

## Introduction à l'analyse réelle

## Feuille d'exercices # 2 : Continuité et compacité.

Exercices à préparer pour la séance du 5 mai 2017:  
exercices 1, 3, 8 et 9

**Exercice 1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $Y$  une partie de  $X$ .

1) Prouver que l'application  $d_Y : X \rightarrow \mathbf{R}$  définie par :

$$d_Y(x) := \inf_{y \in Y} d(x, y),$$

est continue et qu'elle est en fait 1-lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$|d_Y(x) - d_Y(x')| \leq d(x, x') \quad \text{pour tous } x, x' \in X.$$

Soient  $x, x' \in X$ . Par inégalité triangulaire, on a :  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y)$  pour tout  $y \in Y$ . Par définition de  $d_Y$ , on a aussi :  $d_Y(x) \leq d(x, y)$  pour tout  $y \in Y$ . Ceci implique que  $d_Y(x) - d(x, x') \leq d(x', y)$  pour tout  $y \in Y$ . Le minorant de cette inégalité ne dépend pas de  $y \in Y$ , donc en passant à la borne inférieure on obtient finalement :  $d_Y(x) - d(x, x') \leq d_Y(x')$  pour tous  $x, x' \in X$ . En intervertissant  $x$  et  $x'$ , on prouve ainsi que l'application  $d_Y$  est 1-lipschitzienne, et donc automatiquement continue.

2) Prouver que  $x$  appartient à l'adhérence  $\overline{Y}$  de  $Y$  si, et seulement si, on a :  $d_Y(x) = 0$ .

Déjà, par la description séquentielle de l'adhérence, on sait que  $\overline{Y}$  est l'ensemble des limites de suites (convergentes) de points de  $Y$ .

Supposons que  $x \in X$  vérifie  $d_Y(x) = 0$ . Par définition de  $d_Y$  comme borne inférieure, cela implique que pour tout entier  $n \geq 1$  il existe  $y_n \in Y$  tel que  $d(x, y_n) \leq \frac{1}{n}$ ; on a ainsi trouvé une suite de points de  $Y$  qui converge vers  $x$ , et donc  $x \in \overline{Y}$ .

Réciproquement, pour  $x \in \overline{Y}$  on peut écrire  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  avec  $y_n \in Y$ , et donc  $d_Y(y_n) = 0$ , pour tout  $n \in \mathbf{N}$ . Par la continuité de  $d_Y$  prouvée dans la question précédente, on en déduit que :  $d_Y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_Y(y_n) = 0$ .

**Remarque :** pour faire court, on a prouvé que  $\overline{Y} = (d_Y)^{-1}(\{0\})$ .

3) Prouver que les fermés de  $X$  sont les ensembles de zéros des fonctions continues sur  $X$  à valeurs réelles.

Dire que  $Y$  est fermé revient à dire que  $\overline{Y} = Y$ , donc d'après la remarque qui précède, si  $Y$  est fermé on peut le voir comme le lieu des zéros de la fonction  $d_Y$ , qui est continue par le point 1.

Réciproquement, le singleton  $\{0\}$  est fermé dans  $\mathbf{R}$  muni de (la topologie de) la valeur absolue. Ainsi, d'après la caractérisation topologique de la continuité, l'image réciproque de  $\{0\}$  par toute fonction continue (= le lieu des zéros de cette fonction) est un fermé.

4) Soient  $A, B \subset X$ . On suppose que  $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$ . Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $U$  et  $V$  tels que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

On considère la fonction  $\phi : X \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $\phi(x) = d_A(x) - d_B(x)$ . Comme différence de fonctions continues (point 1), c'est une fonction continue (utiliser le critère séquentiel pour s'en convaincre si besoin est). On a  $\phi(x) < 0$  pour tout  $x \in A$  par le point 2 et l'hypothèse  $\overline{A} \cap B = \emptyset$ ; *mutatis mutandis*, on voit aussi que  $\phi(x) > 0$  pour tout  $x \in B$ . Les ensembles  $U = \phi^{-1}(\mathbf{R}_-^x)$  et  $V = \phi^{-1}(\mathbf{R}_+^x)$  sont des ouverts (disjoints) au titre d'images réciproques d'ouverts (disjoints) de  $\mathbf{R}$  par une fonction continue, et on vient de voir que  $A \subset U$  et  $B \subset V$ .

5) (Lemme d'Urysohn) Soient  $A$  et  $B$  deux fermés disjoints de  $X$ . Prouver qu'il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f(x) = 0$  si  $x \in A$  et  $f(x) = 1$  si  $x \in B$ .

On peut prendre la fonction  $x \mapsto \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$ .

**Exercice 2.** Soit  $E$  l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle  $[0; 1]$ , muni de la norme de la convergence uniforme (la norme sup  $\| \cdot \|_\infty$ ). Soit  $\varphi$  une forme linéaire sur  $E$  qui prend des valeurs  $\geq 0$  sur toute fonction dont les valeurs sont toutes  $\geq 0$ . Prouver que  $\varphi$  est une forme linéaire continue.

Déjà, par linéarité de  $\varphi$  et par l'hypothèse de positivité, on voit que  $f \leq g$  implique que  $\varphi(f) \leq \varphi(g)$ . Ensuite, on se rappelle que  $f$  et  $-f$  sont majorées par  $|f|$ , ce qui implique que :  $|\varphi(f)| \leq \varphi(|f|)$  pour toute  $f \in E$ . Maintenant, si  $f$  est une fonction de  $E$  non identiquement nulle, on a  $\|f\|_\infty \neq 0$  et  $\frac{f}{\|f\|_\infty}$  est à nouveau une fonction de  $E$ ; en outre :  $\frac{|f|}{\|f\|_\infty} \leq \mathbf{1}$ , où  $\mathbf{1}$  est la fonction constante égale à 1. Ainsi :

$$|\varphi(\frac{f}{\|f\|_\infty})| \leq \varphi(\frac{|f|}{\|f\|_\infty}) \leq \varphi(\mathbf{1}),$$

ce qui prouve finalement que  $\varphi$  est une forme linéaire continue, de norme  $\varphi(\mathbf{1})$ .

**Exercice 3.** Soit  $C$  l'espace des suites réelles qui tendent vers 0, muni de la norme sup  $\| \cdot \|_\infty$ . On considère la forme linéaire  $\varphi : C \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $(u_n)_{n \geq 0} \mapsto$

$$\varphi((u_n)_{n \geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$

1) L'application  $\varphi$  est-elle continue ?

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de  $C$ ; on a :

$$|\varphi((u_n)_{n \geq 0})| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^{n+1}} \leq \|(u_n)_{n \geq 0}\|_\infty \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \|(u_n)_{n \geq 0}\|_\infty,$$

ce qui montre que  $\varphi$  est continue de norme  $\leq 1$ .

2) Calculer sa norme.

Pour chaque entier  $k \leq 1$ , soit  $\mathbf{v}^k$  la suite dont les termes valent tous 1 jusqu'au rang  $k$ , puis 0 au-delà (i.e.,  $\mathbf{v}^k = (v_n^k)_{n \geq 0}$  avec  $v_n^k = 1$  si  $n \leq k$  et  $v_n^k = 0$  pour  $n > k$ ). Par définition de la norme sup, on a  $\|\mathbf{v}^k\|_\infty = 1$  pour tout  $k$ . On calcule que  $\varphi(\mathbf{v}^k) = \sum_{n=0}^k \frac{1}{2^{n+1}}$ , ce qui permet de voir que le sup des  $|\varphi((u_n)_{n \geq 0})|$  sur les suites  $(u_n)_{n \geq 0}$  telles que  $\|(u_n)_{n \geq 0}\|_\infty \leq 1$ , c'est-à-dire la norme de la forme linéaire continue  $\varphi$ , est bien 1 exactement.

3) Cette norme est-elle atteinte ?

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de nombres réels telle que  $\|(u_n)_{n \geq 0}\|_\infty \leq 1$  : on a  $-1 \leq u_n \leq 1$  pour tout  $n$ . Pour toute telle suite, la série de terme général  $\frac{u_n}{2^{n+1}}$  converge et l'on a :

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 1,$$

l'égalité du terme central avec le minorant (resp. le majorant) ayant lieu seulement pour  $u_n$  constant égal à  $-1$  (resp.  $1$ ), ce qui correspond à des cas où la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  n'appartient pas à  $C$ . Ainsi la norme de la forme linéaire continue  $\varphi$  sur  $C$  n'est-elle pas atteinte.

**Exercice 4.** Soit  $E$  l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle  $[0; 1]$ , muni de la norme de la convergence uniforme. On considère la forme linéaire

$$\varphi : E \rightarrow \mathbf{R} \text{ définie par } \varphi(f) = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx.$$

1) L'application  $\varphi$  est-elle continue?

Soit  $f \in E$ . Rappelons que la norme de la convergence uniforme est donnée par  $\|f\|_\infty = \sup(\{|f(x)| \mid x \in [0, 1]\})$ . On a alors

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx = \frac{1}{2} \|f\|_\infty.$$

De même, on obtient

$$\left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty.$$

Ainsi

$$|\varphi(f)| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

On a donc prouvé que  $\varphi$  est continue et que sa norme est inférieure à 1.

2) Calculer sa norme.

On a déjà vu que la norme de  $\varphi$  vérifie l'inégalité

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})} \leq 1.$$

Pour prouver que la norme de  $\varphi$  est effectivement égale à 1, il suffit de construire une suite de fonction  $(f_n)_{n \geq 1}$  telle que  $\|f_n\|_\infty \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n) = 1$ . Pour cela, on peut considérer la suite de fonctions définie de la façon suivante. Pour  $n \geq 1$ , on choisit pour  $f_n$  l'unique fonction continue qui est

$$\|\varphi\|_{\mathcal{L}(E, \mathbf{R})} \leq 1.$$

Pour prouver que la norme de  $\varphi$  est effectivement égale à 1, il suffit de construire une suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  telle que  $\|f_n\|_\infty \leq 1$  pour tout  $n \geq 1$  et telle que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(f_n) = 1$ . Pour cela, on peut considérer la suite de fonctions définie de la façon suivante. Pour  $n \geq 1$ , on choisit pour  $f_n$  l'unique fonction continue qui est

- constante de valeur 1 sur l'intervalle  $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}]$ ,
- constante de valeur  $-1$  sur l'intervalle  $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}, 1]$ ,
- affine sur l'intervalle  $[\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}]$ .

On a alors  $\|f_n\|_\infty = 1$  et  $\varphi(f_n) = 1 - \frac{1}{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ , ce qui répond à la question.

3) Cette norme est-elle atteinte?

Supposons que cette norme soit atteinte pour une fonction  $f \in E$  telle que  $\|f\|_\infty = 1$ . On a donc  $|\varphi(f)| = 1$ . Dans la suite d'inégalités

$$|\varphi(f)| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx = 1$$

on doit avoir des égalités partout. En particulier on obtient les égalités suivantes

$$(1) \quad \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx \right| + \left| \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \right|$$

et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx = 1.$$

Comme par ailleurs

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx \leq \frac{1}{2},$$

on en conclut que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)| dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 1 dx.$$

La fonction  $x \mapsto 1 - |f(x)|$  est continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$ , elle est donc nulle sur  $[0, \frac{1}{2}]$ . Le même raisonnement s'applique sur l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ , on a donc  $|f(x)| = 1$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . La fonction  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , le théorème des valeurs intermédiaires montre alors qu'elle est constante de valeur 1 ou  $-1$ . Cependant l'égalité (1) montre que les nombres  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$  et  $-\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$  sont de même signe, ce qui est une contradiction. On en déduit que la norme de  $\varphi$  n'est pas atteinte.

**Exercice 5.** Soit  $E$  l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle  $[0; 1]$ , muni de la norme de la convergence uniforme. Soit  $K : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $K(x, y) = x(1 - y)$  si  $x \leq y$  et  $y(1 - x)$  si  $y \leq x$ . On considère l'application linéaire  $\varphi : E \rightarrow E$  définie par  $\varphi(f) : y \mapsto \int_0^1 K(x, y)f(x) dx$ .

1) L'application  $\varphi$  est-elle continue?

Soit  $f \in E$ . Si  $y \in [0, 1]$ , on a

$$\varphi(f)(y) = \int_0^1 K(x, y)f(x) dx = (1 - y) \int_0^y f(x)x dx + y \int_y^1 f(x)(1 - x) dx.$$

Comme  $f$  est une fonction continue, on en déduit que  $\varphi(f)$  est une fonction continue sur  $[0, 1]$  et appartient donc bien à  $E$ . De plus, on en déduit

$$\begin{aligned} |\varphi(f)(y)| &\leq (1 - y) \int_0^y |f(x)|x dx + y \int_y^1 |f(x)|(1 - x) dx \\ &\leq y(1 - y) \int_0^1 |f(x)| dx. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\|\varphi(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sup_{y \in [0, 1]} y(1 - y) = \frac{1}{4} \|f\|_\infty.$$

On en déduit que  $\varphi$  est continue de norme inférieure ou égale à  $\frac{1}{4}$ .

2) L'application  $\varphi$  possède-t-elle des valeurs propres? Si oui, lesquelles?

Soit  $\lambda \in \mathbf{R}$  et  $f \in E$  tel que  $\varphi(f) = \lambda f$ . On a donc

$$\forall y \in [0, 1], \lambda f(y) = (1 - y) \int_0^y f(x)x dx + y \int_y^1 f(x)(1 - x) dx.$$

Supposons  $\lambda \neq 0$ . En particulier on voit que la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et que

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, 1], \lambda f'(y) &= - \int_0^y f(x)x \, dx + (1-y)f(y)y + \int_y^1 f(x)(1-x) \, dx - yf(y)(1-y) \\ &= \int_y^1 f(x)(1-x) \, dx - \int_0^y f(x)x \, dx. \end{aligned}$$

Ainsi  $f'$  est dérivable et

$$\forall y \in [0, 1], \lambda f''(y) = -f(y).$$

On en conclut que  $f$  est solution d'une équation linéaire d'ordre deux à coefficients constants. Remarquons que

$$(2) \quad \varphi(f)(0) = \varphi(f)(1) = 0.$$

Si  $\lambda < 0$ , la fonction  $f$  est de la forme  $x \mapsto ae^{\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x} + be^{-\sqrt{-\frac{1}{\lambda}}x}$ . Les conditions (2) impliquent en particulier que  $a = b = 0$  et donc que  $f = 0$ . Si  $\lambda > 0$ ,  $f$  est de la forme  $x \mapsto a \sin(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x) + b \cos(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}x)$  pour un couple  $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ . L'équation (2) implique que  $b = 0$  et que  $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$  est un multiple de  $\pi$ . Réciproquement, on peut vérifier que si  $k \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ , la fonction  $x \mapsto \sin(k\pi x)$  est vecteur propre de l'opérateur  $\varphi$ , de valeur propre  $\frac{1}{k^2\pi^2}$ .

Si  $\lambda = 0$ , en dérivant deux fois l'égalité  $\varphi(f) = 0$ , on obtient l'équation  $f = 0$ , ce qui prouve que 0 n'est pas valeur propre de  $\varphi$ . Finalement l'ensemble des valeurs propres de  $\varphi$  est l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{k^2\pi^2} \mid k \in \mathbf{N}^* \right\}.$$

**Exercice 6.** Soit  $E$  l'espace des fonctions à valeurs réelles continues sur l'intervalle  $[0; 1]$ , muni de la norme de la convergence uniforme. Soit  $K : [0; 1]^2 \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction continue  $(x, y) \mapsto K(x, y)$ . On considère l'application  $\varphi : E \rightarrow E$  définie par

$$\varphi(f) : x \mapsto \int_0^1 K(x, y)f(y) \, dy.$$

Vérifier que pour tout  $\lambda > 0$  le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id})$  est de dimension finie.

Indication : munir  $E$  d'un produit scalaire naturel, et vérifier que pour toute famille orthonormale  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de fonctions dans  $\text{Ker}(\varphi - \lambda \text{Id})$ , on a :

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^n f_i(x)^2 \leq \int_0^1 K(x, y)^2 \, dy.$$

**Exercice 7.** Soit  $X$  un espace métrique.

1) Soit  $f : X \rightarrow X$  une application continue. Prouver que l'ensemble des points fixes de  $f$  est fermé de  $X$ .

Soit  $Y$  l'ensemble des points fixes de  $f$ . Pour montrer que  $Y$  est fermé dans  $X$ , on peut par exemple montrer que la limite d'une suite d'éléments de  $Y$  convergeant dans  $X$  est encore dans  $Y$ . Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite à valeurs dans  $Y$  convergeant

vers  $x \in X$ . Par définition de  $Y$ , pour tout  $n \geq 0$ , on a  $f(x_n) = x_n$ . Comme  $f$  est continue, on a

$$f(x) = f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Ainsi  $x \in Y$ . On en conclut que  $Y$  est fermé dans  $X$ .

2) Soient  $f, g : X \rightarrow X$  des applications continues. Prouver que l'ensemble des points  $x$  tels que  $f(x) = g(x)$  est un fermé de  $X$ .

On peut appliquer la même méthode que pour la première question.

**Exercice 8.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact (au sens où il possède la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite admet une valeur d'adhérence) et soit  $(U_i)_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . Montrer qu'il existe un  $\lambda > 0$  tel que toute boule de rayon  $\lambda$  dans  $X$  est contenue dans un ouvert  $U_i$  pour un indice  $i$  convenable.

Supposons que la conclusion ne soit pas vérifiée afin d'aboutir à une contradiction. Alors pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe  $z_n \in X$  tel que la boule  $B(z_n, \frac{1}{n})$  ne soit contenue dans aucun ouvert  $U_i$ . Par la propriété de Bolzano-Weierstrass, il existerait une extraction  $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  et  $z \in X$  tels que  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{\varphi(n)} = z$ . Puisque les  $U_i$  recouvrent  $X$ , il existerait un indice  $i_0$  tel que  $z \in U_{i_0}$ , et puisque  $U_{i_0}$  est ouvert il existerait  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(z, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ . Soit  $N \geq 1$  un entier tel que  $d(z, z_{\varphi(N)}) < \frac{\varepsilon}{2}$  et  $\frac{1}{\varphi(N)} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Alors, par inégalité triangulaire on aurait  $B(z_{\varphi(N)}, \frac{1}{\varphi(N)}) \subset B(z, \varepsilon) \subset U_{i_0}$ , en contradiction avec le fait que les boules  $B(z_n, \frac{1}{n})$  ne sont contenues dans aucun ouvert  $U_i$ .

**Exercice 9.** 0) Un homéomorphisme est une application bijective continue dont l'application réciproque est elle-même continue (ce qui n'est pas automatique). Montrer que toute application injective continue d'un espace métrique compact  $X$  dans un espace métrique  $Y$  est un homéomorphisme de  $X$  vers  $f(X)$ .

Il suffit de voir que  $f^{-1}$  est continue, par exemple en vérifiant que l'image réciproque de tout fermé (donc compact), disons  $F$ , de  $X$  par  $f^{-1}$  est fermé dans  $Y$ . Mais une telle image réciproque, dans ce cas, n'est rien d'autre que  $f(F)$ , qui est fermé car image continue d'un compact (et un compact d'un espace métrique est fermé).

Maintenant, on munit  $[0; 1]^{\mathbf{N}}$  de la distance  $d((x_n)_{n \geq 0}, (y_n)_{n \geq 0}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^{n+1}}$ .

1) Prouver que  $([0; 1]^{\mathbf{N}}, d)$  est un espace métrique compact.

On va d'abord prouver cette compacité en utilisant le critère séquentiel de Bolzano-Weierstrass, puis on proposera une preuve vérifiant complétude et précompacité, comme le suggère l'exercice 1.

Dans tous les cas, la première chose à remarquer est qu'une suite  $(x^k)_{k \geq 0} = ((x_n^k)_{n \geq 0})_{n \geq 0}$  converge vers  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  si et seulement si

$$\forall n \geq 0, \quad x_n^k \rightarrow y_n \quad \text{quand} \quad k \rightarrow +\infty ;$$

autrement dit, que la convergence se vérifie composante par composante.

En effet si  $x^k \rightarrow y$ , alors pour  $n \geq 0$  fixé, on a  $|x_n^k - y_n| \leq 2^{n+1}d(x^k, y) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Réciproquement, supposons que chaque composante converge. Donnons-nous  $\varepsilon > 0$ . Soit  $N_0 \in \mathbf{N}$  tel que

$$\sum_{n=N_0+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varepsilon,$$

puis  $N_1$  tel que pour tout  $k \geq N_1$  on ait

$$|x_n^k - y_n| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \leq N_0.$$

Alors pour  $k \geq N_1$ , on a

$$\begin{aligned} d(x^k, y) &= \sum_{n \geq 0} \frac{|x_n^k - y_n|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n=0}^{N_0} \frac{|x_n^k - y_n|}{2^{n+1}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{|x_n^k - y_n|}{2^{n+1}} \\ &\leq \sum_{n=0}^{N_0} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \leq \varepsilon + \varepsilon \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc  $x^k \rightarrow y$ .

Soit  $(x^k)_{k \geq 0} = ((x_n^k)_{n \geq 0})_{n \geq 0}$  une suite de  $([0; 1]^{\mathbf{N}}, d)$ . Alors pour tout  $n \geq 0$ ,  $(x_n^k)_{k \geq 0}$  est une suite de  $[0, 1]$ .

Il existe donc une extraction  $\sigma_0$  telle que  $(x_0^{\sigma_0(k)})_{k \geq 0}$  converge dans  $[0, 1]$ , disons vers  $y_0$ . Puis, on peut de même extraire de  $(x_1^{\sigma_0(k)})_{k \geq 0}$  une sous-suite convergente : il existe une extraction  $\sigma_1$  telle que  $(x_1^{\sigma_0 \circ \sigma_1(k)})_{k \geq 0}$  converge, disons vers  $y_1 \in [0, 1]$ . On a encore que  $(x_0^{\sigma_0 \circ \sigma_1(k)})_{k \geq 0}$  converge vers  $y_0$ . En raisonnant comme dans l'exercice 1, on construit pour tout  $m \geq 0$  une extraction  $\sigma_m$  telle que

$$\forall n \leq m, \quad x_n^{\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m(k)} \rightarrow y_n \in [0, 1] \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

Comme dans l'exercice précédent on utilise le fait que la fonction  $\psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  définie par  $\psi(n) = (\sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_n)(n)$  est une extraction (diagonale de Cantor), qui vérifie

$$\forall n \geq 0, \quad x_n^{\psi(k)} \rightarrow y_n \quad \text{quand } k \rightarrow +\infty.$$

Soit  $y = (y_n)_{n \geq 0} \in [0, 1]^{\mathbf{N}}$ , la remarque initiale montre donc que  $x^{\psi(k)} \rightarrow y$ .

Autre méthode, utilisant la notion de complétude : étant donné  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir  $X$  par un nombre fini de boules de rayon  $\varepsilon$ . En effet, soit  $n \geq 1/\varepsilon$  un entier et  $N \geq |\ln \varepsilon| + 1$ , on constate que les  $B(y, \varepsilon)$  recouvrent  $X$ , où  $y$  parcourt l'ensemble fini  $X_{n,N}$  des suites à valeurs dans  $\{0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1\}$ , et qui valent 0 à partir du rang  $N+1$ . En effet si  $x \in X$ , il existe  $y \in X_{n,N}$  tel que

$$\forall m \leq N, \quad |x_m - y_m| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

donc

$$d(x, y) \leq \sum_{m=0}^{N-1} \frac{|x_m - y_m|}{2^{m+1}} + \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{2^N} \leq \varepsilon.$$

Enfin,  $X$  est complet en utilisant la remarque initiale que la convergence dans  $X$  correspond à la convergence de chaque composante, et que  $[0, 1]$  est complet.

2) Deux espaces sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme qui va de l'un sur l'autre (le sens n'importe pas dans la formulation : l'application réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme). Prouver que tout espace métrique compact est homéomorphe à un sous-espace de  $[0; 1]^{\mathbf{N}}$ .

Soit  $(X, \delta)$  un espace métrique compact.  $X$  admet une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  dense. En effet, pour tout  $m \geq 0$ , il existe par compacité un recouvrement fini de  $X$  par des boules de rayon  $1/m$ , de centre disons  $y_1^m, \dots, y_{k_m}^m$ . Alors  $Y = \bigcup_{m \geq 1} \{y_1^m, \dots, y_{k_m}^m\}$  est dense : en effet, si  $x \in X$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $m \geq 0$  tel que  $1/m \leq \varepsilon$  puis il existe un indice  $i$  tel que  $x \in B(y_i^m, 1/m)$ ; et donc  $\delta(x, y_i^m) \leq \varepsilon$ . De plus  $Y$  est un ensemble dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles finis) : on peut le réarranger en une suite  $(x_n)_{n \geq 0}$ .

Soit  $D = \sup_{x, y \in X} \delta(x, y)$  :  $X$  étant compact, il est borné donc  $D < +\infty$ . Définissons maintenant l'application

$$f : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbf{N}}, \quad x \mapsto ((\delta(x, x_n)/D)_{n \geq 0}).$$

$f$  est bien définie (car  $0 \leq \delta(x, x_n)/D \leq 1$  pour tout  $n$  et  $x$ ) ; elle est lipschitzienne : si  $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \sum_{n \geq 0} \frac{|f(x)_n - f(y)_n|}{2^{n+1}} = \sum_{n \geq 0} \frac{|\delta(x, x_n) - \delta(y, x_n)|}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{|\delta(x, x_n) - \delta(y, x_n)|}{2^{n+1}} \leq \sum_{n \geq 0} \frac{\delta(x, y)}{2^{n+1}} \leq \delta(x, y). \end{aligned}$$

$f$  est donc continue. Enfin,  $f$  est injective : soient  $x, y \in X$  sont tels que  $f(x) = f(y)$  ; par densité, il existe une extraction  $\sigma$  telle que  $x_{\sigma(n)} \rightarrow x$ . Mais comme  $f(x) = f(y)$ , en particulier, pour tout  $n \geq 0$ ,  $\delta(y, x_{\sigma(n)}) = d(x, x_{\sigma(n)}) \rightarrow 0$  et  $x_{\sigma(n)} \rightarrow y$ . Par unicité de la limite,  $x = y$ .

Ainsi  $f$  est une bijection sur son image. Montrons que  $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$  est continue ; pour cela montrons que l'image réciproque par  $f^{-1}$  de tout fermé de  $X$  est un fermé de  $f(X)$ . Soit donc  $F$  un fermé de  $X$  ;  $X$  étant compact,  $F$  est compact. Alors

$$(f^{-1})^{-1}(F) = \{y \in f(X) \mid f^{-1}(y) \in F\} = \{y \in f(X) \mid \exists x \in F, f(x) = y\} = f(F)$$

est compact (comme image de compact  $F$  par l'application continue  $f$ ), et est donc fermé : ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi  $f : X \rightarrow f(X)$  est un homéomorphisme.

**Exercice 10.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique connexe et non borné. Montrer que toute sphère de  $X$  est non vide.

On raisonne par contradiction. Supposons que la sphère  $S$  de centre  $x \in X$  et de rayon  $r > 0$  soit vide. Alors la boule ouverte  $B$  de centre  $x$  et de rayon  $r$ , et  $C = \{y \in X \mid d(y, x) > r\}$  sont deux ouverts disjoints. Ils sont non vides car  $x \in B$  et que  $X$  n'est pas borné. De plus  $B \cup C = X$ . Ceci contredit la connexité de  $X$ .

**Exercice 11.** Montrer que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{R}^2$  ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'application  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$  qui soit continue, bijective et telle que  $f^{-1}$  soit aussi continue.

On raisonne par contradiction. Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  un homéomorphisme. Remarquons que  $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$  est connexe, donc son image  $f(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\})$  par  $f$  continue est également connexe. Mais  $f(\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}) = f(\mathbf{R}^2) \setminus \{f(0)\} = \mathbf{R} \setminus \{f(0)\}$  (la droite privée d'un point) n'est pas connexe : en effet les connexes de  $\mathbf{R}$  sont exactement les intervalles.



**Exercice 12.** Montrer qu'un ouvert connexe  $U$  de  $\mathbf{R}^N$  est connexe par arcs. Montrer que l'on peut même joindre deux points de  $U$  par une ligne polygonale. Plus généralement, montrer qu'un ouvert connexe d'un  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel normé est connexe par arcs.

On traite le cas d'un espace vectoriel normé. Soit  $x \in U$  et considérons l'ensemble  $C$  des  $y \in U$  tels que l'on peut joindre  $x$  à  $y$  par un chemin dans  $U$ . La partie  $C$  est ouverte (dans  $U$ ). En effet, si  $y \in C$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(y, \varepsilon) \subset U$ . Les boules étant convexes, pour tout  $z \in B(y, \varepsilon)$ , le segment  $[y, z]$  est un chemin de  $y$  à  $z$  dans  $U$ , et comme la concaténation de deux chemins dans  $U$  est encore un chemin dans  $U$ ,  $z \in C$ . Ainsi  $B(y, \varepsilon) \subset C$ .

La partie  $C$  est également fermée dans  $U$  : si  $(y_n)_{n \geq 0}$  est une suite de  $C$  qui converge vers  $y$  dans  $U$ , soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $B(y, \varepsilon) \subset U$ . Il existe  $N$  tel que  $y_N \in B(y, \varepsilon)$ , et, par convexité des boules  $[y_N, y]$  est un chemin de  $B(y, \varepsilon)$ , donc de  $U$  ; en la concaténant avec un chemin de  $U$  reliant  $x$  à  $y_N$ , on voit que  $y \in C$ .

La partie  $C$  étant non vide, et vu que  $U$  est connexe, on a  $C = U$ . On raisonne de même dans le cas des lignes polygonales, en constatant que la concaténation de deux chemins polygonaux est encore un chemin polygonal.

**Remarque :** le fait d'être relié par un chemin est une relation d'équivalence. Si  $U$  est ouvert, on a vu que les classes d'équivalence sont ouvertes. Comme elles forment une partition, une classe est le complémentaire de l'union (disjointe) de toutes les autres : les classes d'équivalence sont aussi fermées.