MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 2 : Continuité et compacité.

Exercices à préparer pour la séance du 5 mai 2017:
exercices 1, 3, 8 et 9

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique et soit Y une partie de X.

1) Prouver que l'application $d_Y : X \to \mathbf{R}$ définie par :

$$d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y),$$

est continue et qu'elle est en fait 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$|d_Y(x) - d_Y(x')| \leqslant d(x, x') \quad \text{pour tous} \quad x, x' \in X.$$

2) Prouver que x appartient à l'adhérence $\overline{Y}$ de Y si, et seulement si, on a : $d_Y(x) = 0$.

3) Prouver que les fermés de X sont les ensembles de zéros des fonctions continues sur X à valeurs réelles.

4) Soient $A, B \subset X$. On suppose que $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

5) (Lemme d'Urysohn) Soient A et B deux fermés disjoints de X. Prouver qu'il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$.

Exercice 2. Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0; 1]$, muni de la norme de la convergence uniforme (la norme sup $\| \cdot \|_\infty$). Soit φ une forme linéaire sur E qui prend des valeurs $\geqslant 0$ sur toute fonction dont les valeurs sont toutes $\geqslant 0$. Prouver que φ est une forme linéaire continue.

Exercice 3. Soit C l'espace des suites réelles qui tendent vers 0, muni de la norme sup $\| \cdot \|_\infty$. On considère la forme linéaire $\varphi : C \to \mathbf{R}$ définie par $(u_n)_{n \geqslant 0} \mapsto \varphi\big((u_n)_{n \geqslant 0}\big) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

1) L'application φ est-elle continue ?

2) Calculer sa norme.

3) Cette norme est-elle atteinte ?

Exercice 4. Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0; 1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. On considère la forme linéaire $\varphi : E \to \mathbf{R}$ définie par $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) L'application φ est-elle continue ?

2) Calculer sa norme.

3) Cette norme est-elle atteinte ?

Exercice 5. Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0;1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $K : [0;1]^2 \to \mathbf{R}$ définie par $K(x,y) = x(1-y)$ si $x \leqslant y$ et $y(1-x)$ si $y \leqslant x$. On considère l'application linéaire $\varphi : E \to E$ définie par $\varphi(f) : y \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) L'application φ est-elle continue ?

2) L'application φ possède-t-elle des valeurs propres ? Si oui, lesquelles ?

Exercice 6. Soit E l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle $[0;1]$, muni de la norme de la convergence uniforme. Soit $K : [0;1]^2 \to \mathbf{R}$ une fonction continue $(x,y) \mapsto K(x,y)$. On considère l'application $\varphi : E \to E$ définie par

$$\varphi(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Vérifier que pour tout $\lambda > 0$ le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$ est de dimension finie.

Indication : munir E d'un produit scalaire naturel, et vérifier que pour toute famille orthonormale f_1, f_2, ... f_n de fonctions dans $\mathrm{Ker}(\varphi - \lambda \mathrm{Id})$, on a :

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{n} f_i(x)^2 \quad \leqslant \quad \int_0^1 K(x,y)^2\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 7. Soit X un espace métrique.

1) Soit $f : X \to X$ une application continue. Prouver que l'ensemble des points fixes de f est fermé de X.

2) Soient $f, g : X \to X$ des applications continues. Prouver que l'ensemble des points x tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de X.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique compact (au sens où il possède la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite admet une valeur d'adhérence) et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe un $\lambda > 0$ tel que toute boule de rayon λ dans X est contenue dans un ouvert U_i pour un indice i convenable.

Exercice 9. 0) Un homéomorphisme est une application bijective continue dont l'application réciproque est elle-même continue (ce qui n'est pas automatique). Montrer que toute application injective continue d'un espace métrique compact X dans un espace métrique Y est un homéomorphisme de X vers $f(X)$.

Maintenant, on munit $[0;1]^{\mathbf{N}}$ de la distance $d\big((x_n)_{n\geqslant 0}, (y_n)_{n\geqslant 0}\big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}$.

1) Prouver que $([0;1]^{\mathbf{N}}, d)$ est un espace métrique compact.

2) Deux espaces sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme qui va de l'un sur l'autre (le sens n'importe pas dans la formulation : l'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme). Prouver que tout espace métrique compact est homéomorphe à un sous-espace de $[0;1]^{\mathbf{N}}$.

Exercice 10. Soit (X, d) un espace métrique connexe et non borné. Montrer que toute sphère de X est non vide.

Exercice 11. Montrer que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^2$ ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ qui soit continue, bijective et telle que f^{-1} soit aussi continue.

Exercice 12. Montrer qu'un ouvert connexe U de $\mathbf{R}^N$ est connexe par arcs. Montrer que l'on peut même joindre deux points de U par une ligne polygonale. Plus généralement, montrer qu'un ouvert connexe d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé est connexe par arcs.