MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 1 : Espaces métriques.

Exercices à préparer pour la séance du 28 avril 2017:
exercices 2, 3, 4 et 8

Exercice 1.

1) Rappeler les définitions d'une borne supérieure (inférieure) d'un ensemble de nombres réels. Si A et B sont deux ensembles bornés non vides de $\mathbf{R}$, comparer avec $\sup A$, $\inf A$, $\sup B$ et $\inf B$ les nombres suivants :

(i) $\sup(A+B)$, (ii) $\sup(A \cup B)$, (iii) $\sup(A \cap B)$, (iv) $\inf(A \cup B)$, (v) $\inf(A \cap B)$.

2) Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $A \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(x, A) = \inf_{a \in A} ||x - a||$. Trouver $d(0, \mathbf{R} - \mathbf{Q})$, $d(\sqrt{2}, \mathbf{Q})$, $d(M, \mathcal{D})$ où $M = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ et $\mathcal{D}$ est la droite de vecteur unitaire (a, b, c).

3) Pour $A, B \subset \mathbf{R}^n$ on définit $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} ||a - b||$. Trouver $d(A, B)$ lorsque A est une branche de l'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ xy = 1\}$ et B une asymptote.

4) On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup_{a, b \in A} ||a - b||$, le *diamètre* de A. Que valent les diamètres $\mathrm{diam}(]0, 1[\cap \mathbf{Q})$ et $\mathrm{diam}([0, 1] \cap \mathbf{R} - \mathbf{Q})$?

Exercice 2. Sur $M_N(\mathbf{K})$, l'espace vectoriel des matrices carrées de taille N à coefficients dans $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, on définit l'application $\| \cdot \| \to \mathbf{R}_+$ par :

$$\|A\| := \max_{i=1,\ldots,N} \sum_{j=1}^{N} |A_{ij}|$$

où $A = [A_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant N}$.

1) Après avoir vérifié qu'on a ainsi défini une norme, prouver que l'on a :

$$\|A\, B\| \ \leqslant \ \|A\| \cdot \|B\|$$

pour toutes $A, B \in M_N(\mathbf{K})$.

2) Prouver que la norme $\| \cdot \|$ ci-dessus est subordonnée à la norme sup $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbf{K}^N$, qui est définie par $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$.

3) Retrouver le résultat de la question 1).

4) Quelle est la norme sur $M_N(\mathbf{K})$ subordonnée à la norme $\| \cdot \|_1$ sur $\mathbf{K}^N$, qui est définie par $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|$ pour tout $x = (x_i) \in \mathbf{K}^N$?

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique. Prouver que tout ouvert de X peut s'écrire comme une réunion dénombrable de fermés de X.

Exercice 4. On va montrer que l'ensemble D des réels de la forme $p + q\sqrt{2}$ où p et q décrivent $\mathbf{Z}$, est dense dans $\mathbf{R}$.

1) Remarquer que D est stable par addition et multiplication.

2) Posons $u = \sqrt{2} - 1$; montrer que pour tous $a < b$, on peut trouver $n \geqslant 1$ tel que $0 < u^n < b - a$, puis $m \in \mathbf{Z}$ vérifiant $a < mu^n < b$.

En déduire le résultat.

Exercice 5. Montrer que dans tout espace métrique (E, d) une boule fermée est un fermé, mais que l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ ne coïncide pas nécessairement avec la boule fermée $B'(a, r)$ (on pourra considérer dans $(\mathbf{R}^2, ||.||_\infty)$, $E = [0, 1] \times \{0\} \cup \{0\} \times [0, 1]$ et la boule centrée en $(\frac{1}{2}, 0)$ de rayon $1/2$).

Exercice 6. $(E, ||.||)$ un espace vectoriel normé.

1) Montrer que dans ce cas la boule fermée $B'(a, r)$ est l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$.

2) Montrer que $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(b, R) \Longleftrightarrow r \leqslant R$ et $||a - b|| \leqslant R - r$.

Exercice 7.

1) Si $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on pose $||(x, y)|| = \max(|x+y|, |x-2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme sur $\mathbf{R}^2$ et dessiner sa boule unité fermée.

2) Soit p, q deux normes sur $\mathbf{R}^n$, B_p et B_q leurs boules unités fermées. Montrer que

$$B_q \subset B_p \Longleftrightarrow p \leqslant q.$$

Que signifie $\frac{1}{2}B_p \subset B_q \subset 2B_p$? Exemples.

Exercice 8. On note $X = l^\infty$ l'espace des suites réelles bornées, et $Y = c_0$ l'espace des suites réelles tendant vers 0, tous deux munis de la métrique (à vérifier) d définie par $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$ en notant ici $x = (x_n)_{n \geqslant 0}$ et $x = (y_n)_{n \geqslant 0}$.

1) Montrer que Y est fermé dans X.

2) Montrer que l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang est dense dans Y mais pas dans X.

Exercice 9. Soit $X \subset \mathbf{R}^N$ un ensemble convexe (i.e. X contient tous les segments dont les extrémités sont dans X). Prouver que son intérieur $\mathring{X}$ et son adhérence $\overline{X}$ sont convexes.

Exercice 10.

1) Montrer que $||f||_\infty = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x)|$ et $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$ sont deux normes sur $C([0, 1], \mathbf{R})$. Sont-elles équivalentes ?

2) Les deux métriques associées définissent-elles la même topologie ?

Exercice 11. Soit $E = C^1([0, 1], \mathbf{R})$. Comparer les normes $N_1(f) = ||f||_\infty$, $N_2(f) = ||f||_\infty + ||f||_1$, $N_3(f) = ||f'||_\infty + ||f||_\infty$, $N_4(f) = ||f'||_1 + ||f||_\infty$.

Exercice 12. Soit $\mathbf{R}^n$ considéré comme groupe additif muni de sa topologie usuelle. Soit G un sous-groupe de $\mathbf{R}^n$.

1) On suppose que 0 est isolé dans G. Montrer que tout point est isolé, que G est discret et fermé dans $\mathbf{R}^n$.

On se restreint maintenant au cas $n = 1$.

2) Montrer qu'alors, G est soit $\{0\}$, soit de la forme $a\mathbf{Z}$, $a > 0$.

3) Montrer que si 0 est point d'accumulation, G est partout dense dans $\mathbf{R}$. En déduire ainsi les sous-groupes fermés de $\mathbf{R}$.

4) On considère $\alpha \notin \mathbf{Q}$; montrer que $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ est un sous-groupe dense de $\mathbf{R}$. En déduire les valeurs d'adhérence de la suite $(e^{2i\pi n\alpha})_{n\in\mathbf{Z}}$.