

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 5 : Théorie de la mesure.

Exercices à préparer pour la séance du 2 juin 2017:

exercices 1, 5, 7 et 11

Exercice 1. Soient X et Y des ensembles et soit $f : X \rightarrow Y$ une application. On se donne \mathcal{F} une collection de parties de Y . On veut montrer que l'image réciproque par f de la tribu engendrée par \mathcal{F} est la tribu de X engendrée par les images réciproques par f des éléments de \mathcal{F} ; autrement dit : $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) = \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F}))$.

Remarque : commençons par expliciter la convention du cours, qui consiste à appliquer le symbole f^{-1} non seulement à des parties de Y , mais aussi à des collections de parties de Y ; le résultat est alors une collection de parties de X . C'est un raccourci très utile.

1) Montrer que $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$.

Déjà, $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ contient \mathcal{F} . Ainsi, $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{F}))$ est une tribu qui contient $f^{-1}(\mathcal{F})$ et donc $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F}))$ par définition d'une tribu engendrée.

2) En utilisant l'ensemble des parties B de Y telles que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F}))$, prouver l'inclusion réciproque.

On note \mathcal{T}' l'ensemble des parties B de Y telles que $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F}))$. Par le dernier point de la section sur les tribus, on sait que \mathcal{T}' est une tribu elle-même. Celle-ci contient \mathcal{F} , et par conséquent $\mathcal{T}(\mathcal{F})$ par définition d'une tribu engendrée. Ceci permet finalement d'écrire : $f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{F})) \subset f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{F}))$, la dernière inclusion ayant lieu par définition de \mathcal{T}' .

3) Justifier qu'une application continue entre espaces métriques est mesurable pour les tribus boréliennes.

On se place dans le cas où X et Y sont des espaces métriques, disons munis des distances d_X et d_Y respectivement. On note \mathcal{O}_X (resp. \mathcal{O}_Y) l'ensemble des ouverts de X (resp. de Y) : c'est la *topologie* de X (resp. de Y). Par définition, la tribu borélienne \mathcal{B}_X de X (resp. \mathcal{B}_Y de Y) est la tribu engendrée par \mathcal{O}_X (resp. par \mathcal{O}_Y). On se donne maintenant une application continue $f : X \rightarrow Y$. Par la caractérisation topologique de la continuité, on a $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{O}_X$, ce qui implique $f^{-1}(\mathcal{O}_Y) \subset \mathcal{T}(\mathcal{O}_X)$ (puisque une tribu engendrée par une partie contient ladite partie) et finalement $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{O}_Y)) \subset \mathcal{T}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{B}_X$ (par minimalité des tribus engendrées). Maintenant, si on prend $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$ les deux points précédents impliquent que l'on a : $\mathcal{T}(f^{-1}(\mathcal{O}_Y)) = f^{-1}(\mathcal{T}(\mathcal{O}_Y)) = f^{-1}(\mathcal{B}_Y)$. En combinant cela avec l'inclusion précédemment obtenue, cela donne $f^{-1}(\mathcal{B}_Y) \subset \mathcal{B}_X$; ainsi, avec les conventions de la remarque initiale, on voit que l'image réciproque par f de tout borélien de Y est un borélien de X , autrement dit que f est mesurable.

Exercice 2. Prouver que $\mathbf{R} \times \{0\}$ est négligeable dans \mathbf{R}^2 . On pourra « découper » convenablement le problème.

L'indication suggère d'utiliser le fait qu'une réunion dénombrable de parties mesurables de mesure nulle est de mesure nulle. En voyant $\mathbf{R} \times \{0\}$ comme réunion de translations de pas entiers du segment $[0; 1] \times \{0\}$, on est donc ramené à prouver que $[0; 1] \times \{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 .

Pour cela, on va utiliser la caractérisation géométrique des ensembles négligeables.

Soit $\delta > 0$. L'idée est qu'en gros le segment unité $[0; 1]$ est recouvert par $\frac{1}{\delta}$ segments de longueur $\delta > 0$: ça ne peut pas être vrai au sens strict puisque $\frac{1}{\delta}$ n'est pas entier. Mais c'est presque vrai parce qu'il y a un (plus petit) entier N_δ dans l'intervalle $[\frac{1}{\delta}; \frac{1}{\delta} + 1]$, donc tel que $[0; 1]$ est recouvert par N_δ segments de longueur $\delta > 0$. On finit en voyant un segment de longueur δ comme la trace sur $\mathbf{R} \times \{0\}$ d'un carré de longueur d'arête δ de \mathbf{R}^2 . En effet, pour appliquer la caractérisation des ensembles négligeables pour la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^2 , on fait des calculs avec cette mesure. Il s'agit de majorer la mesure d'une réunion de carrés \mathbf{R}^2 dont la réunion recouvre $[0; 1] \times \{0\}$; on vient de voir qu'on peut choisir ces carrés en nombre égal à $N_\delta \leq \frac{1}{\delta} + 1$, et donc l'aire (= mesure de Lebesgue) de la réunion de ces carrés est $\leq \delta^2(\frac{1}{\delta} + 1)$ qui est $\leq 2\delta$ dès que $\delta \leq 1$. On conclut en faisant tendre δ vers 0.

Remarques. 1. Pour des entiers $d < D$, une adaptation facile de l'argument prouve l'énoncé du cours qui dit que $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^D . Comme auparavant, on se ramène à travailler sur $[0; 1]^d \times \{0\}$ dans \mathbf{R}^D . Le nombre minimal de cubes de dimension d et de longueur d'arête δ à utiliser pour recouvrir $[0; 1]^d$ est $\leq (\frac{1}{\delta} + 1)^d$ (pour voir cela, partir du « coin » qui est l'origine). On voit ensuite ces cubes de dimension d comme des traces sur $\mathbf{R}^d \times \{0\}$ de cubes de \mathbf{R}^D (et toujours de longueur d'arête δ). Ce qui fait marcher les choses est le fait que la formule du calcul de volume d'un cube de dimension D et de longueur d'arête δ est δ^D et que $D - d \geq 1$. En effet, pour $\delta \leq 1$ la mesure de la réunion de cubes de dimension D utilisée pour le recouvrement de $[0; 1]^d \times \{0\}$ est $\leq (\frac{1}{\delta} + 1)^d \delta^D \leq 2^d \delta^{D-d}$. On conclut en faisant $\delta \rightarrow 0$.

2. En utilisant une isométrie affine convenable de l'espace euclidien \mathbf{R}^D qui ramène tout sous-espace affine de dimension d sur celui étudié dans la remarque 1, on voit donc que tout sous-espace affine de dimension $< D$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue de \mathbf{R}^D . On utilise pour cela le fait qu'une isométrie affine préserve l'ensemble des boréliens et la mesure de chacun (argument de cubulation ou de changement de variable).

Exercice 3. Soit $\lambda \in]0, 1[$ un nombre réel et E_λ l'ensemble des nombres de la forme

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \varepsilon_n \lambda^n,$$

où $(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbf{N}}$.

- 1) Que peut-on dire de l'ensemble E_λ quand $\lambda \geq 1/2$?
- 2) Calculer la mesure de E_λ quand $\lambda < 1/2$.

Exercice 4. Existe-t-il deux ensembles de mesure nulle $A \subset [0, 1]$ et $B \subset [0, 1]$ tels que $A + B = [0, 1]$? (rappel : $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$).

Exercice 5. On considère l'intervalle $[0; 1]$.

- 1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert dense dans $[0, 1]$, disons O_ε , tel que $|O_\varepsilon| < \varepsilon$.

Plus généralement, on peut voir que tout intervalle de \mathbf{R} contient des ouverts de mesure de Lebesgue arbitrairement petite. On peut le faire avec l'intervalle \mathbf{R} , ce qui résoudra la question pour tous les intervalles par définition de la topologie induite. On fixe $\varepsilon > 0$. L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable, donc en bijection avec l'ensemble \mathbf{N} des entiers naturels : soit $n \mapsto q_n$ une telle bijection. Pour chaque entier $n \geq 0$, on considère l'intervalle $I_n =]q_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}; q_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$; c'est un ouvert, donc une partie mesurable, de mesure de Lebesgue égale à $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. La réunion $O_\varepsilon = \bigcup_{n \geq 0} I_n$

est un ouvert au titre de réunion d'ouverts, et par sous-additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue, on a : $|O_\varepsilon| \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$. Comme la partie $\mathbf{Q} = \{q_n\}_{n \geq 0}$ est dense dans \mathbf{R} , l'ouvert O_ε l'est *a fortiori*.

2) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé d'intérieur vide, disons F_ε , tel que $|F_\varepsilon| > 1 - \varepsilon$.

On raisonne cette fois dans $[0; 1]$ car la contrainte d'être de mesure de Lebesgue arbitrairement proche de 1 ne prend pleinement son sens que dans un intervalle de mesure de Lebesgue précisément égale à 1. Soit $\varepsilon > 0$ et soit U_ε un ouvert dense de $[0; 1]$ de mesure de Lebesgue $< \varepsilon$ (par exemple $U_\varepsilon = O_\varepsilon \cap [0; 1]$). Alors $F_\varepsilon = [0; 1] - U_\varepsilon$ est un fermé de $[0; 1]$ et il est mesurable dans \mathbf{R} car c'est aussi $[0; 1] - O_\varepsilon$. En outre, on a $[0; 1] = F_\varepsilon \sqcup U_\varepsilon$ (où le signe \sqcup désigne une réunion disjointe) donc la mesure de Lebesgue de F_ε est $> 1 - \varepsilon$. Enfin, F_ε est nécessairement d'intérieur vide car sinon il contiendrait un intervalle non vide, disons I , qui satisferait $I \cap U_\varepsilon = \emptyset$: c'est exclu par la densité de U_ε .

3) Existe-t-il dans $[0, 1]$, un fermé d'intérieur vide et de mesure de Lebesgue 1 ?

Soit A une partie (mesurable) de mesure de Lebesgue égale à 1. Alors A dense dans $[0; 1]$, sinon il existerait un intervalle I non vide, et donc de mesure $\alpha > 0$, tel que $I \cap A = \emptyset$. On aurait donc $A \sqcup I \subset [0; 1]$, impliquant $|A| \leq 1 - \alpha$: exclu. Si on suppose en outre que A est fermé, alors il vaut $[0; 1]$. Donc la réponse est : non, puisqu'on vient de voir qu'il n'existe pas de fermé strict de $[0; 1]$ de mesure de Lebesgue 1.

Exercice 6. Dans cet exercice, la mesure de Lebesgue est définie à partir de l'intégrale de Lebesgue. Il s'agit de retrouver des propriétés élémentaires des mesures au moyen de théorèmes d'intégration.

Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une suite dénombrable de sous-ensembles mesurables de \mathbf{R}^N .

1) On suppose la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ croissante. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |A_n| = \left| \bigcup_{n \geq 0} A_n \right|.$$

S'il y a un indice n pour lequel $|A_n| = +\infty$ c'est évident ; on exclut désormais ce cas. On introduit alors $B_n = A_n - A_{n-1}$, de sorte que $A_n = B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n$, et on applique le théorème de convergence monotone à $\sum_{k \geq 0} \mathbf{1}_{B_k}$.

2) On suppose la suite $(A_n)_{n \geq 0}$ décroissante et l'on suppose de plus que $|A_0| < +\infty$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |A_n| = \left| \bigcap_{n \geq 0} A_n \right|.$$

On applique la première question à la suite des $B_n = A_0 - A_n$.

Exercice 7. Théorème d'Egorov Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ un ouvert non vide tel que $|\Omega| < +\infty$ et soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions mesurables sur Ω , à valeurs dans \mathbf{C} , telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f,$$

p.p. sur Ω . On veut démontrer le résultat suivant.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble mesurable $U \subset \Omega$ tel que

$$|U - \Omega| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Autrement dit, on peut assurer la convergence uniforme de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f sur des parties mesurables de Ω dont le complémentaire est de mesure de Lebesgue arbitrairement petite.

1) Soit $\mathcal{Z} \subset \Omega$ un ensemble négligeable tel que toutes les fonctions f_n sont définies sur $\Omega - \mathcal{Z}$ et tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = f$ en tout point de $\Omega - \mathcal{Z}$. On note

$$S(n, k) := \bigcap_{i, j \geq n} \left\{ x \in \Omega - \mathcal{Z} : |f_i(x) - f_j(x)| < \frac{1}{k} \right\}$$

Montrer que, pour tout $k \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S(n, k)| = |\Omega|$.

Il est vrai qu'on peut supposer que chaque fonction f_n est définie sur Ω privé d'une partie négligeable \mathcal{Z}_n , c'est-à-dire de mesure de Lebesgue nulle. La réunion (dénombrable) de ces \mathcal{Z}_n reste négligeable et par hypothèse la convergence simple de $(f_n)_{n \geq 0}$ a lieu sur le complémentaire dans Ω d'une partie négligeable \mathcal{Z} contenant tous les \mathcal{Z}_n .

À k fixé, la suite des $S(n, k)$ est croissante en n pour la relation d'inclusion. En outre, chaque $S(n, k)$ est mesurable au titre d'intersection dénombrable d'images réciproques de $[0; \frac{1}{k}[$ par des fonctions mesurables $|f_i - f_j| : \Omega - \mathcal{Z} \rightarrow \mathbf{R}$. L'idée est d'appliquer la première question de l'exercice précédent, et pour cela on doit montrer que $\bigcup_{n \geq 0} S(n, k) = \Omega - \mathcal{Z}$. L'inclusion $\bigcup_{n \geq 0} S(n, k) \subset \Omega - \mathcal{Z}$ est évidente, et l'inclusion réciproque vient du fait que pour tout $x \in \Omega - \mathcal{Z}$ la suite des $f_n(x)$ est convergente, donc de Cauchy.

2) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que l'ensemble

$$U = \bigcap_{k \geq 1} S(n_k, k)$$

vérifie la propriété souhaitée.

La question précédente implique qu'on peut construire par récurrence une suite strictement croissante $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que $|\Omega - S(n_k, k)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$. On a alors : $\Omega - U = \bigcup_{k \geq 1} (\Omega - S(n_k, k))$, et par sous-additivité dénombrable, on en déduit que la mesure de

Lebesgue de $\Omega - U$ est $\leq \varepsilon$. Maintenant soit $\eta > 0$. Il existe $k \geq 1$ tel que $\frac{1}{k} < \eta$. Alors tout élément $x \in U$ est dans $S(n_k, k)$, ce qui permet d'écrire que pour tous $i, j \geq n_k$ on a : $|f_i(x) - f_j(x)| < \eta$. En faisant $j \rightarrow +\infty$ on obtient que $|f_i(x) - f(x)| \leq \eta$ pour tout $x \in U$ et tout $i \geq n_k$. Comme $\eta > 0$ était arbitraire, c'est la convergence uniforme sur U que l'on cherchait à prouver.

3) Le résultat reste-t-il vrai si $|\Omega| = +\infty$?

Non. Prenons la suite des fonctions caractéristiques des intervalles $[-n; n]$ pour $n \geq 1$: cette suite converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction constante égale à 1. Soit $F \subset \mathbf{R}$ un ensemble tel que la suite converge uniformément sur $\mathbf{R} - F$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on ait $\mathbf{1}_{[-n; n]}(x) \geq 1 - \varepsilon$ pour tout $x \notin F$. Si on choisit $\varepsilon < 1$, cela dit que $\mathbf{1}_{[-n; n]}(x) = 1$ pour tout $x \notin F$; en particulier $\mathbf{R} - [-N; N] \subset F$, ce qui empêche F d'être de mesure finie.

Exercice 8. Lemme de Borel-Cantelli Soit $(A_n)_{n \geq 0}$ une famille dénombrable de parties mesurables de \mathbf{R}^N telle que

$$\sum_{n \geq 0} |A_n| < +\infty$$

1) Montrer que presque tout $x \in \mathbf{R}^N$ appartient à au plus un nombre fini de A_n .

On considère la fonction $g = \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{A_n}$: g est somme d'une série de fonctions mesurables positives. Pour $x \in \mathbf{R}^N$, on a : x est dans une infinité de A_n si et seulement si $g(x) = +\infty$. Appliquons le théorème de convergence montone :

$$\int_{\mathbf{R}^N} g(x) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \sum_{n \geq 0} \mathbf{1}_{A_n}(x) dx = \sum_{n \geq 0} \int_{\mathbf{R}^N} \mathbf{1}_{A_n}(x) dx = \sum_{n \geq 0} |A_n| < +\infty.$$

La fonction g est donc intégrable et l'inégalité de Markov implique que $\{x \in \mathbf{R}^N : g(x) = +\infty\}$ est de mesure de Lebesgue nulle, autrement dit négligeable.

2) Soient $\varepsilon > 0$ et $C > 0$. Montrer que, pour presque tout $x \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$\left\{ (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^* : \left| x - \frac{p}{q} \right| \leq C q^{-2-\varepsilon} \right\},$$

est fini.

On travaille avec des $x \in [0; 1]$. On introduit la famille dénombrable des intervalles

$$I_{p,q} = \left[\frac{p}{q} - \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}; \frac{p}{q} + \frac{C}{q^{2+\varepsilon}} \right] \cap [0, 1] = \{x \in [0, 1] : |x - \frac{p}{q}| \leq C q^{-2-\varepsilon}\},$$

pour $q \in \mathbf{N}^*$ et $0 \leq p \leq q$. Alors

$$\sum_{p,q} |I_{p,q}| \leq \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^q \frac{2C}{q^{2+\varepsilon}} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{2C(q+1)}{q^{2+\varepsilon}} < +\infty$$

Exercice 9. Soient $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ ouvert non vide et $f \in \mathcal{L}^1(\Omega; \mathbf{C})$.

1) On suppose dans cette question que $\Omega = \mathbf{R}^N$. Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}^N} |f(x)| \mathbf{1}_{[R, +\infty[}(|x|) dx = 0.$$

2) Montrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |f(x)| \mathbf{1}_{[R, +\infty[}(|f(x)|) dx = 0.$$

3) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $A \subset \Omega$ mesurable

$$|A| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_A |f(x)| dx < \varepsilon.$$

4) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$. Pour tout $x \geq 0$, on note

$$F(x) := \int_{\mathbf{R}} f(y) \mathbf{1}_{[0,x]}(y) dy.$$

Montrer que F est uniformément continue.

Exercice 10. Soit $0 < \alpha < 1$ un nombre irrationnel et r la transformation de $[0, 1]$ dans lui-même définie par

$$r(x) = x + \alpha \quad \text{si} \quad x \leq 1 - \alpha \quad \text{et} \quad r(x) = x + \alpha - 1 \quad \text{sinon.}$$

1) Montrer que si $A \subset [0, 1]$ est un ensemble mesurable, alors $r^{-1}(A)$ est un ensemble mesurable de même mesure.

2) Montrer qu'un ensemble $A \subset [0, 1]$ qui intersecte chaque orbite $\{r^n(x) : n \in \mathbf{Z}\}$ en un seul point ne peut pas être mesurable. Retrouver l'existence d'un ensemble non mesurable dans $[0, 1]$ en utilisant l'axiome du choix.

On veut maintenant montrer qu'un ensemble mesurable A , qui vérifie $r^{-1}(A) = A$, est de mesure 0 ou 1.

3) Soit $E = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} n + A$, la réunion des translatés entiers de A . Montrer que la fonction $\mathbf{1}_E$ est périodique de périodes 1 et α .

4) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$ une fonction continue, 1-périodique. Montrer que la fonction g définie par

$$g(y) := \int_{[0,1]} f(x+y) \mathbf{1}_E(x) dx,$$

est continue et qu'elle est périodique de périodes 1 et α . En déduire qu'elle est constante. Montrer que cette constante est égale au produit

$$|A| \int_{[0,1]} f(x) dx.$$

5) Montrer qu'il existe une suite bornée $(f_n)_{n \geq 0}$ de fonctions continues 1-périodiques qui converge presque partout vers la fonction caractéristique de $\mathbf{R} - E$.

6) En déduire que $|A| |[0, 1] - A| = 0$.

Exercice 11. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbf{R}^d ; on note B la boule-unité fermée correspondante. On se donne $\varepsilon \in]0; 1[$.

1) On note $N(\varepsilon)$ le plus petit nombre de boules fermées de rayon ε nécessaires pour recouvrir B . Autrement dit, le plus petit entier tel qu'il existe $x_1, x_2, \dots, x_{N(\varepsilon)}$ pour lesquels

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} (x_j + \varepsilon B).$$

Prouver que $N(\varepsilon) \geq \varepsilon^{-d}$.

On note λ la mesure de Lebesgue sur \mathbf{R}^d . Puisque $B \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} (x_j + \varepsilon B)$, on a

l'inégalité dans la chaîne suivante :

$$\lambda(B) \leq \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \lambda(x_j + \varepsilon B) = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \varepsilon^d \lambda(B) = \varepsilon^d N(\varepsilon) \lambda(B),$$

la première égalité venant du comportement de la mesure de Lebesgue vis-à-vis des translations (conservation de la mesure) et vis-à-vis des homothéties (facteur ε^d , qui se voit par changement de variable – par exemple). On en tire bien, en simplifiant par $\lambda(B)$, que $N(\varepsilon) \geq \varepsilon^{-d}$.

2) Soit $x_1, x_2, \dots, x_M \in B$ tels que : $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| > \varepsilon$. Montrer que

$$\bigsqcup_{1 \leq j \leq M} (x_j + \frac{\varepsilon}{2} B) \subset (1 + \frac{\varepsilon}{2}) B$$

où \bigsqcup désigne une réunion disjointe. Montrer aussi que $M \leq (1 + \frac{2}{\varepsilon})^d$. En prenant M maximal, montrer qu'on a l'encadrement :

$$\varepsilon^{-d} \leq N(\varepsilon) \leq (1 + \frac{2}{\varepsilon})^d.$$

L'hypothèse « $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| > \varepsilon$ » assure que $(x_i + \frac{\varepsilon}{2} B) \cap (x_j + \frac{\varepsilon}{2} B) = \emptyset$ dès que $i \neq j$; ceci prouve la propriété de disjonction de la réunion dans le membre

de gauche de l'inclusion à démontrer, et l'inclusion elle-même provient de l'inégalité triangulaire. Par les mêmes arguments élémentaires de mesure que pour la question précédente, on obtient :

$$M\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^d \lambda(B) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^d \lambda(B),$$

et donc $M \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^d$. Les nombres entiers M pour lesquels il existe x_1, x_2, \dots, x_M tels que $i \neq j \Rightarrow \|x_i - x_j\| > \varepsilon$ sont donc tous majorés par $\left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^d$. On suppose désormais que M est le plus grand d'entre eux et on se donne x_1, x_2, \dots, x_M un système de points correspondant ; alors $B \subset \bigcup_{j=1}^M (x_j + \varepsilon B)$. En effet, sinon on pourrait trouver un point à distance $> \varepsilon$ de chacun des x_i , on pourrait l'ajouter à ceux-ci et contredire ainsi la maximalité de M . Par conséquent, pour M maximal on a bien l'encadrement demandé.

3) Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel normé quelconque. On suppose que sa boule-unité fermée peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε pour tout $\varepsilon \in]0; 1[$ (hypothèse de précompacité) et on note $N(\varepsilon)$ le nombre minimal de boules dans un tel recouvrement. Montrer que E est alors de dimension finie et qu'on a :

$$\dim(E) \leq \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \quad \text{et} \quad \dim(E) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\ln N(\alpha)}{\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}.$$

On suppose qu'on a $B \subset \bigcup_{j=1}^{N(\varepsilon)} (x_j + \varepsilon B)$. On note F_0 le sous-espace vectoriel engendré par les x_j . Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie contenant F_0 , alors les intersections avec F des boules centrées en les x_j sont des boules de F puisque $x_j \in F$. On peut donc appliquer le point 1) dans F pour obtenir : $\dim F \leq \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$. Maintenant, si G est un sous-espace vectoriel de dimension finie quelconque de E , on peut considérer $F = G + F_0$ pour se ramener au cas précédent et obtenir : $\dim G \leq \dim F \leq \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$. On a ainsi majoré par $\frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$ la dimension de tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E ; ceci impose que $\dim E \leq \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$. Ainsi E est de dimension finie, disons d , et on peut utiliser le point 2) pour conclure avec des arguments élémentaires d'équivalent quand $\alpha \rightarrow 0$, $\alpha > 0$.

Exercice 12. Théorème de récurrence de Poincaré Soit (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et soit $S : X \rightarrow X$ une application. On fait les hypothèses suivantes :

1. l'espace X est de mesure finie, i.e. $\mu(X) < +\infty$;
2. la transformation S préserve la mesure, i.e. pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a :

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \mu(S^{-1}(A)) = \mu(A).$$

Soit $A \in \mathcal{A}$ un ensemble mesurable de X .

Montrer que l'ensemble des points $x \in A$ pour lesquels il existe $n \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que $S^k(x) \notin A$, pour tout $k \geq n$, est de mesure nulle. Autrement dit, que pour presque tout $x \in A$, l'orbite $(S^n(x))_{n \geq 0}$ de x passe par A une infinité de fois.

Indication : on pourra considérer les ensembles $E_n = \{x \in A : \forall k \geq n, S^k(x) \notin A\}$.

On note

$$E_n := \{x \in A : \forall k \geq n, S^k(x) \notin A\}.$$

Soient $k_2 > k_1$. S'il existe $x \in S^{-k_2 n}(E_n) \cap S^{-k_1 n}(E_n)$, alors

$$S^{k_2 n}(x) = S^{(k_2 - k_1)n}(S^{k_1 n}(x)) \in A,$$

et $S^{k_1 n}(x) \in E_n$ ce qui constitue une contradiction. Ainsi les $S^{-kn}(E_n)$, pour $k \in \mathbf{N}$, sont deux à deux disjoints, en particulier

$$\sum_{k \geq 0} \mu(S^{-kn}(E_n)) = \mu\left(\bigcup_{k \geq 0} S^{-kn}(E_n)\right) \leq \mu(X) < +\infty.$$

Or $\mu(E_n) = \mu(S^{-kn}(E_n))$. Donc, $\mu(E_n) = 0$.