MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 3 : Espaces métriques complets.
Exercices à préparer pour la séance du 12 mai 2017:
exercices 2, 3, 9 et 11

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace X peut être décrit comme réunion d'une famille finie de boules de rayon ε. On veut prouver que (X, d) est compact si, et seulement si, il est précompact et complet.

1) Justifier que, dans un espace métrique quelconque, si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors cette suite converge vers cette valeur d'adhérence.
2) Prouver que si X est compact, alors il est complet et précompact.

À partir de maintenant, on veut prouver l'implication réciproque, modulo quelques remarques préliminaires d'intérêt général. Il peut être utile – mais pas nécessaire – d'avoir en tête qu'on va faire un raisonnement qui généralise la preuve par dichotomie de la compacité des segments (fermés) de la droite réelle $\mathbf{R}$.

3) Prouver que si $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ est une suite d'extractions $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, alors l'application $n \mapsto (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$ est encore une extraction $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, et ainsi $(x_{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)})_{n \geqslant 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n \geqslant 0}$ (c'est l'idée du procédé diagonal).
4) Prouver qu'un sous-ensemble d'un espace métrique précompact est un espace métrique précompact.
5) Prouver que si X est complet et précompact, alors X est compact.

Exercice 2. 1) Montrer que pour qu'un espace métrique soit complet, il suffit que ses parties fermées et bornées soient complètes (par exemple, compactes).
2) Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|_E)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série normalement convergente est convergente.

Exercice 3. Montrer que $\mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R})$, muni de la norme $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach alors que le même espace, muni de la norme

$$\mathcal{N}_1(f) := \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

n'est pas un espace de Banach.

Exercice 4. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un espace de Banach, $K \geqslant 0$ et $\phi \in \mathscr{C}(E; E)$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|\phi(x)\| \leqslant K \, \|x\|.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathscr{C}(E; E)$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \qquad f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

On pourra utiliser la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^{-n} x).$$

Exercice 5. Montrer que $X :=]-1,1[$, muni de la distance

$$d(x,y) := \left| \frac{x}{1-x^2} - \frac{y}{1-y^2} \right|$$

est un espace métrique complet.

Exercice 6. On note $d(x,y) := |x-y|$ la distance usuelle sur $\mathbf{R}$. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction strictement croissante, on note $d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$.
1) Montrer que d_f est une distance sur $\mathbf{R}$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que les topologies associées à d et d_f soient les mêmes.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que les suites de Cauchy associées à d et d_f soient les mêmes.
4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $(\mathbf{R}, d_f)$ soit complet.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

et

$$\forall x \in B_f(0,1), \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

1) Montrer que f est $\mathbf{Q}$-linéaire.
2) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $\lambda \geqslant \|x\|$, on a : $\|f(x)\| \leqslant \lambda M$.
3) En déduire que f est linéaire et continue.

Exercice 8. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série entiÃšre $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$ et soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach.
1) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < R$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n L^n \in \mathcal{L}(E,E).$$

2) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$. Montrer que

$$e^L := \sum_{n\geqslant 0} \frac{L^n}{n!}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.
3) Soient $L, \tilde{L} \in \mathcal{L}(E,E)$ tels que $L \circ \tilde{L} = \tilde{L} \circ L$. Montrer que

$$e^L \circ e^{\tilde{L}} = e^{\tilde{L}} \circ e^L.$$

4) En déduire que, si $L \in \mathcal{L}(E,E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathcal{L}(E,E)$.

5) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que

$$V^2 = I_E - L.$$

Exercice 9. Soit K un compact, convexe d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ et $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne, i.e. telle que pour tous $x, y \in K$, on ait :

$$\|f(x) - f(y)\| \quad \leqslant \quad \|x - y\|.$$

1) Soit $a \in K$. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, l'application

$$f_n(x) = \frac{1}{n}a + \frac{n-1}{n}\, f(x),$$

admet un point fixe dans K.

2) En déduire que f admet un point fixe dans K.

Exercice 10. Soit T une application d'un espace métrique compact (X, d) dans lui-même, telle que $d\big(T(x), T(y)\big) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$.

1) Montrer que T possède un unique point fixe, i.e. $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

2) Ce résultat est-il toujours vrai si l'on enlève l'hypothèse de compacité de (X, d) ?
3) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $\big(T^n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge (ici, T^n est défini par la récurence $T^1 = T$ et $T^n = T \circ T^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$)
4) Montrer que la suite d'applications $(T^n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur X.

Exercice 11. Soit $X : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 et bornée sur $\mathbf{R}^2$. Prouver que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, la solution maximale du problème

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$, est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Exercice 12. Soient $]a; b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $X :]a; b[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $(t, x) \mapsto X(t, x)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit x une solution maximale de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$. Prouver que si $u \neq a$ alors $\lim_{t \to u, t > u} \|x(t)\| = +\infty$, et que si $v \neq b$ alors $\lim_{t \to v, t < b} \| x(t) \| = +\infty$.