslant M} (x_j + \frac{\varepsilon}{2} B) \subset (1 + \frac{\varepsilon}{2}) B$$

où $\bigsqcup$ désigne une réunion disjointe. Montrer aussi que $M \leqslant (1 + \frac{2}{\varepsilon})^d$. En prenant M maximal, montrer qu'on a l'encadrement :

$$\varepsilon^{-d} \leqslant N(\varepsilon) \leqslant (1 + \frac{2}{\varepsilon})^d.$$

3) Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé quelconque. On suppose que sa boule-unité fermée peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$ (hypothèse de précompacité) et on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules dans un tel recouvrement. Montrer que E est alors de dimension finie et qu'on a :

$$\dim(E) \leqslant \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\frac{1}{\varepsilon})} \quad \text{et} \quad \dim(E) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{\ln N(\alpha)}{\ln(\frac{1}{\alpha})}.$$

Exercice 12. Théorème de récurrence de Poincaré Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit $S : X \to X$ une application. On fait les hypothèses suivantes :

1. l'espace X est de mesure finie, i.e. $\mu(X) < +\infty$;
2. la transformation S préserve la mesure, i.e. pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a :

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \qquad \mu\big(S^{-1}(A)\big) = \mu(A).$$

Soit $A \in \mathcal{A}$ un ensemble mesurable de X.

Montrer que l'ensemble des points $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que $S^k(x) \notin A$, pour tout $k \geqslant n$, est de mesure nulle. Autrement dit, que pour presque tout $x \in A$, l'orbite $\big(S^n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ de x passe par A une infinité de fois.

Indication : on pourra considérer les ensembles $E_n = \{x \in A \ : \ \forall k \geqslant n, \ S^k(x) \notin A\}$.