MAT 311 **2017**

Introduction à l'analyse réelle

Feuille d'exercices # 3 : Espaces métriques complets.
Exercices à préparer pour la séance du 12 mai 2017:
exercices 2, 3, 9 et 11

Exercice 1. Soit (X, d) un espace métrique. On dit que (X, d) est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace X peut être décrit comme réunion d'une famille finie de boules de rayon ε. On veut prouver que (X, d) est compact si, et seulement si, il est précompact et complet.

1) Justifier que, dans un espace métrique quelconque, si une suite de Cauchy admet une valeur d'adhérence, alors cette suite converge vers cette valeur d'adhérence.

En effet soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de Cauchy, et soient $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ une extraction (c'est-à-dire une fonction strictement croissante $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$) et x tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$. On se donne $\varepsilon > 0$. Par l'hypothèse « de Cauchy », il existe $N \geqslant 0$ tel que pour tous $n, n' \geqslant N$ on ait $d(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$; et par l'hypothèse que x est une valeur d'adhérence, on sait qu'il y a un indice $n' \geqslant N$ tel que $d(x_{n'}, x) < \varepsilon$. Par l'inégalité triangulaire, cela implique que pour tout $n \geqslant N$ on a $d(x_n, x) < 2\varepsilon$; et comme ε était arbitraire, cela implique bien que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

2) Prouver que si X est compact, alors il est complet et précompact.

Supposons donc que X est compact. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, une suite quelconque dans X admet une valeur d'ahérence ; si elle est *a fortiori* de Cauchy, alors la question précédente implique qu'elle converge. Bref, dans X toute suite de Cauchy est convergente : on vient de prouver la complétude de X. La précompacité est une conséquence directe du fait que les boules ouvertes sont des ouverts (!) et de la caractérisation de la compacité par extraction de sous-recouvrements finis de recouvrements ouverts arbitraires au départ (propriété de Borel-Lebesgue).

À partir de maintenant, on veut prouver l'implication réciproque, modulo quelques remarques préliminaires d'intérêt général. Il peut être utile – mais pas nécessaire – d'avoir en tête qu'on va faire un raisonnement qui généralise la preuve par dichotomie de la compacité des segments (fermés) de la droite réelle $\mathbf{R}$.

3) Prouver que si $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots$ est une suite d'extractions $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, alors l'application $n \mapsto (\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)$ est encore une extraction $\mathbf{N} \to \mathbf{N}$, et ainsi $(x_{(\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_n)(n)})_{n\geqslant 0}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ (c'est l'idée du procédé diagonal).

Cela vient de l'observation que si $\psi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ est une extraction alors $\psi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ (qui se prouve par récurrence : $\psi(0)$ est un entier naturel, donc est $\geqslant 0$, et pour l'hérédité on écrit : $\psi(n + 1) > \psi(n) \geqslant n$). Avec cette observation, on a en effet :

$$\psi(n+1) = (\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_n)\big(\varphi_{n+1}(n+1)\big) \geqslant (\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_n)(n+1) > (\varphi_1\circ\varphi_2\circ\cdots\circ\varphi_n)(n) = \psi(n).$$

4) Prouver qu'un sous-ensemble d'un espace métrique précompact est un espace métrique précompact.

La métrique (= distance) sur le sous-ensemble est la restriction de la distance de l'espace métrique ambiant au sous-ensemble.

Soit $\varepsilon > 0$. La précompacité de X permet d'écrire celui-ci comme réunion finie de boules de rayon ε ; explicitement : $X = \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)$ pour une collection de centres x_i bien choisis.

Il faut faire attention au fait que la trace sur Y d'une boule de X n'est pas une boule de Y en général (si le centre n'est pas dans Y).

Dans le recouvrement de X qui précède, seules les boules rencontrant Y nous sont utiles. Quitte à réindéxer, on se ramène au cas où les centres x_i tels que $B(x_i, \varepsilon) \cap Y \neq \varnothing$ sont ceux indexés de 1 à j pour $j \leqslant N$. Pour $i \leqslant j$ on peut donc se donner $z_j \in Y \cap B(x_i, \varepsilon)$, et alors l'inégalité triangulaire nous assure que $B(z_i, 2\varepsilon)$ contient $B(x_i, \varepsilon) \cap Y$ (en effet, si $y \in B(x_i, \varepsilon) \cap Y$, alors $d(z_i, y) \leqslant d(z_i, x_i) + d(x_i, y) < \varepsilon + \varepsilon$). Ceci permet d'écrire que $Y = \bigcup_{i=1}^{j} \big(B(z_i, 2\varepsilon) \cap Y\big)$ et comme les centres z_i sont dans Y, les intersections $B(z_i, 2\varepsilon) \cap Y$ sont bien des boules de Y. Comme ε était arbitraire, on conclut à la précompactité de Y.

5) Prouver que si X est complet et précompact, alors X est compact.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite dans X ; on veut voir que $(x_n)_{n \geqslant 0}$ admet une sous-suite convergente. Si cette suite prend une infinité de fois la même valeur, disons x, alors x est évidemment une valeur d'adhérence de la suite. Quitte à extraire une première fois, nous nous plaçons désormais dans la situation où $n \mapsto x_n$ est injective.

Par précompacité de X, il existe $z_2 \in X$ et une extraction $\varphi_2 : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que l'on ait $x_{\varphi_2(n)} \in B(z_2, \frac{1}{2})$ pour tout $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait trouvé jusqu'au rang $j = k \geqslant 2$ des points $z_j \in B(z_{j-1}, \frac{1}{2^{j-1}})$ et des extractions φ_j tels que $x_{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_k)(n)} \in B(z_k, \frac{1}{2^k})$ pour tout $n \geqslant 1$. Alors par précompacité de $B(z_k, \frac{1}{2^k})$, il existe $z_{k+1} \in B(z_k, \frac{1}{2^k})$ et une extraction $\varphi_{k+1} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que l'on ait $x_{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_{k+1})(n)} \in B(z_{k+1}, \frac{1}{2^{k+1}})$ pour tout $n \geqslant 1$. Par récurrence on construit ainsi une suite d'extractions et une suite $(z_k)_{k \geqslant 2}$; cette suite est de Cauchy car $d(z_m, z_n) \leqslant \frac{1}{2^{\min\{m;n\}}}$. Par complétude de X, elle admet donc une limite $z \in X$, et cette limite est dans toutes les boules fermées $\overline{B}(z_k, \frac{1}{2^k})$: cela implique que la suite extraite $(x_{(\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \cdots \circ \varphi_n)(n)})_{n \geqslant 0}$ tend vers z.

Exercice 2. 1) Montrer que pour qu'un espace métrique soit complet, il suffit que ses parties fermées et bornées soient complètes (par exemple, compactes).

Soit X un espace métrique dont les parties parties fermées et bornées sont complètes.

Le point important est de remarquer qu'une suite de Cauchy est bornée (dans le sens où elle est contenue dans une boule fermée). Soit en effet $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une telle suite ; il existe un rang N tel que pour tous $m, n \geqslant N$ on ait $d(x_m, x_n) \leqslant 1$, en particulier $d(x_N, x_n) \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant N$. Alors $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est contenue dans la boule fermée centré en x_N et de rayon tout nombre plus grand que 1 et que les distances $d(x_i, x_N)$ pour $0 \leqslant i \leqslant N-1$.

Ainsi, si $(x_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite de Cauchy, elle est contenue dans une boule fermée – qui est complète par hypothèse : la suite converge dans la boule, et donc dans X. Ceci prouve la complétude de X sous l'hypothèse de l'énoncé.

Remarque : on a vu dans un autre exercice que toute suite de Cauchy admettant une valeur d'adhérence convergeait vers ladite valeur d'adhérence ; ceci prouve que tout espace compact est complet. Le point 1) prouve donc plus généralement que tout espace métrique dans lequel les boules fermées sont compactes, est complet.

2) Montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach si, et seulement si, toute série normalement convergente est convergente.

On suppose tout d'abord que $(E, \|\cdot\|_E)$ est un espace de Banach et on se donne une série $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ dans E normalement convergente, c'est-à-dire telle que $\sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|_E < \infty$. Alors la série numérique $\sum_{n\geqslant 0} \|x_n\|_E$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang $N \geqslant 0$ tel que pour tout $m \geqslant N$ et tout $p \geqslant 0$ on ait $\sum_{n=m+1}^{m+p} \|x_n\|_E < \varepsilon$, et donc $\| \sum_{n=m+1}^{m+p} x_n \|_E < \varepsilon$. Ainsi, on vient de vérifier que $\sum_{n\geqslant 0} x_n$ est de Cauchy et la complétude de E implique qu'elle converge.

Maintenant, on suppose que toute série normalement convergente dans E converge, et il s'agit de voir que toute suite de Cauchy dans E converge. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une telle suite. Par la première question de l'exercice 1, il suffit de voir que cette suite admet une valeur d'adhérence.

Par la propriété « de Cauchy », il existe un rang N_1 tel que pour tous $m, m' \geqslant N_1$ on ait $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant \frac{1}{2}$, un rang $N_2 > N_1$ tel que pour tous $m, m' \geqslant N_2$ on ait $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant 2^{-2}$, et par récurrence des rangs $N_{k+1} > N_k$ (pour $k \geqslant 0$) tels que pour $m, m' \geqslant N_k$ on ait $\|x_m - x_{m'}\|_E \leqslant 2^{-k}$. En posant $\varphi(n) = N_n$ on obtient une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telle que pour tout entier n on ait $\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\|_E \leqslant 2^{-n}$, faisant de la série $\sum_{n\geqslant 0}(x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)})$ une série normalement convergente donc convergente dans E par hypothèse sur E. Ainsi $(x_n)_{n\geqslant 0}$ admet une valeur d'adhérence, et elle est convergente par la réduction qui précède.

Exercice 3. Montrer que $\mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R})$, muni de la norme $\mathcal{N}_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, est un espace de Banach alors que le même espace, muni de la norme

$$\mathcal{N}_1(f) := \int_0^1 |f(t)| \, \mathrm{d}t,$$

n'est pas un espace de Banach.

Soit $(f_m)_{m\geqslant 0}$ une suite de Cauchy de $(\mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tous $m, n \geqslant n_0$,

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Donc, pour chaque $x \in [0,1]$, la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{R}, |\cdot|)$, qui est un espace métrique complet. Cette suite converge vers une limite que l'on note $f(x) \in \mathbf{R}$. Vérifions que $f \in \mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R})$ et que

$$\lim_{m\to+\infty} f_n = f,$$

dans $(\mathscr{C}([0,1]; \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$. On sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

pour $m, n \geqslant n_0$. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

pour tout $n \geqslant n_0$. La fonction f_{n_0} est continue en tout point de $[0,1]$, donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon.$$

Écrivons

$$|f(y) - f(x)| \leqslant |f(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)|.$$

Conclusion, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|y - x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < 3\,\varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue sur $[0,1]$. Finalement, la suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers f dans $(\mathscr{C}([0,1];\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

La question portant sur la norme $\mathcal{N}_1$ est traitée en cours ; l'idée est que la limite existe, mais qu'elle vit dans un espace strictement plus gros que l'espace dans lequel sont pris les éléments (ici, des fonctions) de la suite.

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach, $K \geqslant 0$ et $\phi \in \mathscr{C}(E;E)$ telle que

$$\forall x \in E, \quad \|\phi(x)\| \leqslant K\,\|x\|.$$

Montrer qu'il existe une unique application $f \in \mathscr{C}(E;E)$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \qquad f(x) - f(x/2) = \phi(x).$$

On pourra utiliser la série de fonctions

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \phi(2^{-n}x).$$

Exercice 5. Montrer que $X :=]-1,1[$, muni de la distance

$$d(x,y) := \left| \frac{x}{1-x^2} - \frac{y}{1-y^2} \right|$$

est un espace métrique complet.

Exercice 6. On note $d(x,y) := |x-y|$ la distance usuelle sur $\mathbf{R}$. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction strictement croissante, on note $d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$.
1) Montrer que d_f est une distance sur $\mathbf{R}$.
2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que les topologies associées à d et d_f soient les mêmes.
3) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que les suites de Cauchy associées à d et d_f soient les mêmes.
4) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $(\mathbf{R}, d_f)$ soit complet.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel et $f : E \to E$ telle que

$$\forall x, y \in E, \quad f(x+y) = f(x) + f(y),$$

et

$$\forall x \in B_f(0,1), \quad \|f(x)\| \leqslant M.$$

1) Montrer que f est $\mathbf{Q}$-linéaire.
2) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbf{Q}$ tel que $\lambda \geqslant \|x\|$, on a : $\|f(x)\| \leqslant \lambda M$.
3) En déduire que f est linéaire et continue.

Exercice 8. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$ telle que la série entière $\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R>0$ et soit $(E,\|\cdot\|_E)$ un $\mathbf{K}$-espace de Banach.
1) Soit $L\in\mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}<R$. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n L^n \in \mathcal{L}(E,E).$$

$\|a_nL^n\|\leqslant |a_n|\|L\|^n_{\mathcal{L}(E,E)}$ est le terme général d'une série convergente car $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}<R$. Donc a_nL^n est absolument convergente, et comme $\mathcal{L}(E,E)$ est complet, elle est convergente.
2) Soit $L\in\mathcal{L}(E,E)$. Montrer que

$$e^L := \sum_{n\geqslant 0}\frac{L^n}{n!}$$

définit un élément de $\mathcal{L}(E,E)$.
$\sum_{n\in\mathbf{N}}\frac{x^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, donc $e^L\in\mathcal{L}(E,E)$ est bien défini par la question précédente.
3) Soient $L,\tilde L\in\mathcal{L}(E,E)$ tels que $L\circ\tilde L=\tilde L\circ L$. Montrer que

$$e^L\circ e^{\tilde L}=e^{\tilde L}\circ e^L.$$

On va montrer que $e^L\circ e^{\tilde L}=e^{L+\tilde L}$, ce qui permet de conclure car $+$ est commutative.
On passe par les sommes partielles : soit

$$U_N=\sum_{n=0}^N\frac{L^n}{n!},\quad V_N=\sum_{n=0}^N\frac{\tilde L^n}{n!},\quad W_N=\sum_{n=0}^N\frac{(L+\tilde L)^n}{n!}.$$

Alors $U_N\to e^L$, $V_N\to e^{\tilde L}$ et $W_N\to e^{L+\tilde L}$. De plus $U_N\circ V_N\to e^L\circ e^{\tilde L}$ car

$$\begin{aligned}\|e^L\circ e^{\tilde L}-U_N\circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \|e^L\circ e^{\tilde L}-U_N\circ e^{\tilde L}\|_{\mathcal{L}(E,E)}+\|U_N\circ e^{\tilde L}-U_N\circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\\ &\leqslant \|e^L\circ -U_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|e^{\tilde L}\|_{\mathcal{L}(E,E)}+\|U_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|e^{\tilde L}-V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\to 0.\end{aligned}$$

(On a utilisé que la suite U_N est bornée car convergente). Montrons à présent que $U_N\circ V_N-W_{2N}\to 0$, ce qui suffira pour conclure. On a par la commutativité de L et $\tilde L$,

$$\begin{aligned}W_{2N}&=\sum_{n=0}^{2N}\frac{1}{n!}(L+\tilde L)^n=\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}L^k\tilde L^{n-k}=\sum_{n=0}^{2N}\sum_{\substack{j,k\geqslant 0\\ j+k=n}}\frac{1}{j!k!}L^k\tilde L^j\\ &=\sum_{j,k\leqslant N}\frac{1}{j!k!}L^k\tilde L^j+\sum_{(j,k)\in A_N}\frac{1}{j!k!}L^k\tilde L^j\end{aligned}$$

où $A_N=\{(j,k)\in\mathbf{N}^2\mid (j\geqslant N+1 \text{ ou } k\geqslant N+1) \text{ et } j+k\leqslant 2N\}$. Or $U_N\circ V_N=\sum_{j,k\leqslant N}\frac{1}{j!k!}L^j\tilde L^k$, et

$$A_N\subset B_N=(\{N+1,\dots,2N\}\times\{0,\dots,2N\})\cup(\{0,\dots,2N\}\times\{N+1,\dots,2N\}).$$

Donc en notant $R = \|L\|_{\mathcal{L}}(E,E)$ et $\tilde{R} = \|\tilde{L}\|_{\mathcal{L}}(E,E)$

$$\begin{aligned}\|W_{2N} - U_N \circ V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \sum_{(j,k)\in A_N} \frac{1}{j!k!} R^k \tilde{R}^j \leqslant \sum_{(j,k)\in B_N} \frac{1}{j!k!} R^k \tilde{R}^j \\ &\leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{R^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=0}^{2N} \frac{\tilde{R}^j}{j!}\right) + \left(\sum_{k=0}^{2N} \frac{R^k}{k!}\right)\left(\sum_{j=N+1}^{2N} \frac{\tilde{R}^j}{j!}\right) \\ &\leqslant \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{R^k}{k!}\right) e^{\tilde{R}} + e^R \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{\tilde{R}^j}{j!}\right).\end{aligned}$$

Ceci tend vers 0, car il s'agit les séries qui apparaissent sont des restes d'ordre $N+1$ de séries convergentes (de somme e^R et $e^{\tilde{R}}$).

4) En déduire que, si $L \in \mathcal{L}(E,E)$ alors e^L est inversible et a pour inverse $e^{-L} \in \mathcal{L}(E,E)$.

Comme L et $-L$ commutent, $e^L \circ e^{-L} = e^{-L} \circ e^L = e^{L-L} = I_E$.

5) Soit $L \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que $\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)} < 1$. Montrer qu'il existe $V \in \mathcal{L}(E,E)$ telle que

$$V^2 = I_E - L.$$

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$ admet un développement en série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence 1. Par définition du produit de Cauchy, on a

$$a_0 = 1, \quad 2a_0 a_1 = -1 \quad \text{et pour tout } n \geqslant 2, \quad \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 0,$$

Soit $V = \sum_{n\geqslant 0} a_n L^n$, montrons que $V^2 = I_E - L$. On pose $V_N = \sum_{n=0}^{N} a_n L^n$. Alors $V_N \to V$ dans $\mathcal{L}(E,E)$ et donc $V_N^2 \to V^2$ dans $\mathcal{L}(E,E)$:

$$\begin{aligned}\|V^2 - V_N^2\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \|V^2 - V_N V\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|V_N V - V_N^2\|_{\mathcal{L}(E,E)} \\ &\leqslant \|V\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|V - V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} + \|V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)}\|V - V_N\|_{\mathcal{L}(E,E)} \to 0\end{aligned}$$

(On a utilisé que la suite V_N est bornée car convergente).

De plus

$$V_N^2 = \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right) L^n + \sum_{j,k\leqslant N,\ j+k\geqslant N} a_j a_k L^{j+k}.$$

Pour $N \geqslant 2$, le premier terme vaut $I_E - L$. Intéressons nous au deuxième terme (on procède de manière similaire à la question 3) : pour chacun des termes de la somme, l'un des indices j ou k est supérieur à $M = \lfloor N/2 \rfloor$, donc

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j,k\leqslant N,\ j+k\geqslant N} a_j a_k L^{j+k} \right\|_{\mathcal{L}(E,E)} &\leqslant \sum_{j,k\leqslant N,\ j+k\geqslant N} |a_j||a_k|\|L\|^{j+k} \\ &\leqslant \sum_{j=M}^{N}\sum_{k=0}^{\infty} |a_j||a_k|\|L\|^{j+k}_{\mathcal{L}(E,E)} + \sum_{k=M}^{N}\sum_{j=0}^{\infty} |a_j||a_k|\|L\|^{j+k}_{\mathcal{L}(E,E)} \\ &\leqslant 2\left(\sum_{j=M}^{+\infty} |a_j|\|L\|^{j}_{\mathcal{L}(E,E)}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\|L\|^{k}_{\mathcal{L}(E,E)}\right)\end{aligned}$$

Le deuxième terme du produit converge et vaut simplement $\sqrt{1-\|L\|_{\mathcal{L}(E,E)}}$, et le premier est le reste d'ordre M du second, donc tend vers 0 avec M (et donc quand $N\to+\infty$). Ainsi $V_N^2\to I_E-L$, et par unicité de la limite, $V^2=I_E-L$.

Exercice 9. Soit K un compact, convexe d'un espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ et $f:K\to K$ une application 1-lipschitzienne, i.e. telle que pour tous $x,y\in K$, on ait :

$$\|f(x)-f(y)\| \quad\leqslant\quad \|x-y\|.$$

1) Soit $a\in K$. Montrer que, pour tout $n\geqslant 1$, l'application

$$f_n(x)=\frac{1}{n}a+\frac{n-1}{n}f(x),$$

admet un point fixe dans K.

Remarquons d'abord que c'est la convexité de K qui permet de définir les fonctions f_n comme des fonctions à valeurs dans K. Un calcul montre que l'on a :

$$\|f_n(x)-f_n(y)\|=\tfrac{n-1}{n}\|f(x)-f(y)\|\leqslant\tfrac{n-1}{n}\|x-y\|,$$

ce qui implique que chaque fonction f_n est contractante. Comme K est compact, il est complet et le théorème de point fixe de Banach permet de conclure.

2) En déduire que f admet un point fixe dans K.

Notons x_n le point fixe précédemment obtenu pour f_n ; on a donc $f_n(x_n)=x_n$ pour tout $n\geqslant 0$. La compacité de K permet de trouver une extraction $\varphi:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ et $x\in K$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty}x_{\varphi(n)}=x$. Pour conclure, on prouve que $f(x)=x$, ce qui va se faire en prouvant que $\|f(x)-x\|\leqslant\varepsilon$ pour tout $\varepsilon>0$. On a

$$f(x)-x=f(x)-f(x_{\varphi(n)})+f(x_{\varphi(n)})-x_{\varphi(n)}+x_{\varphi(n)}-x,$$

ce qui donne

$$\|f(x)-x\|\leqslant\|f(x)-f(x_{\varphi(n)})\|+\|f(x_{\varphi(n)})-x_{\varphi(n)}\|+\|x_{\varphi(n)}-x\|.$$

Puisque f est 1-lipschitzienne, le premier terme du majorant est $\leqslant\|x_{\varphi(n)}-x\|$, qui est aussi le troisième terme et ce dernier peut être rendu $\leqslant\varepsilon$ pour n assez grand puisque $\lim\limits_{n\to\infty}x_{\varphi(n)}=x$.

Il reste donc à travailler le deuxième terme. Pour $y\in X$ et n'importe quel $k\geqslant 0$, on a :

$$f(x)-x=\tfrac{k}{k-1}\big(f_k(y)-y\big)+\tfrac{1}{k-1}(y-a).$$

Pour $k=\varphi(n)$ et $y=x_{\varphi(n)}$ le premier terme s'annule ; quant au second, il tend vers 0 quand $n\to\infty$ car $(x_{\varphi(n)}-a)$ est majoré en norme, uniformément en n, puisque la fonction continue $d(a,\cdot)$ est bornée sur le compact K.

Remarque : on peut aller plus vite en écrivant $f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)})=x_{\varphi(n)}$, soit

$$\frac{1}{\varphi(n)}a+(1-\frac{1}{\varphi(n)})f(x_{\varphi(n)})=x_{\varphi(n)}.$$

Il reste alors à passer à la limite dans la dernière expression pour obtenir $f(x_\infty)=x_\infty$, mais il faut bien avoir conscience du fait qu'on utilise alors la continuité de la multiplication d'un vecteur par un scalaire dans les espaces vectoriels normés. La continuité de cette application $(\lambda,v)\mapsto\lambda v$ se vérifie par critère séquentiel, en écrivant : $\lambda v-\lambda_n v_n=(\lambda-\lambda_n)v+\lambda_n(v-v_n)$ et en se rappelants que les suites $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$, convergeant respectivement vers λ et v, sont bornées.

Exercice 10. Soit T une application d'un espace métrique compact (X, d) dans lui-même, telle que $d\big(T(x), T(y)\big) < d(x, y)$ pour tout $x \neq y$.

1) Montrer que T possède un unique point fixe, i.e. $x \in X$ tel que $T(x) = x$.

On regarde la fonction « déplacement » $D : X \to \mathbf{R}$ qui à x attache $d\big(x, T(x)\big)$. C'est une fonction continue sur un espace compact, donc elle atteint son minimum en un point, disons $x_\infty \in X$. On doit avoir $T(x_\infty) = x_\infty$, i.e. $d\big(x_\infty, T(x_\infty)\big) = 0$, sinon $T(x_\infty)$ contredit le fait que x_∞ minimise D.

Remarque : comme dans la preuve du théorème de point fixe de Banach, on voit que le point fixe est unique.

2) Ce résultat est-il toujours vrai si l'on enlève l'hypothèse de compacité de (X, d) ?

Non : prendre $k \in]0; 1[$ et considérer l'application $x \mapsto kx$ de $]0; 1[$ dans lui-même.

3) Montrer que pour tout $x \in X$, la suite $\big(T^n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge (ici, T^n est défini par la récurence $T^1 = T$ et $T^n = T \circ T^{n-1}$, pour tout $n \geqslant 2$)

Soit $x \in X$. Voyons que $\big(T^n(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge vers l'unique point fixe x_∞. La suite des nombres réels $\geqslant 0$ donnée par les $d\big(T^n(x), x_\infty\big)$ est décroissante, donc elle converge, disons vers l. Il s'agit de voir que $l = 0$. Supposons que $l > 0$ et par compacité de X donnons-nous une sous-suite $\big(T^{\varphi(n)}(x)\big)_{n \geqslant 0}$ qui converge, disons vers $\xi \in X$. Alors par continuité de T, la suite $\big(T^{\varphi(n)+1}(x)\big)_{n \geqslant 0}$ converge vers $T(\xi)$, et si $\xi \neq x_\infty$, on a $d\big(T(\xi), x_\infty\big) < d(\xi, x_\infty) = l$, contredisant le fait que l est la borne inférieure des $d\big(T^n(x), x_\infty\big)$.

Remarque : Pour prouver qu'une suite $(y_n)_{n \geqslant 0}$ dans un espace métrique compact Y converge, il suffit parfois de prouver que la suite n'a qu'une valeur d'adhérence (qui est alors la limite – cette valeur d'adhérence existe précisément par compacité). En effet, soit $(y_n)_{n \geqslant 0}$ avec une unique valeur d'adhérence, disons y ; dire que $(y_n)_{n \geqslant 0}$ ne converge pas vers y revient à dire qu'il existe $\alpha > 0$ et une extraction $\varphi : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tels que $y_{\varphi(n)} \notin B(y, \alpha)$ pour tout n. Mais alors, que dire des valeurs d'adhérence de $(y_{\varphi(n)})_{n \geqslant 0}$ dans l'espace compact $Y \setminus B(y, \alpha)$? Contradiction.

4) Montrer que la suite d'applications $(T^n)_{n \geqslant 0}$ converge uniformément sur X.

Exercice 11. Soit $X : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 et bornée sur $\mathbf{R}^2$. Prouver que, pour tout $x_0 \in \mathbf{R}$, la solution maximale du problème

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$$

avec condition initiale $x(0) = x_0$, est définie sur $\mathbf{R}$ tout entier.

La fonction $X : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est de classe C^1, le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc aux problèmes de Cauchy correspondants. En particulier, il existe une solution maximale $x :]a, b[\to \mathbf{R}$, $a < 0 < b$, du problème de Cauchy :

$$x'(t) = X(t, x(t)) \text{ avec } x(0) = x_0. \tag{1}$$

Supposons par l'absurde que $b < +\infty$.

Soit $t_1, t_2, \ldots$ des réels vérifiant $0 < t_n < b$ et $t_n \to b$. X étant bornée, $|x'(t)| = |X(t, x(t))| \leqslant C$ pour une certaine constante C. Il vient :

$$|x(t_n) - x(t_m)| \leqslant \left| \int_{t_m}^{t_n} |x'(t)| \, dt \right| \leqslant C|t_n - t_m|.$$

La suite (t_n) convergente, est de Cauchy. La suite $x_n := x(t_n)$ est de Cauchy par l'inégalité précédente. $\mathbf{R}$ étant complet, x_n converge. Soit x_* sa limite.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz en (b, x_*) fournit $\alpha, \delta > 0$ tels que : si (*) $b - \delta < t_n < b$ et $|x_n - x_*| < \delta$, la solution maximale $y : I \to \mathbf{R}$ du problème :

$$y'(t) = X(t, y(t)) \text{ avec } y(t_n) = x_n \tag{2}$$

vérifie $I \supset]t_n - \alpha, t_n + \alpha[$. Fixons un n assez grand de sorte que les conditions (*) sont vérifiées et $\sup I \geqslant t_n + \alpha > b$.

Observons que $x :]a, b[\to \mathbf{R}$ est une solution de (2). Le domaine I de la solution maximale y contient donc $]a, b[$ et x coincide avec la restriction $y| \,]a, b[$. Il vient $x_0 = x(0) = y(0)$ et donc $y : I \to \mathbf{R}$ est une solution du problème (1). Mais $\sup I \geqslant b + \alpha$ contredit la maximalité de x.

Ceci montre que $b = +\infty$. De même, $a = -\infty$: x est définie sur $\mathbf{R}$.

Exercice 12. Soient $]a; b[$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $X :]a; b[\times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $(t, x) \mapsto X(t, x)$ une fonction localement lipschitzienne en x. Soit x une solution maximale de l'équation différentielle $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X\big(t, x(t)\big)$. Prouver que si $u \neq a$ alors $\lim\limits_{t \to u, t > u} \|x(t)\| = +\infty$, et que si $v \neq b$ alors $\lim\limits_{t \to v, t < b} \| x(t) \| = +\infty$.