MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 7 : Techniques de calcul intégral.

Exercices à préparer pour la séance du 16 juin 2017:
exercices 1, 3, 5 et 6

Exercice 1. On note $C :=]-1,1[\times]-1,1[$ et on considère la fonction f définie sur $C - \{(0,0)\}$ par la formule

$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

1) Les fonctions $x \mapsto f(x,y)$ et $y \mapsto f(x,y)$ sont-elles intégrables sur $]-1,1[$ pour $y \neq 0$ et $x \neq 0$ respectivement ? Calculer

$$\int_{]-1,1[} f(x,y)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{]-1,1[} f(x,y)\,dy \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Les fonctions partielles proposées sont intégrables car restrictions à $]-1;1[$ de fonctions de classe C^∞ sur $[-1;1]$. Les intégrales demandées sont nulles car les fonctions intégrées sont impaires et le domaine d'intégration est symétrique par rapport à 0.

2) Calculer

$$\int_{]-1,1[} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \quad \text{pour tout} \quad y \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_{]-1,1[} |f(x,y)|\,dy \quad \text{pour tout } x \neq 0.$$

Pour $x \neq 0$, on a

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = |x| \int_0^1 \frac{2y\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} = |x| \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(x^2+t)^2},$$

la dernière égalité provenant du changement de variable $t = y^2$. On en conclut que :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x||y|}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y = |x|\,\Big(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\Big).$$

3) La fonction f est-elle intégrable sur C ?

La fonction partielle $y \mapsto \int_{]-1,1[} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x = |y|\,\big(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{1+y^2}\big)$ n'est intégrable sur $]-1;1[$ pour aucun $x \neq 0$ car $y \mapsto \frac{|y|}{y^2}$ ne l'est pas (alors que $y \mapsto \frac{|y|}{1+y^2}$ l'est). Si f était intégrable sur C, alors $|f|$ le serait aussi et on pourrait lui appliquer le théorème de Fubini (point (ii) dans le cours), qui impliquerait l'intégrabilité de la fonction partielle précédente pour presque tout x : c'est exclu.

Exercice 2. On considère la fonction g définie sur $]0,1[\times]0,1[$ par la formule

$$g(x,y) := \begin{cases} +2^{2n} & \text{si} \quad 2^{-n} < x < 2^{-n+1} \quad \text{et} \quad 2^{-n} < y < 2^{-n+1}, \quad n \geqslant 1 \\ -2^{2n+1} & \text{si} \quad 2^{-1-n} < x < 2^{-n} \quad \text{et} \quad 2^{-n} < y < 2^{1-n}, \quad n \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Calculer

$$\int_{]0,1[}\left(\int_{]0,1[} g(x,y)\,\mathrm{d}x\right) dy \quad \text{et} \quad \int_{]0,1[}\left(\int_{]0,1[} g(x,y)\,\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

2) Expliquer le résultat.

Exercice 3. Soient f et g deux fonctions positives et mesurables sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$.

1) Calculer

$$\iint_{\Omega\times\Omega} \big(f(x)g(y) - f(y)g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

en fonction de

$$\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Pour tout $(x,y) \in \Omega\times\Omega$, on a

$$(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 = f(x)^2g(y)^2 + f(y)^2g(x)^2 - 2f(x)f(y)g(x)g(y).$$

d'où l'égalité

$$\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\iint_{\Omega\times\Omega} f(x)f(y)g(x)g(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega\times\Omega} f(x)^2g(y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{\Omega\times\Omega} f(y)^2g(x)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

En appliquant le théorème de Tonelli, on obtient donc

$$\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\left(\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 = 2\int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

2) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec son cas d'égalité.

Si $\displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = +\infty$, on en déduit que

$$\int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x = +\infty$$

et donc on a bien

$$\left(\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Si $\displaystyle\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}\left(\int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x\int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y)-f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant \int_\Omega f(x)^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_\Omega g(x)^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De plus on voit que l'égalité a lieu si et seulement si

$$\iint_{\Omega\times\Omega}(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Cette égalité a lieu si et seulement si la fonction $(x,y) \mapsto f(x)g(y) - f(y)g(x)$ est nulle presque partout. On veut montrer que ceci implique l'existence de $(a,b) \neq (0,0)$ dans $[0,+\infty[^2$ tel que $af(x) = bg(x)$ pour presque tout x. Soit Z l'ensemble des $(x,y) \in \Omega \times \Omega$ tels que $f(x)g(y) - f(y)g(x) \neq 0$, cet ensemble est négligeable. On peut également supposer que f n'est pas nulle presque partout. Il existe alors $x \in \Omega$ tel que $f(x) \neq 0$ et $Z_x = \{y \in \Omega,\, (x,y) \in Z\}$ est négligeable. Mais alors $f(x)g(y) = g(x)f(y)$ pour presque tout $y \in \Omega$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que f' soit intégrable sur $]0,+\infty[$. Calculer

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, \mathrm{d}x,$$

pour tous $a, b > 0$.

Comme f est $\mathcal{C}^1$, on a, pour $a, b, x > 0$,

$$f(bx) - f(ax) = \int_{ax}^{bx} f'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Par changement de variable, on en déduit

$$f(bx) - f(ax) = x \int_a^b f'(xt)\, \mathrm{d}t,$$

ce qui nous donne

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_{]0,+\infty[} \int_a^b f'(xt)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Par ailleurs on a, par Tonelli :

$$\int_{]0,+\infty[\times[a,b]} |f'(xt)|\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{]0,+\infty[} |f'(xt)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_a^b x^{-1} \int_{]0,+\infty[} |f'(t)|\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x < +\infty$$

puisque f' est intégrable sur $]0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de Fubini pour obtenir

$$\int_{]0,+\infty[} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\, \mathrm{d}x = \int_a^b \int_{]0,+\infty[} x^{-1} f(t)\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \ln(\frac{b}{a}) \int_{]0,+\infty[} f'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Exercice 5. Produit de convolution Soient $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.
1) Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^N$, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbf{R}^N$. Montrer que la fonction $f \star g$ définie p.p. sur $\mathbf{R}^N$ par la formule

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, \mathrm{d}y,$$

est intégrable sur $\mathbf{R}^N$.

On considère la fonction $\Phi : (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$. Elle est limite p.p. de fonctions continues sur $(\mathbf{R}^N)^2$ car f et g sont mesurables ; ainsi Φ est mesurable. On calcule en utilisant Tonelli :

$$\int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} |\Phi(x,y)|\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)| \cdot |g(y)|\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\; \mathrm{d}x \right) |g(y)|\; \mathrm{d}y.$$

Or, par changement de variable : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} |\, f(x-y)\,|\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} |\, f(x)\,|\, \mathrm{d}x$, qui est indépendant de y, et donc finalement

$$\int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} |\Phi(x,y)|\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} |\, f(x)|\, \mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbf{R}^N} |g(x)|\, \mathrm{d}x < +\infty,$$

par hypothèse d'intégrabilité sur f et g. On en conclut que Φ est intégrable (sur $(\mathbf{R}^N)^2$) ; par Fubini, cela implique d'abord – point (i) avant la formule d'interversion – que la fonction partielle proposée $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable elle aussi (sur $\mathbf{R}^N$), puis – point (ii) avant la formule d'interversion – que $f \star g$ l'est aussi.

2) Montrer que

$$\int_{\mathbf{R}^N} (f\star g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x \int_{\mathbf{R}^N} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Le premier point (application de Tonelli) a permis de voir que la fonction Φ était intégrable. On a ensuite utilisé les points théoriques de Fubini pour justifier les intégrabilités nécessaires. On finit en appliquant la formule d'interversion de Fubini.

Plus précisément, on fait les mêmes calculs que pour 1. (presque dans le même ordre), mais sans les valeurs absolues :

$$\int_{\mathbf{R}^N} (f\star g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} \Phi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N}\left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{d}x\right) g(y)\,\mathrm{d}y.$$

Or, par changement de variable (à y fixé) on a : $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x$, qui est indépendant de y, et donc finalement

$$\int_{\mathbf{R}^N} (f\star g)(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x \cdot \int_{\mathbf{R}^N} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

3) Vérifier que, pour tous $f,g,h \in \mathcal{L}^1(\Omega;\mathbf{C})$, l'on a

$$f\star g = g\star f \qquad \text{et} \qquad f\star(g\star h) = (f\star g)\star h \quad \text{p.p. sur } \Omega\,.$$

Déjà, les rôles de f et g sont symétriques, donc on peut définir aussi $g * f$. Ces produits de convolution sont des fonctions intégrables, qu'on peut donc à nouveau convoler avec des fonctions intégrables... ceci justifier l'existence de tous les produits de convolutions de la question, ainsi que l'usage des formules d'interversion de Fubini dans ce qui suit.

On a :

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad (g*f)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\,\mathrm{d}y$$

et l'égalité se voit en appliquant de changement de variable $y' = x-y$ dans l'une ou l'autre des deux intégrales.

Il reste à comparer $\big(f\star(g\star h)\big)(x)$, soit :

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)(g\star h)(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^N} g(y-z)h(z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)g(y-z)h(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$$

et $\big((f\star g)\star h\big)(x)$, soit :

$$\int_{\mathbf{R}^N} (f\star g)(x-z)h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}^N}\left(\int_{\mathbf{R}^N} f(x-y-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\right) h(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(x-z-t)g(t)h(z)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z,$$

ce qui se fait avec le changement de variable $t = y - z$ dans l'intégrale de la fin de la première ligne.

Exercice 6. 1) Montrer que $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

On est dans un cas très favorable car la fonction intégrée est positive ; elle est en outre mesurable car elle continue sur $[0;1]^2$ au point $(1,1)$ près (négligeable). On peut donc appliquer le théorème de Tonelli, qui donne la première des égalités qui suivent :

$$I = \iint_{[0;1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \frac{dy}{(1-xy)}\Big)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(\int_0^1 \frac{x dy}{(1-xy)}\Big)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(\int_0^x \frac{dz}{(1-z)}\Big)\,dx,$$

la dernière égalité provenant du changement de variable (très classique, d'une variable) $z = xy$. Noter qu'on se permet de diviser par x dans le calcul d'intégrale car l'annulation de x n'a lieu que sur un ensemble négligeable (de dimension 1) de $C = [0;1]^2$ (de dimension 2). Bref, on continue :

$$\iint_{[0;1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \int_0^1 \frac{1}{x}\Big(\int_0^x \frac{dz}{(1-z)}\Big)\,dx = \int_0^1 -\frac{\ln(1-x)}{x}\,dx.$$

On se rappelle maintenant qu'on a le développement en série entière $\displaystyle -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$. On est dans un cas très favorable car les fonctions de cette série entière sont continues et positives sur l'intervalle considéré, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone de Beppo Levi pour conclure après interversion somme-intégrale.

Variante : on applique d'abord Beppo Levi pour obtenir la dernière égalité dans ce qui suit :

$$I = \iint_{[0;1]^2} \frac{dx\,dy}{1-xy} = \iint_{[0;1]^2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n y^n\,dxdy = \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{[0;1]^2} x^n y^n\,dxdy,$$

puis Tonelli pour avoir $\displaystyle\iint_{[0;1]^2} x^n y^n\,dxdy = \left(\int_0^1 x^n\,dx\right)^2 = \frac{1}{(n+1)^2}$.

2) On veut calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Effectuer dans l'intégrale précédente le changement de variables $x = u - v$, $y = u + v$, puis poser $u = \cos t$.

Le premier changement de variables proposé est un changement linéaire en dimension 2. Précisément, on introduit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$: c'est une matrice de déterminant 2 et d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, et le changement de variables s'écrit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. Pour mettre en place l'application du théorème de changement de variables, il faut voir A comme un difféomorphisme à valeurs dans le domaine d'intégration initial $C = [0;1]^2$. Le domaine d'intégration en u et v est l'image réciproque de C par la bijection A, autrement dit le quadrilatère $Q = A^{-1}(C)$ de sommets $(0,0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(1,0)$ et $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ dans le plan de coordonnées (u,v). Les applications A et A^{-1}

sont évidemment de classe C^1. On peut donc appliquer le théorème de changement de variables pour obtenir :

$$I = \iint_C \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy} = \iint_Q \frac{2\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{1-u^2+v^2}.$$

Avec le découpage $Q = \{0 \leqslant u \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } |v| \leqslant u\} \cup \{\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant 1 \text{ et } |v| \leqslant 1-u\}$ (faire un dessin !) et le changement de variable $u = \cos(t)$ (et donc $\mathrm{d}u = -\sin(t)\mathrm{d}t$), on obtient :

$$I = \iint_D \frac{2\,|\sin(t)|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v}{1-\cos^2(t)+v^2},$$

pour $D = \{(t,v) : \frac{\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ et } |v| \leqslant \cos(t)\} \cup \{(t,v) : 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{3} \text{ et } |v| \leqslant 1-\cos(t\}$. Bref :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \int_{-1+\cos(t)}^{1-\cos(t)} \frac{2\sin(t)}{\sin^2(t)+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\cos(t)}^{\cos(t)} \frac{2\sin(t)}{\sin^2(t)+v^2}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} [\arctan(\frac{v}{\sin(t)})]_{-1+\cos(t)}^{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t + 2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} [\arctan(\frac{v}{\sin(t)})]_{-1+\cos(t)}^{1-\cos(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme vaut $4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan(\frac{1-\cos(t)}{\sin(t)})\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\big(\tan(\frac{t}{2})\big)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{9}$ alors que le second vaut $4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \arctan(\frac{\cos(t)}{\sin(t)})\,\mathrm{d}t = 4\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2}-t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{18}$.

Tout ceci pour conclure que $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = I = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 7. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto e^{-|x|}$.

C'est du calcul :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^0 e^{x}e^{-ix\xi}\,\mathrm{d}x.$$

Par changement de variable pour le second terme, cela donne :

$$\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x(1+i\xi)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} e^{-x(1-i\xi)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

2) $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.

L'idée est d'utiliser la formule d'inversion de Fourier car la fonction proposée, disons g, est égale à la moitié de la transformée de Fourier $\hat{f}$ obtenue précédemment. On écrit donc la formule d'inversion pour f :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} 2g(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)e^{-i(-x)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi}\cdot\hat{g}(-x).$$

Bref : $\hat{g}(x) = \pi e^{-|x|}$.

3) $h : x \mapsto x\, e^{-x^2/2}$.

Là aussi l'idée est d'utiliser une belle propriété calculatoire de la transformation de Fourier (lien entre dérivation et multiplication par une variable). On remarque que $h(x) = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}(x)$ où $H(x) = e^{-x^2}$. Ainsi : $\hat{h}(\xi) = \widehat{-H'}(\xi) = -i\xi\widehat{H}(\xi)$. La fonction H est une fonction gaussienne : admettons provisoirement que pour $\alpha > 0$ et $g_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ alors $\widehat{g_\alpha}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\frac{\xi^2}{4\alpha}}$. Ici $H = g_{\frac{1}{2}}$, ce qui donne : $\widehat{H}(\xi) = \sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, et finalement : $\hat{h}(\xi) = -\sqrt{2\pi}i\xi e^{-\frac{\xi^2}{2}}$.

Voici maintenant une façon de calculer une transformée de Fourier de fonction gaussienne. L'idée peut être utile dans d'autres situations et consiste à voir que la fonction g_α satisfait une équation différentielle, à savoir :

$$g'_\alpha(x) = -2\alpha x g_\alpha(x).$$

Vu les décroissances à l'infini des fonctions en jeu, on peut prendre la transformée de Fourier des deux membres de l'égalité ci-dessus pour obtenir :

$$\widehat{g'_\alpha}(\xi) = -2\alpha\widehat{x g_\alpha(x)}(\xi),$$

ce qui donne, en simplifiant par i :

$$\xi\widehat{g_\alpha}(\xi) = -2\alpha\widehat{g_\alpha}'(\xi),$$

soit une autre équation différentielle, cette fois pour $\widehat{g_\alpha}$, qu'on réécrit : $\widehat{g_\alpha}'(\xi) = -\frac{\xi}{2\alpha}\widehat{g_\alpha}(\xi)$, et qui s'intègre en : $\widehat{g_\alpha}(\xi) = \widehat{g_\alpha}(0)e^{\frac{-\xi^2}{4\alpha}}$ avec $g_\alpha(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ par changement de variable dans un calcul du cours.

Moralité : la famille des fonctions gaussiennes est caractérisée par une équation différentielle d'un certain type, et ce type d'équations différentielles est préservé par passage à la transformée de Fourier (car la transformation de Fourier échange – aux constantes près – multiplication par une variable et dérivation). Ainsi la transformation de Fourier préserve globalement la famille des fonctions gaussiennes, mais pas les paramètres (pour la détermination desquels on doit faire des calculs).

Exercice 8. Soient $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$. On rappelle que $f \star g \in L^1(\mathbf{R}^N; \mathbf{C})$.

1) Montrer que $\widehat{f \star g} = \hat{f}\,\hat{g}$.

Si $x \in \mathbf{R}^N$, on a

$$\widehat{f\star g}(x) = \int_{\mathbf{R}^N}\int_{\mathbf{R}^N} f(u-t)g(t)e^{-x\cdot u}\,\mathrm{d}t\mathrm{d}u = \int_{\mathbf{R}^N\times\mathbf{R}^N} f(u)g(t)e^{-x\cdot(u+t)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \hat{f}(x)\hat{g}(x).$$

L'application du théorème de Fubini est ici justifiée par le fait que $f\star g \in L^1(\mathbf{R}^N, \mathbf{C})$.

2) Pour tout $a > 0$, on pose

$$G_a(x) := \frac{1}{(2\pi a)^{N/2}}e^{-|x|^2/2a}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^N.$$

Calculer $G_a \star G_b$ pour tous $a, b > 0$.

On commence par calculer la transformée de Fourier de G_a. Cela donne

$$\hat{G}_a(x) = \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\frac{1}{2a}\langle t,t\rangle - \mathrm{i}\langle x,t\rangle}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(2\pi a)^{\frac{N}{2}}}\int_{\mathbf{R}^N} e^{-\langle\frac{t}{\sqrt{2a}}+\mathrm{i}\sqrt{\frac{a}{2}}x\rangle - \frac{a}{2}|x|^2}\,\mathrm{d}t = e^{-\frac{a}{2}|x|^2}.$$

Ainsi $\widehat{G_a \star G_b} = \hat{G}_a \hat{G}_b = \hat{G}_{a+b}$ on en déduit donc que $G_a \star G_b = G_{a+b}$.

3) Peut-on trouver $f \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ telle que $f \star g = g$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$?

S'il existe une telle fonction, alors on a $\hat{f}\hat{g} = \hat{g}$ pour tout $g \in L^1(\mathbf{R}^N,\mathbf{C})$. En prenant par exemple $g = G_1$, on voit que l'on doit avoir $\hat{f} = 1$. Ceci est impossible car d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, $\hat{f}(x)$ tend vers 0 quand $|x|$ tend vers $+\infty$.

4) Peut-on trouver $f, g \in L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ telles que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ (i.e. dans $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$) et $f \star g = 0$?

Soient φ et ψ deux fonctions C^∞ à supports compacts de supports disjoints et non nulles. On pose $f(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(t) e^{ix\cdot t}\,dt$ et $g(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \psi(t) e^{ix\cdot t}\,dt$. Comme φ et ψ sont C^∞ à supports compacts, toutes leurs dérivées partielles sont dans L^1, ce qui prouve que pour tout n, on a $\lim_{|x|\to+\infty} |x|^n f(x) = 0$, de même pour g. Ainsi les fonctions f et g sont dans L^1, et par inversion de Fourier, on a $\hat{f} = \varphi$ et $\hat{g} = \psi$. Ainsi $\widehat{f \star g} = \varphi\psi = 0$ et donc $f \star g = 0$. Comme φ et ψ sont non nulles, f et g le sont aussi.

5) Résoudre dans $L^1(\mathbf{R}^N;\mathbf{C})$ l'équation $f \star f = f$, d'inconnue f.

Si $f \star f = f$, alors $\hat{f}^2 = \hat{f}$. Ceci implique que la fonction $\hat{f}$ ne prend que les valeurs 0 et 1. Comme par ailleurs $\hat{f}$ est continue et que $\mathbf{R}^N$ est connexe, on a $\hat{f} = 0$ ou $\hat{f} = 1$. Le cas $\hat{f} = 1$ est exclus d'après le théorème de Riemann-Lebesgue, on a donc $\hat{f} = 0$ et la formule d'inversion de Fourier implique $f = 0$.

Exercice 9. 1) Donner un exemple de fonction f intégrable sur $\mathbf{R}^N$ et à valeurs réelles, telle que f et $\hat{f}$ soient p.p. strictement positives sur $\mathbf{R}^N$.
2) Pour toute fonction f mesurable sur $\mathbf{R}^N$ et à valeurs complexes, on note $\tilde{f}$ la fonction définie par $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$. Calculer la transformée de Fourier de $\tilde{f}$, puis de $f \star \tilde{f}$ (utiliser la question 1) de l'exercice 10).
3) Reprendre la question 1) à la lumière du résultat de la question 2).

Exercice 10. Soit $P \subset \mathbf{R}^N$. Montrer que $\mathbf{1}_P$ est p.p. égale à une fonction continue qui tend vers 0 à l'infini, si et seulement si P est négligeable.

Exercice 11. Soit $f \in L^1(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Supposons qu'il existe $K \subset \mathbf{R}$ compact tel que $f(x) = 0$ p.p. sur $\mathbf{R} - K$. Montrer que la transformée de Fourier $\hat{f}$ admet un prolongement à $\mathbf{C}$ qui est développable en série entière en tout point de $\mathbf{C}$.

Exercice 12. Pour $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, on note $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
1) Soit $E(x) = \frac{e^{-|x|}}{|x|}$, montrez que $E \in L^1(\mathbf{R}^3)$.

On calcule en coordonnées sphériques

$$\int_{\mathbf{R}^3} |E(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-r}}{r} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi \int_0^{+\infty} r e^{-r}\mathrm{d}r < +\infty.$$

2) On dit que $f : \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbb{C}$ est à symétrie sphérique si la valeur de $f(x)$ ne dépend que de $|x|$, ou de manière équivalente si pour toute rotation R de $\mathbf{R}^3$, $f(Rx) = f(x)$. Montrez que si $f \in L^1(\mathbf{R}^3)$ est à symétrie sphérique, alors $\hat{f}$ aussi.

Soit R une rotation (i.e. $R^t R = \mathrm{Id}$) et donc $|\det R| = 1$. On calcule par changement de variable $x = Ry$:

$$\hat{f}(R\xi) = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(x\cdot R\xi)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(Rx\cdot R\xi)} f(Ry)|\det R|\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^3} e^{-i(y\cdot\xi)} f(y)\,\mathrm{d}y = \hat{f}(\xi).$$

3) Calculez $\widehat{E}$. On fera le calcul en coordonnées sphériques en choisissant $\xi = ae_3$.

Par symétrie sphérique, il suffit de faire le calcul pour $\xi = ae_3$. Alors en sphérique

$$x = \left| \begin{array}{l} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{array} \right. ,$$

on calcule $\xi \cdot x = ar\cos\theta$ d'où :

$$\begin{aligned} \widehat{E}(\xi) &= \int_0^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{e^{-r}}{r} e^{-iar\cos\theta}\,\sin\theta \mathrm{d}\theta\, r^2 \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 2\pi \int_0^{+\infty} re^{-r}\left[\frac{e^{-iar\cos\theta}}{iar}\right]_0^{\pi} \mathrm{d}r \\ &= -\frac{2i\pi}{a} i \int_0^{+\infty} e^{-r}\left[e^{iar} - e^{-iar}\right]\,\mathrm{d}r = -\frac{2i\pi}{a}\left\{\frac{1}{1-ia} - \frac{1}{1+ia}\right\} = \frac{4\pi}{1+a^2} \end{aligned}$$

et donc

$$\widehat{E}(\xi) = \frac{4\pi}{1+|\xi|^2}.$$