Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 4 : Espaces de fonctions.

Exercices à préparer pour la séance du 19 mai 2017:
exercices 2, 5, 8 et 10

Exercice 1. On considère X et F des espaces métriques.

1) Pour $X = [0; 1]$ et $F = \mathbf{R}$, donner un exemple simple d'une suite de fonctions continues de X dans F qui converge simplement vers une fonction discontinue.

La suite des fonctions monomiales $x \mapsto x^n$ converge simplement vers la fonction qui vaut 0 sur $[0; 1[$ et 1 en 1.

Remarque : si on veut un décrochage au milieu de l'intervalle, on peut prendre la suite des fonctions $x \mapsto \sin(\pi x)^n$.

2) Dans le même cas, donner un exemple simple d'une suite de fonctions continues de X dans F qui converge simplement, mais pas uniformément, vers la fonction nulle.

On prend la suite des fonctions continues affines par morceaux $(f_n)_{n \geq 1}$ définie comme suit : pour $n \geq 1$, la fonction f_n vaut 0 sur $[0; 1 - \frac{1}{n}]$; sur $[1 - \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{2n}]$ c'est l'unique fonction affine qui vaut 0 en $1 - \frac{1}{n}$ et 1 en $1 - \frac{1}{2n}$, et sur $[1 - \frac{1}{2n}; 1]$ c'est l'unique fonction affine qui vaut 1 en $1 - \frac{1}{2n}$ et 0 en 1 (faire un dessin pour voir le pic, qui « glisse » vers 0 quand $n \rightarrow \infty$). Peu importe les formules, on a : $\|f_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \geq 1$ et donc pas de convergence uniforme vers la fonction nulle. La convergence simple est assurée par le fait qu'à $x \in [0; 1[$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n \geq 1}$ est nulle à partir d'un certain rang et que la suite des $f_n(1)$ est constante égale à 0.

Remarque : une convergence forcée telle que celle qui a lieu en 1 est souvent mauvais signe pour la convergence uniforme.

3) Dans le même cas, on considère la suite des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$. En quels points cette suite de fonctions est-elle équicontinue ?

L'idée est de prouver que quand ces fonctions sont restreintes à un intervalle fermé strict de $[0; 1]$ de la forme $[0; \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$, elles sont toutes lipschitziennes pour une constante commune, ce qui assure que la famille est équicontinue sur $[0; \alpha]$ et donc en tout point $x \neq 0$. La famille ne peut être équicontinue en 1, car sinon par Ascoli on pourrait en extraire une sous-suite convergeant uniformément vers une fonction continue. Cette limite uniforme devrait être la limite simple, or cette limite simple n'est pas continue d'après 1.

Il reste donc à étudier la famille des f_n sur $[0; \alpha]$ avec $0 < \alpha < 1$. On a $f'_n(x) = nx^{n-1}$ et $\sup |f'_n(x)| = n\alpha^{n-1}$. Comme la suite $(n\alpha^{n-1})_{n \geq 0}$ tend vers 0 elle est bornée, disons par une constante K_α . Par l'inégalité des accroissements finis on en déduit que les fonctions $f_n|_{[0; \alpha]}$ sont toutes lipschitziennes de constante K_α .

Exercice 2. On considère X et F des espaces métriques.

1) On se donne $a \in X$ et $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications $X \rightarrow F$. On suppose que $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est équicontinue en a et que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction g . Prouver que g est continue en a .

On se donne $\varepsilon > 0$. On écrit l'équicontinuité en a de la famille $\{f_n\}_{n \geq 0}$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in B(a, \delta)$ on a $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$d(g(x), g(a)) \leq d(g(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(a)) + d(f_n(a), g(a)),$$

pour tout $n \geq 0$. Par convergence simple, pour n assez grand on a : $d(g(x), f_n(x)) < \varepsilon$ et $d(f_n(a), g(a)) < \varepsilon$. Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on en déduit la continuité de g en a .

Remarque : on ne fait rien d'autre que passer à la limite dans $d(f_n(x), f_n(a)) < \varepsilon$ quand $n \rightarrow \infty$; pour $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, cela donne $|g(x) - g(a)| \leq \varepsilon$ à partir de $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$.

2) On suppose désormais que D est une partie dense de X et que F est complet. On se donne $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications $X \rightarrow F$. On suppose que $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est équicontinue sur X et que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur D . Prouver que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement sur X .

Par complétude de F , il suffit de montrer que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy. On fixe donc $x \in X$. Soit $\varepsilon > 0$. On écrit l'équicontinuité en x de la famille $\{f_n\}_{n \geq 0}$: il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ et tout $y \in B(x, \delta)$ on a $d(f_n(x), f_n(y)) < \varepsilon$. Par densité il existe $d \in D \cap B(x, \delta)$, pour lequel en particulier $d(f_n(x), f_n(d)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq 0$. Par convergence simple, la suite $(f_n(d))_{n \geq 0}$ est convergente, donc de Cauchy, et il existe $N \geq 1$ tel que pour tous $m, n \geq N$ on ait $d(f_n(d), f_m(d)) < \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, pour tous $m, n \geq N$ on a :

$$d(f_n(x), f_m(x)) \leq d(f_n(x), f_n(d)) + d(f_n(d), f_m(d)) + d(f_m(d), f_m(x)),$$

ce qui prouve bien que $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy.

Exercice 3. On considère X et F des espaces métriques. On suppose X compact. On se donne $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite d'applications $X \rightarrow F$. On suppose que $\{f_n\}_{n \geq 0}$ est équicontinue sur X et que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers une fonction g . Prouver que $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers g .

Déjà, la question 1 de l'exercice précédent dit que g est continue sur X . Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x \in X$, par équicontinuité en x de la famille $\{f_n\}_{n \geq 0}$ et continuité de g en x , il existe $\delta_x > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$ et tout $y \in B(x, \delta_x)$ on ait :

$$d(f_n(x), f_n(y)) \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad d(g(x), g(y)) \leq \varepsilon.$$

Par compacité de X , on extrait du recouvrement $X = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$ un sous-recouvrement fini, disons $X = \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \delta_i)$ avec $\delta_i = \delta_{x_i}$. Par convergence simple, il existe $N \geq 0$ tel que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ et tout $n \geq N$, on ait : $d(g(x_i), f_n(x_i)) \leq \varepsilon$. Soit maintenant $x \in X$ quelconque : ce point est contenu dans une boule $B(x_i, \delta_i)$ et pour tout $n \geq N$ on peut écrire :

$$d(g(x), f_n(x)) \leq d(g(x), g(x_i)) + d(g(x_i), f_n(x_i)) + d(f_n(x_i), f_n(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Bref : $\|g - f_n\|_\infty \leq 3\varepsilon$ pour $n \geq N$.

Exercice 4. On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \sin(\sqrt{t + 4(n\pi)^2})$, $t \in [0, \infty[$.

1) Montrer qu'il s'agit d'une suite de fonctions équicontinues convergent simplement vers $f \equiv 0$.

2) La suite (f_n) est elle relativement compacte dans $(\mathcal{C}([0, \infty[), \|\cdot\|_\infty)$? Que dit le théorème d'Ascoli?

1) a) Pour $t \geq 0$ fixé, alors

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \sin \sqrt{t + 4(n\pi)^2} \\ &= \sin 2n\pi \sqrt{1 + \frac{t}{4n^2\pi^2}} \\ &= \sin 2n\pi \left(1 + \frac{1}{2} \frac{t}{4n^2\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \sin\left(2n\pi + \frac{t}{4n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{t}{4n\pi}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Donc quand $n \rightarrow +\infty$ alors $f_n(t) \rightarrow 0$. Donc (f_n) converge simplement vers 0.

b) Pour $n \geq 1$,

$$|f'_n(t)| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t + 4n^2\pi^2}} \cos \sqrt{t + 4n^2\pi^2} \leq \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t + 4\pi^2}} \leq \frac{1}{4\pi}.$$

Pour $t \geq 0$ fixé et $\epsilon > 0$ donné, on pose $\eta = 4\pi\epsilon$, alors par l'inégalité des accroissements finis

$$\forall n \geq 1 \quad |t - t'| < \eta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(t')| \leq \frac{1}{4\pi} |t - t'| < \epsilon.$$

Donc (f_n) est une famille équicontinue.

2) Notons $\mathcal{H} = \overline{\{f_n \mid n \in \mathbf{N}^*\}}$, $\mathcal{H}(t) = \{f_n(t) \mid n \in \mathbf{N}^*\}$, alors d'après la convergence simple, $\overline{\mathcal{H}(t)} = \mathcal{H}(t) \cup \{0\}$. Mais (f_n) ne converge pas uniformément (i.e. pour la norme $\|\cdot\|_\infty$) vers $f = 0$. En effet pour n impair prenons $t_n = 5n^2\pi^2$, alors $f_n(t_n) = \sin \sqrt{9n^2\pi^2} = \sin 3n\pi = \pm 1$. Pour n pair on prend $t_n = 5(n+1)^2\pi^2 - 4n^2\pi^2$ alors $f_n(t_n) = \pm 1$. Donc pour tout n , $\|f_n - f\|_\infty = 1$. Supposons que $\mathcal{H}$ soit relativement compact alors de la suite (f_n) on peut extraire une sous-suite qui converge, nécessairement la limite est $f = 0$, mais comme pour tout n , $\|f_n - f\|_\infty = 1$, nous obtenons une contradiction.

Bien sûr le théorème d'Ascoli n'est pas mis en défaut, car toutes les hypothèses sont vérifiées sauf $E = [0, +\infty[$ qui n'est pas compact.

Exercice 5. Soit $K : \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathcal{C}([a, b])$ donné par $(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t)f(t) dt$, $k \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b])$, et soit (f_n) une suite bornée de $X = (\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

- 1) Rappeler pourquoi k est uniformément continue.
- 2) En déduire l'équicontinuité de (Kf_n) .
- 3) Montrer que (Kf_n) contient une sous-suite convergente dans X .

1) k est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$ donc est uniformément continue. Écrivons cette continuité uniforme dans le cas particulier où les secondes coordonnées sont égales :

$$\forall \epsilon' > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y, t \in [a, b] \quad |x - y| < \eta \Rightarrow |k(x, t) - k(y, t)| < \epsilon'.$$

2) Comme (f_n) est bornée il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\|f_n\|_\infty \leq M$. Fixons $x \in [a, b]$. Soit $\epsilon > 0$, posons $\epsilon' = \frac{\epsilon}{M(b-a)}$, par l'uniforme continuité de k , on obtient un $\eta > 0$ avec pour $|x - y| < \eta$, $|k(x, t) - k(y, t)| < \epsilon' = \frac{\epsilon}{M(b-a)}$.

Donc pour $|x - y| < \eta$,

$$\begin{aligned} |Kf_n(x) - Kf_n(y)| &\leq \int_a^b |k(x, t) - k(y, t)| \|f_n\|_\infty dt \\ &\leq M \int_a^b |k(x, t) - k(y, t)| dt \\ &\leq M \int_a^b \frac{\epsilon}{M(b-a)} dt \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

Ce qui est l'équicontinuité de (Kf_n) en x . Comme ceci est valable quelque soit $x \in [a, b]$ alors (Kf_n) est équicontinue.

3) Notons $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$. Alors pour x donné $\mathcal{H}(x)$ est borné car $|\int_a^b k(x, t) f_n(t) dt| \leq M \int_a^b |k(x, t)| dt$ est bornée indépendamment de $n \in \mathbf{N}$. Donc $\mathcal{H}(x)$ est un fermé borné de $\mathbf{R}$ donc un compact.

Nous avons toutes les hypothèses pour appliquer le théorème d'Ascoli, donc $\mathcal{H} = (Kf_n)_n$ est relativement compact. Donc de la suite (Kf_n) on peut extraire une sous-suite convergente. (Attention la limite de cette sous-suite est dans $\overline{\mathcal{H}} \subset X$ et pas nécessairement dans $\mathcal{H}$.)

Exercice 6. Suivant les indications du cours, démontrer le théorème de Weierstrass classique une fois acquis le fait que la fonction $\sqrt{\cdot}$ est limite uniforme de fonctions polynomiales sur le segment $[a; b]$ (pour $a < b$ nombres réels).

Exercice 7. Si k est un nombre réel > 0 , on note $\mathcal{H}_k$ l'ensemble des fonctions définies sur $[0; 1]$, à valeurs réelles, telles que $f(0) = 0$ et satisfaisant

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y| \quad \text{pour tous } x, y \in [0; 1].$$

On pose $\mathcal{E} = \bigcup_{k>0} \mathcal{H}_k$ et pour $f \in \mathcal{E}$, on note $N(f) = \inf\{k > 0 : f \in \mathcal{H}_k\}$.

1) Justifier que $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et que N est une norme sur $\mathcal{E}$.

Remarquons tout d'abord que $N(f)$ est la meilleure constante de Lipschitz de $f \in \mathcal{E}$: c'est une borne inférieure atteinte pour chaque f .

Pour la première assertion, il suffit de vérifier que l'ensemble proposé $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de toutes les fonctions $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Une combinaison linéaire de fonctions valant 0 en 0 vaut 0 en 0. En outre, si f est K -lipschitzienne et g est K' -lipschitzienne, alors pour $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est $(|\lambda|K + |\mu|K')$ -lipschitzienne. Ainsi $\mathcal{E}$ est un $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et la dernière remarque montre aussi que N est homogène et satisfait l'inégalité triangulaire. La condition de séparation vient de ce qu'une fonction 0-lipschitzienne est constante, donc nulle si elle vaut 0 en 0.

2) Prouver que l'on a $\|f\|_\infty \leq N(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$ mais que $\|\cdot\|_\infty$ et N ne sont pas des normes équivalentes sur $\mathcal{H}_k$.

Si f est k -lipschitzienne et vaut 0 en 0 alors pour tout $x \in [0; 1]$ on a : $|f(x)| \leq kx \leq k$ et donc $\|f\|_\infty \leq k$; en passant à la borne inférieure, on obtient bien que $\|f\|_\infty \leq N(f)$ pour toute $f \in \mathcal{E}$. Vu l'inégalité que l'on vient de démontrer, il suffit ensuite d'exhiber une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{H}_k$ qui converge uniformément vers 0

mais sur laquelle N est par exemple constante. On obtient une telle suite en posant $f_n(x) = kx$ entre 0 et $\frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{k}{n}$ sur le reste de l'intervalle $[0; 1]$, puisque $N(f_n) = k$ pour tout $n \geq 1$.

3) On fixe $k > 0$. Discuter la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$ et dans $(\mathcal{E}, N(\cdot))$.

Le critère séquentiel permet de voir que $\mathcal{H}_k$ est fermé dans l'espace des fonctions continues $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ muni de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$, et le théorème d'Ascoli permet de conclure à la compacité de $\mathcal{H}_k$ dans $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_\infty)$.

On considère maintenant la norme N et on veut réfuter la compacité dans ce cas. L'idée est de produire une suite de fonctions k -lipschitziennes qui ne peut converger car les différences entre la limite hypothétique (automatiquement k -lipschitzienne) et les fonctions de la suite ne peuvent être mieux que $2k$ -lipschitziennes (autrement dit, de norme $2k$). Remarquons tout d'abord que l'inégalité $\|\cdot\|_\infty \leq N(\cdot)$ implique que si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge au sens de N vers f , alors elle converge uniformément et donc simplement. La fonction typiquement k -lipschitzienne sur $[0; 1]$ est $f : x \mapsto kx$. Tout ceci donne l'idée de considérer pour chaque $n \geq 2$, la fonction f_n qui coïncide avec f sur $[0; 1 - \frac{1}{n}]$, qui coïncide sur $[1 - \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{2n}]$ avec l'unique fonction affine de pente $-k$ qui rend f_n continue et qui coïncide sur $[1 - \frac{1}{2n}, 1]$ avec l'unique fonction constante qui rend f_n continue. Si une sous-suite de $(f_n)_{n \geq 2}$ convergeait pour la norme N vers une limite, cette limite serait aussi limite uniforme et donc simple sur $[0; 1]$: la valeur d'adhérence correspondante serait donc la fonction f ; mais sur l'intervalle $[1 - \frac{1}{n}; 1 - \frac{1}{2n}]$, la fonction $f - f_n$ est affine de pente $2k$ et donc $N(f - f_n) \geq 2k$, ce qui exclut la convergence. La suite $(f_n)_{n \geq 2}$ ainsi construite ne peut avoir de valeur d'adhérence pour la norme N .

Exercice 8. On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Pour $P \in \mathbf{R}[X]$, on note

$$\mathcal{N}_1(P) := \int_0^1 |P(t)| dt \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_2(P) := \sum_{j \in \mathbf{N}} e^{-j} |P(j)|.$$

1) Vérifier qu'il s'agit de deux normes sur $\mathbf{R}[X]$.

Déjà, les fonctions proposées sont à valeurs dans $\mathbf{R}_+$; ensuite, la condition d'homogénéité est standard pour les deux normes, ainsi que l'inégalité triangulaire pour la première. Pour l'inégalité triangulaire pour la seconde norme, on a $|(P+Q)(j)| \leq |P(j)| + |Q(j)|$ pour tout $j \geq 0$ et donc l'inégalité cherchée en multipliant par e^{-j} et en sommant sur j . Pour la condition de séparation, c'est le même argument pour les deux normes : une fonction polynomiale non nulle n'a qu'un nombre fini de zéros.

2) Ces normes sont-elles équivalentes ?

Pour prouver que deux normes ne sont pas équivalentes, il suffit d'exhiber une suite de vecteurs sur laquelle la comparaison du comportement des deux normes exclut l'équivalence, par exemple parce qu'une suite de normes tend vers 0 et l'autre pas. C'est ce qui arrive ici avec la suite des fonctions monomiales $f_n : x \mapsto x^n$, puisque $\mathcal{N}_1(f_n) = \frac{1}{n+1}$ et $\mathcal{N}_2(f_n) \geq \frac{1}{e}$ pour tout $n \geq 0$.

3) L'espace $\mathbf{R}[X]$, muni de la norme $\mathcal{N}_1$, est-il complet ?

On veut voir que ce n'est pas le cas, en exhibant une suite de Cauchy qui ne converge pas dans l'espace $\mathbf{R}[X]$, et pour prouver qu'une suite ne converge pas dans un espace donné, une méthode est de trouver un espace ambiant plus gros dans lequel la suite converge, mais vers une limite hors de l'espace initial.

L'espace ambiant sera ici l'espace $\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$ des fonctions continues $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$. On dispose alors du théorème de densité de Weierstrass, ce qui permet d'obtenir

une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ qui tend pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ vers une fonction typiquement non polynomiale (par exemple parce qu'elle est non nulle tout en ayant une infinité de zéros) : disons la fonction f affine continue par morceaux qui vaut 0 sur $[0; \frac{1}{3}]$, qui vaut 1 sur $[\frac{2}{3}; 1]$ et devinez quoi au milieu. C'est une suite convergente et donc de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$; en fait, c'est aussi une suite de Cauchy pour $(\mathbf{R}[X], \mathcal{N}_1)$ car $\mathcal{N}_1(\cdot) \leq \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R})$. Cette dernière inégalité implique aussi que $(P_n)_{n \geq 0}$ tend dans $(\mathcal{C}([0; 1], \mathbf{R}), \mathcal{N}_1)$ vers $f \notin \mathbf{R}[X]$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \int_a^b f(t)t^n dt = 0.$$

Montrer que f est la fonction nulle.

Soit $P(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbf{R}[x]$ alors par linéarité de l'intégrale et grâce à la relation de l'énoncé :

$$\int_a^b f(t) \cdot P(t) dt = 0.$$

La fonction f est continue sur le compact $[a, b]$ donc par le théorème de Weierstrass il existe une suite de polynômes qui converge uniformément vers f . Fixons $\epsilon > 0$. Soit P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \epsilon$. Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)^2 dt \right| &= \left| \int_a^b f(t)^2 dt - \int_a^b f(t) \cdot P(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b f(t) \cdot (f(t) - P(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t)| \cdot \|f - P\|_\infty dt \\ &\leq \epsilon \int_a^b |f| \end{aligned}$$

Mais $C = \int_a^b |f|$ est une constante (indépendante de ϵ et P). Donc on vient de montrer que $|\int_a^b f(t)^2 dt| \leq \epsilon C$ avec pour tout $\epsilon > 0$ donc $\int_a^b f^2 = 0$, or f^2 est une fonction continue et positive, son intégrale est nulle donc f est la fonction nulle.

Exercice 10. Soient X et Y deux espaces métriques compacts. Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des combinaisons linéaires finies $f \in \mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$ de la forme :

$$f(x, y) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i(x) \cdot v_i(y), \quad \text{avec } u_i \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R}), v_i \in \mathcal{C}(Y, \mathbf{R}), \lambda_i \in \mathbf{R}, I \text{ fini.}$$

Montrer que toute fonction de $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$ est limite uniforme de suites d'éléments de $\mathcal{A}$.

On cherche à vérifier les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

- Tout d'abord $X \times Y$ est compact, car c'est un produit d'espaces compacts.
- Ensuite $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$: en effet pour $f, g \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ on a :

$$f + g \in \mathcal{A}, \quad \lambda \cdot f \in \mathcal{A} \quad \text{et } f \times g \in \mathcal{A}.$$

- $\mathcal{A}$ sépare les points : soient $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \in X \times Y$. Supposons que $x_1 \neq x_2$, soit $u \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ tel que $u(x_1) \neq u(x_2)$ (clairement une telle fonction existe!), soit v la fonction sur Y constante égale à 1. Alors f définie par $f(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ est dans $\mathcal{A}$ et $f(x_1, y_1) = u(x_1) \neq u(x_2) = f(x_2, y_2)$. Si $x_1 = x_2$ alors nécessairement $y_1 \neq y_2$ et on fait un raisonnement similaire.
- Pour tout $(x, y) \in X \times Y$ il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$: prendre la fonction f constante égale à 1 qui est bien dans $\mathcal{A}$.

Par le théorème de Stone-Weierstrass $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X \times Y, \mathbf{R})$ pour la norme uniforme.

Exercice 11. Soient $]a; b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $X :]a; b[\times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, $(t, x) \mapsto X(t, x)$ une fonction localement lipschitzienne en x . Soit x une solution maximale de l'équation différentielle $\frac{dx}{dt} = X(t, x(t))$. Prouver que si $u \neq a$ alors $\lim_{t \rightarrow u, t > u} \|x(t)\| = +\infty$, et que si $v \neq b$ alors $\lim_{t \rightarrow v, t < b} \|x(t)\| = +\infty$.

Voir les commentaires de la dernière page.

Exercice 12. Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et I un intervalle ouvert non vide de $\mathbf{R}$. Étant donnée une application continue $X : I \times \Omega \rightarrow E$, on veut montrer que l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = X(t, x(t))$$

avec condition initiale $x(t_0) = x_0$ pour $t_0 \in I$ et $x_0 \in \Omega$ admet une solution (avec la seule hypothèse de continuité de X).

- 1) Montrer que si $(X_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions de classe C^1 telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ alors, sur toute partie bornée de $I \times \mathbf{R}^n$, les solutions correspondantes $\{x_n\}_{n \geq 0}$ données par le théorème de Cauchy-Lipschitz forment une famille équicontinue définie sur un intervalle commun.
- 2) En déduire l'existence d'une solution au problème considéré.
- 3) A-t-on en général unicité de la solution dans ce contexte ?

Voici enfin quelques compléments qui nous ont été suggérés par les séances de PC.

Ce sont des approfondissements qui ne sont pas destinés à alourdir les corrigés qui précèdent. Ces derniers suffisent en principe.

Tout d'abord : un exercice supplémentaire sur la convergence uniforme (on peut voir qu'il permet de reprendre la plupart des contre-exemples en lien avec cette notion).

Exercice. Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de fonctions continues $[0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ convergeant simplement vers une fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$. Prouver que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0; 1]$.

(ii) La fonction f est continue et on a la propriété :

(*) pour tout $x \in [0; 1]$ et toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ dans $[0; 1]$ de limite x , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = f(x)$.

Montrons que (i) implique (ii).

Il est classique qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue ; plus précisément, cela provient de l'inégalité triangulaire

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |f_n(x') - f(x')|,$$

qui a lieu pour tous $n \geq 0$ et tous $x, x' \in [0; 1]$. Cela donne :

$$|f(x) - f(x')| \leq 2 \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x) - f_n(x')|.$$

Pour un rang N assez grand, le premier terme du majorant peut être rendu inférieur à tout $\varepsilon > 0$ donné. Enfin, pour un tel rang N fixé, par continuité de la fonction f_N il existe $\delta > 0$ tel que si x et x' sont à distance $< \delta$ alors le second terme du majorant est aussi $< \varepsilon$.

Pour la propriété (*), on part des inégalités

$$|f(x) - f_n(x_n)| \leq |f(x) - f(x_n)| + |f(x_n) - f_n(x_n)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(x_n)|.$$

Le premier terme du dernier majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par convergence uniforme et le second terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par la continuité de f en x qu'on vient de prouver.

Montrons que (ii) implique (i). On suppose que la fonction $f : [0; 1] \rightarrow \mathbf{R}$ est continue et que la propriété (*) est satisfaite, et il s'agit de voir que la convergence de $(f_n)_{n \geq 0}$ vers f sur $[0; 1]$ est uniforme. On le fait par l'absurde, en supposant qu'on n'a pas uniformité de la convergence : cela se traduit par l'existence de $\delta > 0$ et d'une extraction $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tels que $\|f - f_{\varphi(n)}\|_\infty \geq \delta$ pour tout $n \geq 0$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cela implique l'existence pour tout $n \geq 0$ d'un point $x_{\varphi(n)} \in [0; 1]$ tel que

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \geq \frac{\delta}{2}.$$

Par compacité de $[0; 1]$, et quitte à extraire, on dispose d'un point $x_\infty \in [0; 1]$ tel que l'on ait $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{\varphi(n)} = x_\infty$. Par inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})| \leq |f(x_{\varphi(n)}) - f(x_\infty)| + |f(x_\infty) - f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})|.$$

Le premier terme du majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ par continuité de f , et le second par la propriété (*): contradiction avec la minoration par $\frac{\delta}{2} > 0$ précédemment obtenue.

Équicontinuité uniforme. Soit X, Y des espaces métriques. Si X est compact, alors toute famille de fonctions $f_i : X \rightarrow Y, i \in I$, équicontinue sur X est *uniformément* équicontinue, c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall u, v \in X \quad d(u, v) < \delta \implies d(f_i(u), f_i(v)) < \varepsilon \quad \text{pour tout } i \in I.$$

Preuve. C'est la même que celle de la continuité uniforme de toute fonction continue sur un compact. Vu l'équicontinuité :

$$\forall x \in X, \exists \delta_x > 0 \text{ avec } d(x, y) < \delta_x \implies \forall i \in I \quad d(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon/2.$$

Vu X compact, le recouvrement ouvert $\bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$ admet un nombre de Lebesgue $r > 0$ (voir exercice 2 de la feuille 2). Pour tous $u, v \in X$ avec $d(u, v) < r$, $u \in B(v, r) \subset B(x, \delta_x)$ pour un $x \in X$, donc, pour tout $i \in I$, on a

$$d(f_i(u), f_i(v)) \leq d(f_i(u), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(v)) < \varepsilon.$$

Théorème d'Ascoli. Pour $F = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, le théorème d'Ascoli dit que

(*) toute suite $(f_n : X \rightarrow F)_{n \in \mathbf{N}}$, équicontinue sur X compact avec $\sup_{x, n} |f_n(x)| < \infty$ admet une sous-suite uniformément convergente.

Les seuls e.v.n. ayant cette propriété (*) sont de dimension finie. En effet, si F est un espace métrique vérifiant (*), ses parties bornées et bornées sont compactes (considérer (*) pour les fonctions constantes).

La réciproque est vraie mais l'énoncé suivant est plus général et plus naturel : si F est un espace métrique quelconque, toute suite $(f_n : X \rightarrow F)_{n \in \mathbf{N}}$, équicontinue sur X compact telle que, pour tout $x \in X$, l'adhérence de $\{f_n(x) : n \in \mathbf{N}\}$ est un compact de F , admet une sous-suite uniformément convergente.

Ceci peut se montrer en combinant différents exercices déjà traités :

- 1) un argument diagonal donne une sous-suite de (f_n) (simplement) convergente sur une partie dense dénombrable de X ;
- 2) la convergence simple a lieu sur X tout entier d'après la question 2 de l'exercice 2 ;
- 3) la convergence est uniforme d'après l'exercice 3.

Divergence d'une solution d'équation différentielle. Soit $x :]a, b[\rightarrow \mathbf{R}^d$ une solution de l'équation $\frac{dx}{dt}(t) = X(t, x(t))$ avec $X : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ de classe C^1 et $-\infty \leq a < 0 < b < \infty$.

La formulation donnée dans le cours du théorème de Cauchy-Lipschitz permet de voir que, si $x_* := \lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n)$ existe pour une suite $t_n \rightarrow b, t_n < b$, alors il existe une solution prolongeant x à $]a, c[$ avec $c > b$.

En effet Cauchy-Lipschitz pour (x_*, b) donne $\alpha, \delta > 0$ et donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$ assez grand, une solution de condition initiale $(x(t_n), t_n) \in B(x_*, \delta) \times]b - \delta, b + \delta[$ définie sur $]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$ avec $t_n + \alpha > b$. En particulier, si x est une solution maximale, alors $\lim_{t \rightarrow b} \|x(t)\| = \infty$ (Exercice 11).

Ceci permet de montrer l'existence de solution définie sur $\mathbf{R}$ tout entier dans beaucoup de situations.