MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 4 : Espaces de fonctions.
Exercices à préparer pour la séance du 19 mai 2017:
exercices 2, 5, 8 et 10

Exercice 1. On considère X et F des espaces métriques.

1) Pour $X = [0;1]$ et $F = \mathbf{R}$, donner un exemple simple d'une suite de fonctions continues de X dans F qui converge simplement vers une fonction discontinue.
2) Dans le même cas, donner un exemple simple d'une suite de fonctions continues de X dans F qui converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.

3) Dans le même cas, on considère la suite des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$. En quels points cette suite de fonctions est-elle équicontinue ?

Exercice 2. On considère X et F des espaces métriques.

1) On se donne $a \in X$ et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to F$. On suppose que $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ est équicontinue en a et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Prouver que g est continue en a.
2) On suppose désormais que D est une partie dense de X et que F est complet. On se donne $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to F$. On suppose que $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ est équicontinue sur X et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur D. Prouver que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement sur X.

Exercice 3. On considère X et F des espaces métriques. On suppose X compact. On se donne $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'applications $X \to F$. On suppose que $\{f_n\}_{n\geqslant 0}$ est équicontinue sur X et que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers une fonction g. Prouver que $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers g.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

1) Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergeant simplement vers $f \equiv 0$.

2) La suite (f_n) est-elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0,\infty[), \|.\|_\infty)$? Que dit le théorème d'Ascoli ?

Exercice 5. Soit $K : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s,t)f(t)\,\mathrm{d}t$, $k \in \mathcal{C}([a,b] \times [a,b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathcal{C}([a,b]), \|.\|_\infty)$.

1) Rappeler pourquoi k est uniformément continue.

2) En déduire l'équicontinuité de (Kf_n).

3) Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X.

Exercice 6. Suivant les indications du cours, démontrer le théorème de Weierstrass classique une fois acquis le fait que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur le segment $[a;b]$ (pour $a < b$ nombres réels).

Exercice 7. Si k est un nombre réel > 0, on note $\mathscr{H}_k$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0;1]$, à valeurs réelles, telles que $f(0) = 0$ et satisfaisant

$$|\,f(x) - f(y)\,| \quad \leqslant \quad k\,|\,x - y\,| \qquad \text{pour tous } x, y \in [0;1].$$

On pose $\mathscr{E} = \bigcup_{k>0} \mathscr{H}_k$ et pour $f \in \mathscr{E}$, on note $N(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathscr{H}_k\}$.

1) Justifier que $\mathscr{E}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et que N est une norme sur $\mathscr{E}$.

2) Prouver que l'on a $\|f\|_\infty \leqslant N(f)$ pour toute $f \in \mathscr{E}$ mais que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathscr{H}_k$.

3) On fixe $k > 0$. Discuter la compacité de $\mathscr{H}_k$ dans $(\mathscr{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans $\big(\mathscr{E}, N(\cdot)\big)$.

Exercice 8. On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note

$$\mathcal{N}_1(P) := \int_0^1 |P(t)|\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \mathcal{N}_2(P) := \sum_{j \in \mathbf{N}} e^{-j}\,|P(j)|.$$

1) Vérifier qu'il s'agit de deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.

2) Ces normes sont-elles équivalentes ?

3) L'espace $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\mathcal{N}_1$, est-il complet ?

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_a^b f(t) t^n \, dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Exercice 10. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies $f \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$ de la forme :

$$f(x,y) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(x) \cdot v_i(y), \qquad \text{avec } u_i \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), v_i \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R}), \lambda_i \in \mathbf{R}, I \text{ fini}.$$

Montrer que toute fonction de $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathcal{A}$.

Exercice 11. Soient $]a;b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $X :]a;b[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $(t,x) \mapsto X(t,x)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit x une solution maximale de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$. Prouver que si $u \neq a$ alors $\lim\limits_{t \to u, t > u} \|x(t)\| = +\infty$, et que si $v \neq b$ alors $\lim\limits_{t \to v, t < b} \|\,x(t)\,\| = +\infty$.

Exercice 12. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Étant donnée une application continue $X : I \times \Omega \to E$, on veut montrer que l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$$

avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ admet une solution (avec la seule hypothèse de continuité de X).

1) Montrer que si $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$ alors, sur toute partie bornée de $I \times \mathbf{R}^n$, les solutions correspondantes $\{x_n\}_{n\geqslant 0}$ données par le théorème de Cauchy-Lipschitz forment une famille équicontinue définie sur un intervalle commun.
2) En déduire l'existence d'une solution au problème considéré.
3) A-t-on en général unicité de la solution dans ce contexte ?