MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 9 : Espaces de Hilbert – analyse.
Exercices à préparer pour la séance du 30 juin 2017:
exercices 1, 2, 4 et 6

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert et $A, B \in \mathcal{L}(H, H)$.
1) Montrer que $\|A^*\| = \|A\|$.

On travaille avec $A \neq 0$ (le cas $A = 0$ est trivial). Soit $x \in H$ un vecteur de norme 1. On a :

$$\| A(x) \|^2 = \langle A(x), A(x) \rangle = \langle x, (A^* \circ A)(x) \rangle \leqslant \| (A^* \circ A)(x) \| \leqslant \| A^* \circ A \| \leqslant \| A \| \cdot \| A^* \|.$$

En passant à la borne supérieure sur x, on obtient : $\| A \|^2 \leqslant \| A \| \cdot \| A^* \|$, et finalement $\| A \| \leqslant \| A^* \|$. Il reste à remarquer que $(A^*)^* = A$ pour en déduire que $\|A^*\| = \|A\|$.

Remarque : on peut aussi utiliser la formule $\|A^*(x)\| = \sup_{\|y\|=1} \langle A^*(x), y \rangle$; rappel : l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la majoration et le sup est atteint pour y égal à la normalisation du vecteur $A^*(x)$.
2) Montrer que $(A\, B)^* = B^*\, A^*$.

C'est complètement formel ; on a, pour tout $x, y \in H$, par définition d'un opérateur adjoint :

$$\langle (A \circ B)(x), y \rangle = \langle B(x), A^*(y) \rangle = \langle x, (B^* \circ A^*)(y) \rangle.$$

Ceci étant vérifié pour tous $x, y \in H$, par unicité de l'opérateur adjoint on en déduit bien que $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$.
3) Montrer que $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$ et que $\overline{\mathrm{Im}(A)} = \mathrm{Ker}(A^*)^\perp$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(A^*)$. Pour tout $h \in H$, on a : $\langle x, A(h) \rangle = \langle A^*(x), h \rangle = \langle 0, h \rangle = 0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(A^*) \subseteq \mathrm{Im}(A)^\perp$. Réciproquement si $x \in \mathrm{Im}(A)^\perp$, alors $\langle A^*(x), h \rangle = \langle x, A(h) \rangle = 0$ pour tout $h \in H$, soit $A^*(x) \in H^\perp = \{0\}$, i.e. $x \in Ker(A^*)$.

Finalement, on obtient bien $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^*)$, et en passant à l'orthogonal on a : $\mathrm{Ker}(A^*)^\perp = \big(\mathrm{Im}(A)^\perp\big)^\perp = \overline{\mathrm{Im}(A)}$.
4) Montrer que A est inversible (i.e. A est bijective et A^{-1} est une application linéaire continue) si et seulement si A^* est inversible.

On se donne A inversible, c'est-à-dire admettant B linéaire, continue et telle que

$$A \circ B = B \circ A = \mathrm{id}_H.$$

On applique la prise d'adjoint à ces égalités, ce qui donne

$$B^* \circ A^* = A^* \circ B^* = \mathrm{id}_H^* = \mathrm{id}_H.$$

Par unicité A^* est linéaire, et par Cauchy-Schwarz elle est continue de même norme que A. On vient donc de voir que si A est inversible, alors A^* l'est aussi, et la réciproque découle à nouveau du fait que $(A^*)^* = A$.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert réel.

1) Déterminer une expression de la projection sur la boule-unité fermée de H.

Notons B la boule-unité fermée de H et P_B la projection métrique associée. Un dessin en dimension 2 suggère qu'on doit avoir $P_B(x) = x$ si $x \in B$ et $P_B(x) = \frac{x}{\|x\|}$

sinon. En général, c'est clair dans le premier cas et si $x \notin B$, pour justifier la formule, il suffit de prouver que pour tout $z \in B$ on a :

$$\langle z - \frac{x}{\| x \|}, x - \frac{x}{\| x \|} \rangle \leqslant 0.$$

Mais ceci suit du calcul suivant :

$$\langle z - \frac{x}{\| x \|}, x - \frac{x}{\| x \|} \rangle = \langle z, x \rangle - \| x \| - \langle z, \frac{x}{\| x \|} \rangle + 1 = (\| x \| - 1)\big(\langle z, \frac{x}{\| x \|} \rangle - 1\big).$$

Puisque $x \notin B$, le premier facteur est $\geqslant 0$ et puisque $z \in B$ le second est $\leqslant 0$ par Cauchy-Schwarz.

2) On suppose H séparable de dimension infinie. Prouver que sa boule-unité n'est pas compacte.

L'espace H admet une base hilbertienne indexée par $\mathbf{N}$, et les distances mutuelles entre deux vecteurs distincts valent toujours $\sqrt{2}$, ce qui empêche la base vue comme suite d'admettre une sous-suite convergente. On vient donc de prouver le théorème de Riesz facilement dans ce contexte.

Exercice 3. Soit $H = \mathrm{L}^2([0,1]; \mathbf{R})$. Pour tout $f \in H$, on pose

$$Tf(x) = \int_{[0,x]} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

1) Montrer que T est une application continue de H dans H.

On a

$$\| Tf \|^2 = \int_0^1 | \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t|^2\, \mathrm{d}x = \int_0^1 | \int_0^x f(t) \cdot 1\, \mathrm{d}t|^2\, \mathrm{d}x,$$

et donc par Cauchy-Schwarz :

$$\| Tf \|^2 \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \right) x\, \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 |f(t)|^2\, \mathrm{d}t \cdot \int_0^1 x\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2} \| f \|^2,$$

ce qui prouve que T est continue de norme d'opérateur $\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) Déterminer T^* l'adjoint de T.

On calcule :

$$Tf(x) = \int_{[0,x]} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^1 f(t) \mathbf{1}_{[0;x]}(t)\, \mathrm{d}t,$$

et donc pour toute $g \in H$, on a par Fubini :

$$\langle Tf, g \rangle = \int_0^1 \int_0^1 f(t) \mathbf{1}_{[0;x]}(t) g(x)\, \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \int_0^1 f(t) \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{[0;x]}(t) g(x)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

Mais

$$\mathbf{1}_{[0;x]}(t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1 \Leftrightarrow \mathbf{1}_{[t;1]}(x) \neq 0,$$

donc $T^* g(t) = \displaystyle\int_t^1 g(x)\, \mathrm{d}x$.

Exercice 4. Soit K une fonction de $\mathrm{L}^2([0,1]^2; \mathbf{C})$. On considère l'opérateur T_K défini par

$$T_K(f)(x) = \int_{[0,1]} K(x,y) f(y)\, \mathrm{d}y,$$

de $\mathrm{L}^2([0,1], \mathbf{C})$ dans lui-même.

1) Déterminer T_K^*, l'adjoint de T_K.

2) Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur K pour que T_K soit auto-adjoint (i.e. $T_K^* = T_K$).

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. On suppose que H admet une base hilbertienne, disons $(e_n)_{n\geqslant 0}$ (de façon équivalente d'après le cours, on suppose que H est séparable). Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. Montrer que la partie

$$\left\{ x \in H \,:\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n\, e_n \text{ avec } |x_n| \leqslant a_n \right\}$$

est un compact de H.

On utilise le critère séquentiel et on se donne pour cela une suite $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$ dans H. On écrit chaque x^k dans la base hilbertienne donnée : $x^k = \sum_n x_n^k$ avec $x_n^k \in \mathbf{C}$. Il faut produire une valeur d'adhérence candidate pour la suite $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$; on le fait en travaillant coordonnée par coordonnée suivant la base hilbertienne. Pour $n = 0$: comme la suite des x_0^k pour $k \geqslant 0$ est bornée par a_0, il existe ξ_0 et une extraction φ_0 tels que la suite $\{x_0^{\varphi_0(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_0. Pour $n = 1$: comme la suite des x_1^k pour $k \geqslant 0$ est bornée par a_1, il existe ξ_1 et une extraction φ_1 tels que la suite $\{x_1^{(\varphi_0\circ\varphi_1)(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_1. Par récurrence on obtient ainsi une suite de nombres complexes ξ_n et une suite d'extractions φ_n telles que pour tout $n \geqslant 0$ la suite $\{x_n^{(\varphi_0\circ\varphi_1\circ\cdots\circ\varphi_n)(k)}\}_{k\geqslant 0}$ converge vers ξ_n.

D'après les corrections de la PC 2, on sait que $\psi : m \mapsto (\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ \cdots \circ \varphi_m)(m)$ est une extraction. Ainsi $\{x^{\psi(k)}\}_{k\geqslant 0}$ est une suite extraite de $\{x^k\}_{k\geqslant 0}$ et on a pour tout $n \geqslant 0$: $\lim_{k\to\infty} x_n^{\psi(k)} = \xi_n$. Cela implique pour tout $n \geqslant 0$ que $\lim_{k\to\infty} | x_n^{\psi(k)} - \xi_n |^2 = 0$, et aussi par passage à la limite que $| \xi_n | \leqslant a_n$, donc en particulier que $\sum_n \xi_n e_n$ est bien un élément de la partie de H considérée. Enfin, par convergence dominée pour la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ (pour laquelle $\int$ est remplacé par $\sum_{n\geqslant 0}$), et grâce à la condition $| x_n^{\psi(k)} - \xi_n |^2 \leqslant 4a_n^2$ qu'on voit comme une condition de domination uniforme en k par une suite sommable (= intégrable), on a :

$$\lim_{k\to\infty} \Big(\| x^{\psi(k)} - \sum_{n\geqslant 0} \xi_n e_n \|_H\Big)^2 = \lim_{k\to\infty} \Big(\sum_{n\geqslant 0} |x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2\Big) = \sum_{n\geqslant 0} \lim_{k\to\infty} |x_n^{\psi(k)} - \xi_n|^2 = 0,$$

ce qui est la convergence dans H cherchée.

Exercice 6. Soit $f \in \mathrm{L}^2(S^1; \mathbf{C})$.

Remarque : la notation S^1 signifie qu'on considère des fonctions d'une variable réelle, 2π-périodiques (et à valeurs complexes).

1) Montrer que

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} f(x)\, e^{-inx}\, \mathrm{d}x,$$

les coefficients de Fourier de f, tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Par la formule de Parseval (dans sa version L^2 du cours de cette année), on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} | c_n(f) |^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(t) |^2 \, \mathrm{d}t < +\infty,$$

donc la suite des coefficients de Fourier est le terme général d'une série convergente.

Remarque : pour démontrer Parseval dans ce cadre L^2, on utilise deux théorèmes de densité, à savoir Stone-Weierstrass pour la densité en norme sup (et donc la densité

L^2) des fonctions trigonométriques dans les fonctions continues 2π-périodiques, puis la densité L^2 de ces dernières dans $L^2(S^1;\mathbf{C})$.

2) On suppose maintenant que $f \in L^1(S^1;\mathbf{C})$, montrer que les coefficients de Fourier de f tendent vers 0 quand $|n|$ tend vers l'infini.

Par densité des fonctions continues à support compact dans $L^1(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$ telle que $\| f-g\|_1 < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On a dans ce cas :

$$|c_n(f)-c_n(g)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(t)-g(t)\big)e^{-int}\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}.$$

Le résultat en découle puisque la question 1 implique que $c_n(g) \to 0$ quand $|n| \to +\infty$, étant donné que $\mathcal{C}_c(]-\pi;\pi[;\mathbf{C}) \subset L^2(]-\pi;\pi[;\mathbf{C})$.

Exercice 7. Soit $E = \mathscr{C}([0,1];\mathbf{R})$ l'espace préhilbertien muni du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt.$$

Montrer que l'application $A : f \mapsto \int_0^{1/2} f(t)\,dt$ est une forme linéaire continue, mais qu'il n'existe pas d'élément g de E tel que $A(f) = \langle f, g\rangle$ pour tout $f \in E$.

La linéarité de A est évidente, sa continuité découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $H = L^2([0,1])$ (pas dans E). Autre façon de le dire : A est la restriction à E d'une forme linéaire sur H qui est continue par continuité du produit scalaire.

Dans H on sait que l'*unique* élément représentant A est $g_0 = \mathbf{1}_{[0,1/2]}$. La subtilité est que, a priori, l'élément g cherché vérifie une contrainte moins forte. Cependant E est dense dans H donc $\langle g,\cdot\rangle$ et $\langle g_0,\cdot\rangle$ sont des fonctions continues qui coïncident sur un sous-espace dense donc sont égales dans H'. Ainsi l'élément g cherché serait une fonction continue presque partout égale à g_0, ce qui est absurde. Par exemple il existe une suite x_n tendant vers $1/2$ par valeurs inférieures et sur laquelle les deux fonctions coïncident, donc $g(1/2) = 1$. Puis g reste strictement positive, sur un ouvert contenant $1/2$ et des points de $]1/2, 1]$ pour lesquelles $g = g_0$.

Exercice 8. Soit $a = (a_n)_{n\geqslant 0}$ un élément de l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbf{N};\mathbf{R})$. Montrer que

$$\{x \in H \;:\quad \forall n,\ |x_n| \leqslant |a_n|\}\,,$$

est un compact de H.

On note K l'ensemble de l'énoncé. Soit x^p une suite d'éléments de K. On rappelle d'abord pourquoi, quitte à extraire, la suite x^p converge terme à terme (c'est-à-dire que $\prod[-a_n, a_n]$ est compact). Par compacité de $[-a_0, a_0]$, il existe une extraction φ_0 telle que $x_0^{\varphi_0(p)}$ converge vers un x_0 dans $[-a_0, a_0]$ quand p tend vers l'infini.

Par compacité de $[-a_1, a_1]$, il existe une extraction φ_1 telle que $x_1^{\varphi_0(\varphi_1(p))}$ converge vers un x_1 dans $[-a_1, a_1]$ quand p tend vers l'infini (suite extraite de la précédente suite extraite). Par récurrence on construit ainsi des extraction φ_j telles que, pour tout n,

$$\lim_{p\to\infty} x_n^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p)} = x_n \in [-a_n, a_n].$$

On pose ensuite $\psi(p) = \varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_p(p)$ (c'est la fameuse « extraction diagonale »). Ainsi, pour tout $p \geqslant n$, la suite $p \mapsto x_n^{\psi(p)}$ est extraite de $x_n^{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_n(p)}$ donc converge vers x_n quand p tend vers l'infini. On a donc convergence « ponctuelle » de $x^{\psi(p)}$ vers x.

Il reste à démontrer la convergence dans H. C'est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage sur $\mathbf{N}$ mais on peut le démontrer à la main. On supprime l'extraction ψ des notations. Le point clef est le découpage :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |x_n^p - x_n|^2 &= \sum_{n=0}^{N} |x_n^p - x_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |x_n^p - x_n|^2 \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N} |x_n^p - x_n|^2 + 4 \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2.\end{aligned}$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on trouve N tel que le deuxième morceau soit inférieur à $\varepsilon/2$. Puis on choisit p assez grand pour avoir, pour tout $n \leqslant N$, $|x_n^p - x_n|^2 \leqslant \varepsilon/2^n$.

Exercice 9. Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H, H)$. On suppose que $\|T\|_{\mathcal{L}} \leqslant 1$.
1) Montrer que, si $x \in H$, alors $T\,x = x$ si et seulement si $\langle T\,x, x\rangle = \|x\|^2$. En déduire que $\ker(I - T) = \ker(I - T^*)$.

L'implication $Tx = x \Rightarrow \langle T\,x, x\rangle = \|x\|^2$ est évidente. Réciproquement, supposons $\langle T\,x, x\rangle = \|x\|^2$. Par Cauchy-Schwarz, $\langle T\,x, x\rangle \leqslant \|Tx\|\,\|x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|^2 = \|x\|^2$. Ainsi on se trouve dans le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, x et Tx sont liés. Si x est nul il n'y a rien à dire. Sinon l'hypothèse implique que x et Tx sont tous deux non-nuls, donc $Tx = \lambda x$ puis $\lambda\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ donc $\lambda = 1$.

D'après l'exercice 1, T^* vérifie aussi l'hypothèse de norme. Ainsi on a les équivalences

$$x \in \ker(\mathrm{Id} - T) \iff \langle T\,x, x\rangle = \|x\|^2 \iff \langle x, T^*\,x\rangle = \|x\|^2 \iff x \in \ker(\mathrm{Id} - T^*).$$

2) Montrer que $(\mathrm{Im}(I - T))^\perp = \ker(I - T)$. En déduire que

$$H = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T)}.$$

C'est encore une conséquence de l'exercice 1 qui assure $(\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T))^\perp = \ker(\mathrm{Id} - T^*)$, et ce dernier est égal à $\ker(\mathrm{Id} - T)$ d'après la première question. Comme $\ker(\mathrm{Id} - T)$ est fermé, $H = \ker(\mathrm{Id} - T) \oplus \ker(\mathrm{Id} - T)^\perp$, ce qui donne le résultat car $(\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T))^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$.
3) Pour tout $n \geqslant 1$, on note

$$S_n = \frac{\mathrm{Id} + T + \ldots + T^{n-1}}{n}.$$

Montrer que, pour tout $x \in H$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} S_n\,x = P\,x,$$

où P est la projection orthogonale sur $\ker(\mathrm{Id} - T)$.

L'égalité à démontrer est linéaire en x donc on peut traiter séparément les deux sous-espaces de la décomposition de la question précédente.

Sur $\ker(\mathrm{Id} - T)$, on a $P = \mathrm{Id}$ et $T = \mathrm{Id}$ donc $S_n = \mathrm{Id}$ et il n'y a rien à démontrer.

Sur $\overline{\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)}$, on a $P = 0$. Pour x dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ (sans passer à l'adhérence), on a $x = u - Tu$ pour un certain u, et $S_n x = (u - T^n u)/n$ (série téléscopique). Donc $S_n x$ tend vers zéro car $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n \leqslant 1$. Si x' est dans l'adhérence de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe x dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - T)$ et v tel que $\|v\| \leqslant \varepsilon$ et $x' = x + v$. Comme $\|S_n\| \leqslant 1$, $\|S_n x'\| \leqslant \|S_n x\| + \varepsilon$. Faisant tendre n vers l'infini, on trouve $\|S_n x'\| \leqslant \varepsilon$. Faisant tendre ε vers 0, on conclut.

Exercice 10. Théorème de Peter Neumann

Soit G un groupe de permutations de $\mathbf{N}$. On suppose que toute les orbites de G sont infinies : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\{g(n);\ g \in G\}$ est infini. Le but de cet exercice est de montrer que, pour toute partie finie $B \subset \mathbf{N}$, il existe g dans G qui déplace B : $g(B) \cap B = \varnothing$.

On note H l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbf{N})$. Pour tout g dans G et u dans H on note $I_g(u)$ la suite $I_g(u)_n = u_{g^{-1}(n)}$.

1) Montrer que $I_g(u)$ est dans H et que I_g est un isomorphisme isométrique de H.

Une série de réels positifs converge si et seulement si toute permutation de cette série converge (et les sommes sont alors les mêmes). Ainsi :

$$u_n \in H \iff \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 < \infty \iff \sum_{n=0}^{\infty} u_{g^{-1}(n)}^2 < \infty \iff I_g(u) \in H.$$

Le même argument montre que $\|I_g(u)\| = \|u\|$. De plus I_g est bijective car $I_{g^{-1}}$ est son inverse. Remarque : l'égalité des normes ne suffit pas pour assurer la surjectivité (penser au décalage vers la droite sur H).

2) Montrer que si $I_g(u) = u$ pour tout g alors $u = 0$.

Si $I_g(u) = u$ alors, pour tout n, $u_{g(n)} = (I_g(u))_{g(n)} = u_n$. Si c'est vrai pour tout g alors l'hypothèse « orbites de G infinies » assure que chaque valeur de u_n est répétée une infinité de fois dans la suite. Vu la convergence ℓ^2 de la série, seule la valeur zéro est possible.

On fixe maintenant $B \subset \mathbf{N}$ fini. On note

$$C_0 = \{u \in H;\ \langle u, \mathbf{1}_B \rangle \geq 1\},$$
$$G \cdot \mathbf{1}_B = \{I_g(\mathbf{1}_B);\ g \in G\}$$

et on note C l'adhérence de l'enveloppe convexe de $G \cdot \mathbf{1}_B$ (cette dernière est, par définition, l'intersection de tous les convexes contenant $G \cdot \mathbf{1}_B$).

3) Montrer que C_0 est un convexe fermé et que, pour g dans G, $g(B) \cap B \neq \varnothing$ si et seulement si $I_g(\mathbf{1}_B)$ est dans C_0.

Comme $\langle \cdot, \mathbf{1}_B \rangle$ est linéaire et continue, C_0 est convexe et fermé. On calcule :

$$\langle I_g(\mathbf{1}_B), \mathbf{1}_B \rangle = \sum \mathbf{1}_B(g^{-1}(n))\mathbf{1}_B(n) = \sum \mathbf{1}_{g(B)}(n)\mathbf{1}_B(n) = \mathrm{Card}(g(B) \cap B).$$

4) Montrer que C est un convexe fermé et que $I_g(C) \subset C$ pour tout g.

On vérifie en considérant des suites que l'adhérence d'un convexe est convexe. Elle est aussi fermé par construction. Donc C est un convexe fermé.

Par construction $I_g(G \cdot \mathbf{1}_B) = G \cdot \mathbf{1}_B$. Par linéarité de I_g, $I_g(\mathrm{Conv}(G \cdot \mathbf{1}_B)) = \mathrm{Conv}(I_g(G \cdot \mathbf{1}_B)) = \mathrm{Conv}(G \cdot \mathbf{1}_B)$. Prenant l'adhérence, on obtient $\overline{I_g(\mathrm{Conv}(G \cdot \mathbf{1}_B))} = C$. Enfin, pour toute application continue f et partie A, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$ donc $I_g(C) \subset C$.

5) Montrer que C contient un unique vecteur de norme minimale et conclure.

On applique le théorème de projection sur un convexe fermé, en projetant 0 sur C, pour obtenir $v \in C$ tel que $\|v\| = d(0, v) = d(0, C) = \inf_C \|\cdot\|$.

Supposons par l'absurde qu'aucun élément de g ne déplace B. Alors la question 3 assure que les éléments de $G \cdot \mathbf{1}_B$ sont tous dans C_0. Comme ce dernier est convexe et fermé (question 3 toujours), C, qui est l'adhérence de l'enveloppe convexe de $G \cdot \mathbf{1}_B$, est aussi dans C_0.

Or C_0 ne contient pas 0, donc C non plus, et $v \neq 0$.

Or, pour tout g, I_g est isométrique (question 1) donc $\|I_g(v)\| = \|v\|$. De plus I_g envoie C dans C (question 4), donc $I_g(v) = v$ par unicité du vecteur de norme minimale. La question 2 implique donc $v = 0$, ce qui est absurde.

Exercice 11. Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite dans $\mathbf{R}_+$. Soit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ l'espace des suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans $\mathbf{K}$ vérifiant $\sum_{n\geqslant 1} a_n|x_n|^2 < +\infty$. Alors $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ est un espace vectoriel. Pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$, la série de terme général $a_n\bar{x}_n y_n$ est absolument convergente. Sa somme sera notée $\langle|\rangle_{\mathbf{a}}$. $\langle|\rangle_{\mathbf{a}}$ est une forme sesquilinéaire, symétrique hermitienne et positive. À quelles conditions (nécessaires et suffisantes) sur $\mathbf{a}$ est-ce un produit scalaire hermitien ? Le sous-espace $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ est dense dans $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ et $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ est un espace de Hilbert.

Exercice 12. Soient $\mathbf{a} = (a_n)_{n\geqslant 1}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites dans $\mathbf{R}_+$ et reprenons les espaces $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$, $\ell^2_{\mathbf{b},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ de l'exercice précédent. À quelles conditions sur $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$, l'application identité de $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ se prolonge t-elle en une application linéaire continue de $\ell^2_{\mathbf{a},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$ dans $\ell^2_{\mathbf{b},\mathbf{K}}(\mathbf{N})$? À quelles conditions ce prolongement est-il un isomorphisme ? Ce prolongement est il injectif ? À quelles conditions est-il surjectif ? À quelles conditions son image est-elle fermée ? En déduire une application linéaire continue injective et d'image dense mais pas surjective entre deux espaces de Hilbert.

Exercice 13. Théorème de Lax-Milgram

Soit H un espace de Hilbert et soit Φ une forme sesquilinéaire continue sur H, qu'on suppose *coercive*, i.e. telle qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle :

$$\Phi(v, v) \geqslant C \parallel v \parallel^2$$

pour tout $v \in H$. Montrer que l'opérateur continu qui représente Φ est bijectif, d'inverse continu.

Notons A l'opérateur en question : on a $\Phi(x, y) = \langle x|A(y)\rangle$ pour tous $x, y \in H$. Par le cours, l'opérateur A est continu et il est injectif car pour $v \in H$, on a :

$$C \parallel v \parallel^2 \leqslant \Phi(v, v) = \langle v|A(v)\rangle \leqslant \parallel v \parallel \cdot \parallel A(v) \parallel,$$

par Cauchy-Schwarz pour la dernière inégalité, impliquant : $(*)$ $\parallel A(v) \parallel \geqslant C \parallel v \parallel$. L'image de A est fermée car si $y = \lim_{n\to\infty} A(x_n)$ avec $x_n \in H$, la suite des $A(x_n)$ est de Cauchy, et donc celle des x_n également par $(*)$. En notant x la limite de cette dernière suite (H est complet car hilbertien), on a par continuité de A : $y = A(x)$. Maintenant, si v est orthogonal à $\mathrm{Im}(A)$, on a :

$$C \parallel v \parallel^2 \leqslant \Phi(v, v) = \langle v|A(v)\rangle = 0,$$

et donc $v = 0$. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(A)$ est d'orthogonal trivial, donc est dense dans H. Mais comme il est fermé on a : $\mathrm{Im}(A) = H$. Ainsi A est surjectif, donc bijectif par ce qui précède, et en faisant $v = A^{-1}(y)$ dans $(*)$ on en déduit que A^{-1} est continu, de norme $\leqslant \frac{1}{C}$.