MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 6 : Intégration des fonctions mesurables.
Exercices à préparer pour la séance du 9 juin 2017:
exercices 1, 2, 4 et 6

Sauf mention du contraire, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Dans les corrections qui suivent, les fonctions qu'on intègre sont obtenues à partir d'opérations algébriques (éventuellement de prise de min ou de max) sur des fonctions évidemment mesurables – par exemple parce que ces dernières sont continues ou fonctions caractéristiques de parties mesurables (comme des intervalles de $\mathbf{R}$) – ou limites de suites de telles fonctions. En d'autres termes, la vérification de leur mesurabilité ne pose pas de problème, comme annoncé en cours.

Exercice 1. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$, où

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]},$$

est une suite croissante.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante consiste à montrer que pour tout nombre réel x la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ l'est. Pour $x < 0$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geqslant 0$; par ailleurs, on a $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour la demi-droite positive, il faut y regarder d'un peu plus près ; on note $E(x)$ la partie entière d'un nombre réel x. Pour $n \leqslant E(x)$, on a $f_n(x) = 0$; pour $n > E(x)$, on a $f_n(x) = \exp\big(\log(1 - \frac{x}{n})\big) > 0$, donc il s'agit de voir que pour $x > 0$ fixé la suite des $\exp\big(n \log(1 - \frac{x}{n})\big)$ est croissante.

Pour $n \in \mathbf{N} - \{0\}$, on regarde la fonction auxiliaire $\varphi : [0; n[\to \mathbf{R}$ définie par

$$\varphi(x) = (n+1)\log(1 - \frac{x}{n+1}) - n\log(1 - \frac{x}{n}).$$

On a

$$\varphi'(x) = -(\frac{n+1}{n+1})\frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}} - (\frac{-n}{n})\frac{1}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{1}{1 - \frac{x}{n}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{n+1}} \geqslant 0,$$

ce qui implique que $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$, et qui prouve la monotonie cherchée.

2) Déterminer, pour tout $x \geqslant 0$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$.

En utilisant un équivalent classique, ou encore un développement limité à l'ordre 1 en 0 de $t \mapsto \log(1+t)$ avec $t = -\frac{1}{n}$, on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^{-x}$.

3) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$, la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$a_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\, \mathrm{d}x,$$

et calculer sa limite éventuelle.

Tout est en place pour appliquer le théorème de convergence croissante de Beppo-Levi, une fois qu'on a remarqué que a_n pouvait s'écrire

$$a_n = \int_{\mathbf{R}} f_n(x) e^{\alpha x}\, \mathrm{d}x.$$

En effet, par 1, quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$, la suite numérique $\big(f_n(x)e^{\alpha x}\big)_{n\geqslant 0}$ est croissante à $x \in \mathbf{R}$ fixé car $e^{\alpha x} > 0$. Ainsi la suite $\big(f_n(x)e^{\alpha x}\big)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction $x \mapsto e^{(\alpha-1)x}$. Par Beppo Levi, qui permet d'intervertir limite et signe somme, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge donc dans $\overline{\mathbf{R}}_+$ vers l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} e^{(\alpha-1)x}\,\mathrm{d}x$, qui vaut $+\infty$ si $\alpha \geqslant 1$ et $\frac{1}{1-\alpha}$ si $\alpha < 1$.

Exercice 2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que $e^x \geqslant (1+\frac{x}{n})^n$ pour tout $x > 0$.

On doit comparer e^x et $\exp\big(n\log(1+\frac{x}{n})\big)$, soit x et $n\log(1+\frac{x}{n})$, et à nouveau on regarde une fonction auxiliaire, à savoir φ définie par $\varphi(x) = x - n\log(1+\frac{x}{n})$. Puisque la fonction exponentielle est croissante, il s'agit de voir que φ est positive ou nulle. On a $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+\frac{x}{n}}$, qui est $\geqslant 0$ puisque $x \geqslant 0$; et donc $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) = 0$, ce qu'on voulait vérifier.

2) Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$, la nature de la suite définie pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ par

$$b_n := \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x,$$

et calculer sa limite éventuelle.

On introduit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$, définie par

$$f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,n]}(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x}.$$

À nouveau par un arguement de développement limité à l'ordre 1, ou par un équivalent classqiue pour le logarithme au voisinage de 1, on voit qu'on a convergence ponctuelle – et donc *a fortiori* presque partout – de la suite des fonctions f_n vers la fonction $x \mapsto e^{(1-\alpha)x}$ sur $[0;+\infty[$. D'après 1, on a aussi la majoration

$$f_n(x) \leqslant e^{(1-\alpha)x},$$

qui est indépendante de n et valable pour tout $x \in \mathbf{R}$.

Pour $\alpha > 1$, cette majoration est utile car la fonction majorante est intégrable et l'on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour intervertir limite et intégrale, ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \int_{\mathbf{R}_+} e^{(1-\alpha)x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}$.

Pour $\alpha \leqslant 1$, la majoration n'a pas d'intérêt et l'on cherche plutôt à prouver que la limite des a_n est $+\infty$. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ pour laquelle on aurait

$$\sup_{n\geqslant 0} \int_{\mathbf{R}} f_{\varphi(n)}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Mais par le lemme de Fatou, cela impliquerait :

$$\int_{\mathbf{R}_+} e^{(1-\alpha)x}\,\mathrm{d}x = \int \lim_{n\to\infty} f_{\varphi(n)}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_{\varphi(n)}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{n\geqslant 0} \int_{\mathbf{R}} f_{\varphi(n)}(x)\,\mathrm{d}x < +\infty,$$

en contradiction avec le fait que $x \mapsto e^{(1-\alpha)x}$ est non intégrable quand $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 3. Soit (f_n) une suite de fonctions positives dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Montrer que

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \text{ pour presque tout } x.$$

Puisque les fonctions considérées sont positives et mesurables (car intégrables), on peut appliquer le lemme de Fatou :

$$\int_{\mathbf{R}} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \leqslant \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x,$$

ce qui implique par hypothèse que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Comme toutes les fonctions f_n sont positives ou nulles, on en déduit que leur limite inférieure $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ l'est aussi (en raisonnant point par point) et donc que cette fonction $\underline{\lim}_{n\to\infty} f_n$ est nulle presque partout puisqu'elle est $\geqslant 0$ et d'intégrale nulle.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$.

1) On suppose que la fonction f est uniformément continue. Montrer que $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$.

On suppose que f ne tend pas vers 0 en $+\infty$. Ceci implique qu'on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ et une suite de nombres réels $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui tend vers $+\infty$, tels que $|\,f(x_n)\,| \geqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant 0$. Quitte à extraire, on suppose aussi que $|\,x_{n+1} - x_n\,| \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Par continuité uniforme, il existe $\delta > 0$ (qu'on suppose $\leqslant \frac{1}{2}$) tel que $|\,x - x'\,| < \delta$ implique $|\,f(x) - f(x')\,| \leqslant \frac{\alpha}{2}$. Par inégalité triangulaire, pour tout $y \in [x_n - \delta; x_n + \delta]$ on a donc $|\,f(y)\,| \geqslant \frac{\alpha}{2}$. On peut alors minorer la fonction $|\,f\,|$ par la fonction caractéristique de la réunion des intervalles $[x_n - \delta; x_n + \delta]$ multipliée par $\frac{\alpha}{2} > 0$, et ceci implique que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} |\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x = +\infty$, en contradiction avec l'hypothèse d'intégrabilité de f. On raisonne de la même façon en $-\infty$.

2) On suppose simplement que la fonction f est continue. A-t-on nécessairement $f(x) \to 0$ lorsque $|x| \to +\infty$?

Si on veut prouver que non, le point 1 montre qu'il faut produire un contre-exemple qui sera nécessairement non uniformément continu. On peut aussi avoir l'idée de travailler avec une fonction $\geqslant 0$ et affine par morceaux pour simplifier le calcul de l'intégrale (qui doit être finie). Pour assurer la non convergence vers 0 en $+\infty$, il suffit de construire une fonction avec un graphe ayant des pics arbitrairement loin sur la droite réelle. La non continuité uniforme suggère enfin des pentes aribtrairement grandes pour les morceaux affines du graphe (sinon, la fonction est lipschitzienne).

Toutes ces considérations heuristiques suggèrent de regarder la suite des fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ définies par $f_n(x) = n^4\big(x - (n - \frac{1}{n^3})\big)$ si $x \in [n - \frac{1}{n^3}; n]$, $f_n(x) = n^4(n + \frac{1}{n^3} - x)$ si $x \in [n; n + \frac{1}{n^3}]$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs (faire un dessin). La fonction f qui nous intéresse est la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. Par le théorème de convergence monotone, on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$ et f a été construite pour avoir des pics de plus en plus haut le long de la demi-droite réelle positive.

Exercice 5. Trouver une suite de fonctions positives $(f_n)_{n\geqslant 0}$ dans $\mathcal{L}^1([0,1])$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

Peut-on trouver une telle suite avec f_n continues ? Peut-on remplacer l'intervalle $[0, 1]$ par $\mathbf{R}$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction telle que $f(x+1) = f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$. Montrer qu'il existe une fonction $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ telle que $F(x+1) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $f = F$ p.p. sur $\mathbf{R}$.

Par hypothèse

$$X = \{x \in \mathbf{R} : f(x+1) \neq f(x)\}$$

est négligeable. L'ensemble

$$Y = \{x + n : x \in X, n \in \mathbf{Z}\}$$

est un ensemble négligeable car on peut l'écrire comme la réunion dénombrable des translatés $X + n$ pour $n \in \mathbf{Z}$, et chaque translaté est négligeable par invariance de la mesure de Lebesgue par addition (si X est contenu dans Z mesurable de mesure nulle, alors $Z + n$ est une partie mesurable de mesure nulle contenant $X + n$). Une fonction convenable est alors la fonction F définie par $F(x) = f(x)$ pour $x \notin Y$ et $F(x) = 0$ pour $x \in Y$.

Exercice 7. Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert non vide et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$ telle que

$$\left| \int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x \right| = \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbf{R}$ telle que $f(x) = |f(x)| e^{i\theta}$ pour presque tout $x \in \Omega$.

On n'a rien à faire si $\displaystyle\int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$; on suppose désormais que cette intégrale est > 0. Dans ce cas, par hypothèse on peut écrire $\displaystyle\int_\Omega f(x) \, \mathrm{d}x = e^{i\theta} \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x$ pour un nombre réel θ convenable. On pose alors $g = e^{-i\theta} f$. Alors

$$\int_\Omega g(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega e^{-i\theta} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)| \, \mathrm{d}x = \int_\Omega |g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Ceci implique que la fonction mesurable positive $|g(x)| - \mathrm{Re}(g)$ est d'intégrale nulle sur Ω, et donc est nulle presque partout sur Ω. En revenant à la définition de g, on a donc presque partout sur Ω l'égalité $|f(x)| = e^{-i\theta} f(x)$.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ et tout $x > 0$, on pose

$$u_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}.$$

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, la série de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n(x)$ est absolument convergente. Calculer la somme de cette série.

On fixe $x > 0$. Alors $|u_n(x)| \leqslant e^{-nx} + 2e^{-2nx}$ et comme par exemple $n^2 \cdot (e^{-nx} + 2e^{-2nx}) \to 0$ quand $n \to +\infty$ on en déduit que la série numérique de terme général $u_n(x)$ est absolument convergente. La série de terme général e^{-nx} est géométrique de raison $e^{-x} < 1$; elle converge et sa somme vaut $\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}$. De même, série de terme général $-2e^{-2nx}$ converge vers $\frac{-2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}$. Finalement, la série numérique de terme général $u_n(x)$ converge vers

$$\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} - \frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1+e^{-x}) - 2e^{-2x}}{1-e^{-2x}} = \frac{e^{-x}(1-e^{-x})}{(1+e^{-x})(1-e^{-x})} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

b) Calculer

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_{]0,+\infty[} u_n(x)\,\mathrm{d}x\right) \quad \text{et} \quad \int_{]0,+\infty[}\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)\right)\mathrm{d}x\,.$$

Par le changement de variable $t = e^{-x}$, on a :

$$\int_{]0,+\infty[}\left(\sum_{n\geqslant 1} u_n(x)\right)\mathrm{d}x = \int_{]0;+\infty[}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_{]0;1[}\frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \log(2).$$

Par ailleurs, pour chaque indice n, on a :

$$\int_{]0,+\infty[} u_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0,$$

(on peut voir la nullité par changement de variable sans calcul d'intégrale, mais les intégrales sont faciles) et donc $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(\int_{]0,+\infty[} u_n(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0$.

c) Comment expliquez-vous le résultat du b) ?

On ne peut pas majorer par une fonction intégrable indépendante de n la suite des sommes partielles de la série de terme général $u_n(x)$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ et $a < b$. Calculer

$$\lim_{|x|\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} f(y)\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)\,\mathrm{d}y.$$

Comme le segment $[a;b]$ est borné, pour toute suite (x_n) de nombres réels tendant vers $+\infty$, on a $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{1}_{[a,b]}(x_n - y) = 0$. En outre, pour chaque n la fonction f_n : $y \mapsto f(y)\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x_n - y)$ est majorée en valeur absolue par la fonction $|\,f\,|$, qui est intégrable par hypothèse sur f. Par convergence dominée, et puisque la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge ponctuellement vers 0, cela implique que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f(y)\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x_n - y)\,\mathrm{d}y = 0$. Ceci étant vrai pour toute suite (x_n) de nombres réels tendant vers $+\infty$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{\mathbf{R}} f(y)\,\mathbf{1}_{[a,b]}(x-y)\,\mathrm{d}y = 0$ et le cas où $x \to -\infty$ est similaire.

Exercice 10. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions positives dans $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ qui converge presque partout vers une fonction f qui appartient aussi à $\mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Supposons que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbf{R}} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

Exercice 11. Soit $p \geqslant 1$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions mesurables définies sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbf{R}^N$. On suppose que $|f_n|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et qu'il existe une fonction f définie sur Ω telle que $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ p.p. sur Ω. On suppose enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |f(x)|^p \,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que

$$2^{p-1}\left(|f|^p + |f_n|^p\right) - |f_n - f|^p \geqslant 0.$$

2) Montrer que

$$\int_\Omega |f(x) - f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 12. On veut prouver une version simple mais souvent suffisante du théorème de convergence dominée. On se donne $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions intégrables telles que :

(i) pour tout $x \in X$, la suite des $f_n(x)$ est convergente, disons de limite $f(x)$;

(ii) il existe une fonction μ-intégrable g telle que $|f_n| \leqslant g$ pour tout $n \geqslant 0$.

On veut voir que f est alors intégrable et qu'on a l'interversion $\displaystyle\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu$.

1) Justifier que f est intégrable et qu'il suffit de voir que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Cela vient juste de l'inégalité $\displaystyle\left|\int f - f_n \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu$.

2) Conclure en utilisant la suite des fonctions $2g - |f - f_n|$.

Par passage à la limite on a $|f| \leqslant g$, donc la suite proposée est une suite de fonctions positives, à laquelle on peut appliquer le lemme de Fatou pour obtenir :

$$\int \Big(\varliminf_{n\to\infty} 2g - |f - f_n|\Big)\mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \Big(\int (2g - |f - f_n|)\mathrm{d}\mu\Big),$$

soit en simplifiant par $2\displaystyle\int g\,\mathrm{d}\mu$:

$$0 \leqslant -\varlimsup_{n\to\infty} \int |f - f_n| \,\mathrm{d}\mu,$$

qui permet de conclure.